

Linnik の零点密度定理について

日大理工 本橋 洋一

(Yoichi MOTOHASHI/Nihon Univ.)

— Summary —

Let $N(\alpha, T, X)$ denote as usual the number of zeros of Dirichlet's L -functions $L(s, \chi)$ in the rectangle $\alpha \leq \sigma \leq 1$, $|t| \leq T$, $s = \sigma + it$. Then we have

THEOREM

If $\alpha \geq 4/5$, then

$$\sum_{\chi \pmod{q}} N(\alpha, T, X) \ll_{\epsilon} (q^2 T^3)^{(1+\epsilon)(1-\alpha)},$$

$$\sum_{q \leq Q} \sum_{\chi \pmod{q}}^* N(\alpha, T, X) \ll_{\epsilon} (Q^4 T^3)^{(1+\epsilon)(1-\alpha)}.$$

This is an improvement on a recent result of Montgomery and Selberg [1]. To prove this we appeal to the following main lemma:

Lemma

Let T be a square-free integer and let $\chi_r(n) = \mu((r, n)) \varphi((r, n))$. Let $\chi_j \pmod{q_j}$ be mutually distinct primitive characters such that $q_j \leq Q$. Further let $s_{j,k} = \sigma_{j,k} + i\tau_{j,k}$ be complex numbers such that

$$\min_{j,k} \sigma_{j,k} = \sigma, \quad \max_{j,k} |\tau_{j,k}| \leq T \quad (T \geq 1)$$

$$\min_{\delta} \min_{1 \leq k < k' \leq K_j} |\tau_{j,k} - \tau_{j,k'}| = \delta \quad (> 0).$$

Then we have, for any $N \geq T$ and $A > 1$,

$$\begin{aligned} & \sum_{j \leq J} \sum_{\substack{r \leq R \\ (r, q_j) = 1}} \frac{q_j \mu^2(r)}{\varphi(q_j r)} \sum_{k \leq K_j} \left| \sum_{N \leq n \leq N^A} c(n) \chi_j(n) \chi_r(n) n^{-s_{j,k}} \right|^2 \\ & \ll_A (\delta^{-1} + \log N) \sum_{N \leq n \leq N^A} (n + J T Q R^2 (\log Q K)^2) |c(n)|^2 n^{-2\sigma}, \end{aligned}$$

where $c(n)$ are arbitrary complex numbers.

Moreover, if χ_j runs over characters $\pmod{q}$ only, then in the above estimate Q is replaced by $\sqrt{q}$ as well as χ_j are not necessarily primitive.

§1.

Linnik の最小素数定理の証明にあたり、ある密度定理と、例外零点の他の零点にあたる影響をあらわす Deuring-Heilbronn 現象とが根底になつてゐる。この密度定理は、

$$(1) \quad \sum_{\chi \pmod{q}} N(\alpha, T, \chi) \ll q^{c_0(1-\alpha)} \quad (T=O(1))$$

(但し c_0 は絶対常数) という形をとるものであり、 $\log$ の項がなかりとて、 $\alpha \rightarrow 1$ のとき極めてよい評価となつてゐることを示してゐる。この絶対常数 c_0 は 2, 3 の人によつて計算されてゐるのであるが (例へば Jurila [2]), その値を小さくすることは、勿論、最小素数の評価をよくすることに直接関係するのであり、強く望まれる訳である。所で、(1) の証明は、Turán [3] によつてかなり簡易化され、そこで展開された方法が Fogels [4] によつて

$$(2) \quad \sum_{\chi \pmod{q}} N(\alpha, T, \chi) \ll (qT)^{c_1(1-\alpha)},$$

更に、Gallagher [5] の美しい論文によつて

$$(3) \quad \sum_{q \leq Q} \sum_{\chi \pmod{q}}^* N(\alpha, T, \chi) \ll (Q^2 T)^{c_2(1-\alpha)}$$

という結果に発展したことは周知のことである。之まに示した Jurila の論文では、この Turán の方法が用ゐられてゐるの

であるが、得られた C_0 の値は、かなり大きなものである。これらの事情があるため、筆者は先に論文 [6] において、ある種の篩の結果を用いることによって、Turán の方法を用いずして、しかもより値の C_0 (あるいは C_1, C_2) をもとめる道のありを示しておいた。しかしながら、論文 [6] は基本的に不完全なものであり、筆者の論説 [7] において、残念ながら、取り消し処分にしたのであった。所が最近に至って、D. Wolk 氏の御厚意により、Montgomery 氏の草稿 [1] を入手する事が出来、筆者の考えが幾分なりとも正鵠を射たものであることを知る事が出来た。又、藤井氏によれば、アメリカのこのある集会で、既に 1973 年の秋頃に、Montgomery-Selberg の結果は発表されていたとの事である。更に又、Bombieri 氏の論説 [8] にも Selberg の結果として、この事が証明なしに示されている事を、情報不安な筆者は、拙く最近になつて知った次第である。話が逆にたが、彼らの結果は

$$(4) \quad \sum_{\chi \pmod{q}} N(\alpha, T, \chi) \ll_{\varepsilon} (qT)^{(3+\varepsilon)(1-\alpha)},$$

$$(5) \quad \sum_{q \equiv 2} \sum_{\chi \pmod{q}}^* N(\alpha, T, \chi) \ll_{\varepsilon} (2^5 T^3)^{(1+\varepsilon)(1-\alpha)},$$

である。

§2.

以下は次の定理の証明に入るのだから、 $\equiv$ は、

lemma 2 によって示す。

Lemma 1. δ_χ は χ : principal のときのみ 1, 他は 0 として,

$$\sum_{M < n \leq M+N} \chi(n) = \frac{q(q)}{q} N \delta_\chi + O(\sqrt{q} \log q)$$

Proof. $\equiv$ は Pólya-Vinogradov の定理。

Lemma 2. (Selberg)

r は square-free として, $\psi_r(n) = \mu((n, r)) \varphi((n, r))$ とおく。

更に, $\xi_d = O(1)$ は任意の複素数として,

$$M(s, \chi, \psi_r) = \sum_d \frac{\xi_d}{d^s} \chi(d) \psi_r(d) \prod_{p \mid \frac{r}{(r, d)}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^{s-1}}\right)$$

とする。すると, $\operatorname{Re} s > 1$ において,

$$L(s, \chi) M(s, \chi, \psi_r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n) \psi_r(n)}{n^s} \left(\sum_{d \mid n} \xi_d \right)$$

Proof.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n) \psi_r(n)}{n^s} \left(\sum_{d \mid n} \xi_d \right) = \sum_d \frac{\chi(d) \xi_d}{d^s} \sum_n \frac{\chi(n)}{n^s} \psi_r(nd)$$

$\equiv$ $\psi_r(n) = \psi_r(d) \psi_{\frac{r}{(r, d)}}(n)$ に注意して, 上記は

$$\begin{aligned}
&= \sum_d \frac{\chi(d) \varepsilon_d}{d^s} \psi_r(d) \sum_n \frac{\chi(n)}{n^s} \psi_{\frac{r}{(r,d)}}(n) \\
&= \sum_d \frac{\chi(d) \varepsilon_d}{d^s} \psi_r(d) \prod_p \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\chi(p)^m}{p^{ms}} \psi_{\frac{r}{(r,d)}}(p^m) \right\} \\
&= \sum_d \frac{\chi(d) \varepsilon_d}{d^s} \psi_r(d) \prod_{p \nmid \frac{r}{(r,d)}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s} \right)^{-1} \prod_{p \mid \frac{r}{(r,d)}} \left\{ 1 - \frac{\chi(p)}{p^s} (p-1) \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s} \right)^{-1} \right\} \\
&= \sum_d \frac{\chi(d) \varepsilon_d}{d^s} \psi_r(d) \prod_{p \mid \frac{r}{(r,d)}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^{s-1}} \right) L(s, \chi).
\end{aligned}$$

Lemma 3

r, r' は square-free $\chi \chi'$

$$\begin{aligned}
&\prod_{\substack{p \mid r \\ p \nmid r'}} \left(1 - \frac{1}{p^{s-1}} \right) \prod_{\substack{p \nmid r \\ p \mid r'}} \left(1 - \frac{1}{p^{s-1}} \right) \prod_{\substack{p \mid r \\ p \mid r'}} \left(1 + \frac{1}{p^{s-1}} (p-2) \right) \\
&= \sum_d \frac{1}{d^s} f(d; r, r')
\end{aligned}$$

とあるのは

$$\psi_r \psi_{r'}(n) (= \psi_r(n) \psi_{r'}(n)) = \sum_{d \mid n} f(d; r, r')$$

Proof.

少し一般化して: $\psi_r \psi_{r'}(n)$ は乗法的であるから,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \psi_r \psi_{r'}(n) = \prod_p \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\chi(p)^m}{p^{ms}} \psi_r \psi_{r'}(p^m) \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{\substack{p|r \\ p|r'}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \prod_{\substack{p|r \\ p \nmid r'}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s} (p-1) \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}\right) \prod_{\substack{p \nmid r \\ p \nmid r'}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s} (p-1) \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}\right) \times \\
&\quad \times \prod_{\substack{p|r \\ p \nmid r'}} \left(1 + \frac{\chi(p)}{p^s} (p-1)^2 \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}\right)
\end{aligned}$$

$$= L(s, \chi) \prod_{\substack{p|r \\ p \nmid r'}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^{s-1}}\right) \prod_{\substack{p \nmid r \\ p \nmid r'}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^{s-1}}\right) \prod_{\substack{p \nmid r \\ p \nmid r'}} \left(1 + \frac{\chi(p)}{p^{s-1}} (p-2)\right)$$

= 4.5'), lemma の結果を得る。

Lemma 4.

$f(d; r, r')$ は上記の通りとして, 任意の $q \geq 1$ に対して,

$$\sum_{\substack{d \\ (d, r) = 1}} \frac{1}{d} f(d; r, r') = \delta_{r, r'} \varphi(r)$$

が $(r, r', q) = 1$ のとき成立する。但し $\delta_{r, r'}$ は Kronecker の記号。又, 更に

$$\sum_d |f(d; r, r')| \equiv \prod_{p|r} (p+1) \prod_{p \nmid r} (p+1).$$

Proof.

= 4.6) は, 前記の lemma から直ちに得られる。

Lemma 5.

$$E(M, N; \chi \psi_r \psi_{r'}) = \sum_{M < n \leq M+N} \chi(n) \psi_r \psi_{r'}(n), \quad \chi: \text{mod } q$$

とすれば,

$$E(M, N; \chi \psi_r \psi_{r'}) = \frac{\varphi(qr)}{q} N \delta_\chi \delta_{r, r'} + O\left(\sqrt{q} \log q \frac{\prod_{p|r} (p+1)}{p} \frac{\prod_{p|r'} (p+1)}{p}\right)$$

か、 $(rr', q) = 1$ なる条件 $F = O(\sqrt{q})$ となる。

Proof.

$$\begin{aligned} E(M, N; \chi \psi_r \psi_{r'}) &= \sum_{M < n \leq M+N} \chi(n) \sum_{d|n} f(d; r, r') \\ &= \sum_d f(d; r, r') \chi(d) \sum_{\frac{M}{d} < n \leq \frac{M+N}{d}} \chi(n) \\ &= \sum_d f(d; r, r') \chi(d) \left\{ \frac{\varphi(q)}{qd} N \delta_\chi + O(\sqrt{q} \log q) \right\} \\ &= N \delta_\chi \frac{\varphi(q)}{q} \sum_{\substack{d \\ (d, q)=1}} \frac{f(d; r, r')}{d} + O\left(\sqrt{q} \log q \sum_d |f(d; r, r')|\right) \end{aligned}$$

Lemma 6.

$\chi_j \pmod{q_j}$ は相異なる原始指標とし、 $q_j \leq Q$ と仮定す。

このとき 任意の $J, R, M, N \geq 1$ に対して,

$$\sum_{j \leq J} \sum_{\substack{r \leq R \\ (r, q_j) = 1}} \frac{q_j \mu^2(r)}{\varphi(q_j r)} \left| \sum_{M < n \leq M+N} c(n) x_j(n) \psi_r(n) \right|^2$$

$$\leq (N + O(JQR^2(\log QR)^4)) \sum_{M < n \leq M+N} |c(n)|^2$$

ここに $c(n)$ は任意の複素数。

Proof.

2次形式の一般論から，双対な形式

$$B = \sum_{M < n \leq M+N} \left| \sum_{j \leq J} \sum_{\substack{(q_j, r) = 1 \\ r \leq R}} b(j, r) x_j(n) \psi_r(n) \left(\frac{q_j \mu^2(r)}{\varphi(q_j r)} \right)^{\frac{1}{2}} \right|^2$$

に $\rightarrow$ して B と B は充分である。計算をすすめるには，

$$B = \sum_{j, j'} \sum_{\substack{r, r' \\ (q_j, r) = 1 \\ (q_{j'}, r') = 1}} b(j, r) \overline{b(j', r')} \left(\frac{q_j q_{j'} \mu^2(r) \mu^2(r')}{\varphi(q_j r) \varphi(q_{j'} r')} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{M < n \leq M+N} x_j \overline{x_{j'}}(n) \psi_r \overline{\psi_{r'}}(n)$$

$$\equiv \sum_{j, r} |b(j, r)|^2 \frac{q_j \mu^2(r)}{\varphi(q_j r)} E(M, N; x_j \overline{x_j} \psi_r \overline{\psi_r}) +$$

$$+ 2 \sum_{j, r} |b(j, r)|^2 \left(\frac{q_j \mu^2(r)}{\varphi(q_j r)} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{j', r' \\ (j', r') \neq (j, r)}} \left(\frac{q_{j'} \mu^2(r')}{\varphi(q_{j'} r')} \right)^{\frac{1}{2}} |E(M, N; x_j \overline{x_{j'}} \psi_r \overline{\psi_{r'}})|$$

従って Lemma 5 から， $\delta_{x_j \overline{x_{j'}}} = \delta_{j, j'}$ に注意して，

$$B \leq \sum_{j,r} |b(j,r)|^2 \frac{g_j \mu^4(r)}{\varphi(g_j r)} \left\{ \frac{\varphi(g_j)}{g_j} N \varphi(r) + O\left(\sqrt{g_j} \log g_j \prod_{p|r} (p+1)^2\right) \right\}$$

$$+ 2 \sum_{j,r} |b(j,r)|^2 \left(\frac{g_j \mu^4(r)}{\varphi(g_j r)} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{j',r' \\ (j,r) \neq (j',r')}} \left(\frac{g_{j'} \mu^4(r')}{\varphi(g_{j'} r')} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{g_j g_{j'}} \log g_j \log g_{j'} \prod_{p|r} (p+1) \prod_{p|r'} (p+1)$$

$$\leq N \sum_{j,r} |b(j,r)|^2 +$$

$$+ O \left\{ \sum_{j,r} |b(j,r)|^2 \left(\frac{g_j \mu^4(r)}{\varphi(g_j r)} \right)^{\frac{1}{2}} J Q \log Q \cdot \log \log Q \cdot \prod_{p|r} (p+1) \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{r' \leq R} \left(\frac{\mu^4(r')}{\varphi(r')} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{p|r'} (p+1) \right\}$$

$$= N \sum_{j,r} |b(j,r)|^2 + O \left\{ \sum_{j,r} |b(j,r)|^2 \left(\frac{g_j \mu^4(r)}{\varphi(g_j r)} \right)^{\frac{1}{2}} J Q \log Q \log \log Q \cdot \right.$$

$$\left. \times \prod_{p|r} (p+1) R^{\frac{3}{2}} \right\}$$

$$= N \sum_{j,r} |b(j,r)|^2 + O \left\{ \sum_{j,r} |b(j,r)|^2 J Q R^2 \log Q (\log \log Q)^{\frac{3}{2}} \right.$$

$$\left. \times (\log \log R)^{\frac{3}{2}} \right\}$$

$$= \left\{ N + O(J Q R^2 (\log Q R)^2) \right\} \sum_{j,r} |b(j,r)|^2$$

= は lemma の結果 を 意味する。

Lemma 7.

Summary of lemma.

Proof.

Montgomery [8] の “ $\ll$ ” の idea を 用いる。

まず

$$S(s, X, \psi_r) = \sum_{N \leq n \leq N^A} c(n) \chi(n) \psi_r(n) n^{-s}$$

$$S(s, X, \psi_r; u) = \sum_{N \leq n \leq u} c(n) \chi(n) \psi_r(n) n^{-s}$$

と おく。

すると

$$S(\sigma_1 + it, X, \psi_r) = S(\sigma + it, X, \psi_r) N^{A(\sigma - \sigma_1)} + (\sigma - \sigma_1) \int_N^{N^A} S(\sigma + it, X, \psi_r; u) u^{-\sigma_1 + \sigma - 1} du$$

= かつ “) $\sigma_1 \geq \sigma$ ならば”

$$|S(\sigma_1 + it, X, \psi_r)|^2 \ll |S(\sigma + it, X, \psi_r)|^2 +$$

$$+ (\sigma - \sigma_1)^2 \int_N^{N^A} u^{-2\sigma_1 + 2\sigma - 1} \log u \, du \times \int_N^{N^A} |S(\sigma + it, X, \psi_r; u)|^2 \frac{du}{u \log u}.$$

$$\ll |S(\sigma+it, X, \Psi_r)|^2 + \int_N^{N^A} |S(\sigma+it, X, \Psi_r; u)|^2 \frac{du}{u \log u}.$$

よ、 ε

$$\sum_{k \in K_j} |S(s_{j,k}, X_j, \Psi_r)|^2 \\ \ll \sum_{k \in K_j} |S(\sigma+it_{j,k}, X_j, \Psi_r)|^2 + \int_N^{N^A} \sum_{k \in K_j} |S(\sigma+it_{j,k}, X_j, \Psi_r; u)|^2 \frac{du}{u \log u}.$$

引 2", Gallagher ([9], p. 3) (1- F')

$$\sum_{k \in K_j} |S(\sigma+it_{j,k}, X_j, \Psi_r; u)|^2 \\ \ll \delta^{-1} \int_{-T}^T |S(\sigma+it, X_j, \Psi_r; u)|^2 dt + \left\{ \int_{-T}^T |S(\sigma+it, X_j, \Psi_r; u)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \left\{ \int_{-T}^T |S'(\sigma+it, X_j, \Psi_r; u)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{但 } S' = \frac{d}{ds} S.$$

更に、再 2" Gallagher [5] (1- F')

$$\int_{-T}^T |S(\sigma+it, X_j, \Psi_r; u)|^2 dt \\ \ll T^2 \int_N^u \left| \sum_{\substack{y < n \leq ye^{1/T} \\ n \leq u}} n^{-\sigma} c(n) \chi_j(n) \Psi_r(n) \right|^2 \frac{dy}{y}$$

17) $\delta <$

$$\int_{-T}^T |S'(\alpha + it, \chi_j, \psi_r, u)|^2 dt$$

$$\leq T^2 \int_N^u \left| \sum_{\substack{y \leq n \leq ye^{1/T} \\ n \leq u}} n^{-\sigma} c(n) \chi_j(n) \psi_r(n) \log n \right|^2 \frac{dy}{y}.$$

$\Sigma \subset -\mathcal{F}, = h \leq \mathcal{E} \leq \mathcal{F} \leq \mathcal{A} \leq \mathcal{B} \leq \mathcal{C},$

$$\sum_{j \in J} \sum_{\substack{r \in R \\ (r, b_j)=1}} \frac{g_j \mu^2(r)}{\varphi(b_j r)} \sum_{k \in K_j} \left| \sum_{\substack{N \leq n \leq N^A}} c(n) \chi_j(n) \psi_r(n) n^{-s_{j,k}} \right|^2$$

$$\leq \delta^{-1} T^2 \int_N^{N^A} \sum_{j \in J} \sum_{\substack{r \in R \\ (r, b_j)=1}} \frac{g_j \mu^2(r)}{\varphi(b_j r)} \left| \sum_{\substack{y \leq n \leq ye^{1/T} \\ n \leq N^A}} n^{-\sigma} c(n) \chi_j(n) \psi_r(n) \right|^2 \frac{dy}{y} +$$

$$+ T^2 \left\{ \int_N^{N^A} \sum_{j \in J} \sum_{\substack{r \in R \\ (r, b_j)=1}} \frac{g_j \mu^2(r)}{\varphi(b_j r)} \left| \sum_{\substack{y \leq n \leq ye^{1/T} \\ n \leq N^A}} n^{-\sigma} c(n) \chi_j(n) \psi_r(n) \right|^2 \frac{dy}{y} \right\}^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left\{ \int_N^{N^A} \sum_{j \in J} \sum_{\substack{r \in R \\ (r, b_j)=1}} \frac{g_j \mu^2(r)}{\varphi(b_j r)} \left| \sum_{\substack{y \leq n \leq ye^{1/T} \\ n \leq N^A}} n^{-\sigma} c(n) \chi_j(n) \psi_r(n) \log n \right|^2 \frac{dy}{y} \right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ T^2 \delta^{-1} \int_N^{N^A} \frac{du}{u \log u} \int_N^u \sum_{j \in J} \sum_{\substack{r \in R \\ (r, b_j)=1}} \frac{g_j \mu^2(r)}{\varphi(b_j r)} \left| \sum_{\substack{y \leq n \leq ye^{1/T} \\ n \leq u}} n^{-\sigma} c(n) \chi_j(n) \psi_r(n) \right|^2 \frac{dy}{y} +$$

$$+ T^2 \left\{ \int_N^{N^A} \frac{du}{u \log u} \int_N^u \sum_{j \in J} \sum_{\substack{r \in R \\ (r, b_j)=1}} \frac{g_j \mu^2(r)}{\varphi(b_j r)} \left| \sum_{\substack{y \leq n \leq ye^{1/T} \\ n \leq u}} n^{-\sigma} c(n) \chi_j(n) \psi_r(n) \right|^2 \frac{dy}{y} \right\}^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left\{ \int_N^{N^A} \frac{du}{u \log u} \int_1^u \sum_{j \leq J} \sum_{\substack{r \leq R \\ (r, q_j)=1}} \frac{q_j \mu^2(r)}{\varphi(r q_j)} \left| \sum_{\substack{j \neq n \equiv j \pmod{r} \\ n \leq u}} c(n, x_j, n) \varphi_r(n) n^{-\frac{j}{r, k}} \right|^2 \right\}$$

由 Lemma 6 及 (14) 得

$$\sum_{j \leq J} \sum_{\substack{r \leq R \\ (r, q_j)=1}} \frac{q_j \mu^2(r)}{\varphi(r q_j)} \sum_{k \leq K_j} \left| \sum_{N \leq n \leq N^A} c(n, x_j, n) \varphi_r(n) n^{-\frac{j}{r, k}} \right|^2$$

$$\ll \delta^{-1} \sum_{N \leq n \leq N^A} (n + J T Q R^2 (\log Q R)^2) |c(n)|^2 n^{-2\sigma} +$$

$$+ \left\{ \sum_{N \leq n \leq N^A} (n + J T Q R^2 (\log Q R)^2) |c(n)|^2 n^{-2\sigma} \right\}^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{N \leq n \leq N^A} (n + J T Q R^2 (\log Q R)^4) |c(n)|^2 n^{-2\sigma} \log^2 n \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \delta^{-1} \int_N^{N^A} \frac{du}{u \log u} \sum_{N \leq n \leq u} (n + J T Q R^2 (\log Q R)^2) |c(n)|^2 n^{-2\sigma}$$

$$+ \left\{ \int_N^{N^A} \frac{du}{u \log u} \sum_{N \leq n \leq u} (n + J T Q R^2 (\log Q R)^2) |c(n)|^2 n^{-2\sigma} \right\}^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left\{ \int_N^{N^A} \frac{du}{u \log u} \sum_{N \leq n \leq u} (n + J T Q R^2 (\log Q R)^4) |c(n)|^2 n^{-2\sigma} \log^2 n \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\ll (\delta^{-1} + \log N^A) \sum_{N \leq n \leq N^A} (n + J T Q R^2 (\log Q R)^2) |c(n)|^2 n^{-2\sigma} \left(1 + \int_N^{N^A} \frac{du}{u \log u}\right)$$

$$\ll A \log A (\delta^{-1} + \log N) \sum_{N \leq n \leq N^A} (n + JT^2 R^2 (\log 2R)^2) |c(n)|^2 n^{-2\alpha}$$

= μ は lemma の結果である。

Lemma 8.

$$\lambda_d = \begin{cases} \mu(d) : d < z \text{ のとき} \\ \mu(d) (\log z^{1+\varepsilon}/d) / (\log z^\varepsilon) : z \leq d < z^{1+\varepsilon} \text{ のとき} \\ 0 : d \geq z^{1+\varepsilon} \text{ のとき} \end{cases}$$

とすると 任意の $z \geq 1$ に対して

$$\sum_{1 < n \leq z} \left(\sum_{d|n} \lambda_d \right)^2 \ll_\varepsilon \frac{z}{\log z}$$

Proof. = μ は, Barban-Veliov [10] の結果であるが,

彼らの証明は充分とは " " である。 (より詳しい証明は

[11] にある。

§3. 定理の証明.

Lemma 2 にあいて $\xi_d = \lambda_d$ (Lemma 8) とする。

そして, n の場合 $\sum_{d|n} \lambda_d = 0$ ($1 < n < z$) であるが,

Vinogradov - Montgomery の idea により, χ は non-principal

とて (結論 = μ だけ考へれば充分である): $a(n) =$

$$\sum_{d|n} \lambda_d \text{ とあいて}$$

$$\begin{aligned}
 & e^{-\frac{1}{Y}} + \sum_{z \leq n} a(n) \chi(n) \psi_r(n) n^{-s} e^{-\frac{n}{Y}} \\
 (3.1) \quad & = L(s, \chi) M(s, \chi, \psi_r) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} L\left(\frac{1}{2} + i(t+u), \chi\right) M\left(\frac{1}{2} + i(t+u), \chi, \psi_r\right) Y^{\frac{1}{2} - \sigma + iu} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \sigma + iu\right) du,
 \end{aligned}$$

が $\sigma > \frac{1}{2}$ において成立する。

以下 次の σ を常に仮定する。

$$(3.2) \quad \log Z \approx \log QT, \quad \log R \approx \log QT, \quad \log Y \approx \log QT$$

勿論 $\sigma > \frac{1}{2}$ は、最後にはしかめさねる $\sigma > \frac{1}{2}$ である。この仮定

のもとに、 $\rho = \beta + i\gamma$ が $L(s, \chi)$ の零点であらば、

$$\begin{aligned}
 1 & \ll \left| \sum_{z \leq n < Y^2} a(n) \chi(n) \psi_r(n) n^{-\rho} e^{-\frac{n}{Y}} \right|^2 + \\
 & + Y^{1-2\beta} \int_{-(\log QT)^2}^{(\log QT)^2} \left| L\left(\frac{1}{2} + i(\gamma+u), \chi\right) \right|^2 \left| M\left(\frac{1}{2} + i(\gamma+u), \chi, \psi_r\right) \right|^2 du
 \end{aligned}$$

を容易に得る。まず $\chi: (\text{mod } q)$ として、この両辺に $1 = \frac{\mu^2(r)q}{\varphi(qr)}$ を

乗じて $r \leq R$, $(r, q) = 1$ によりおとすと、

$$\sum_{\substack{r \leq R \\ (r, q) = 1}} \frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)} \gg \frac{\varphi(q)}{q} \log R$$

であるが、

$$\log R \ll \sum_{\substack{r \leq R \\ (r, q)=1}} \frac{q \mu^2(r)}{\varphi(rq)} \left| \sum_{z \leq n < Y^2} a(n) \chi(n) \psi_r(n) n^{-\rho} e^{-\frac{n}{Y}} \right|^2 +$$

$$+ Y^{1-2\beta} \int_{-(\log QT)^2}^{(\log QT)^2} |L(\frac{1}{2} + i(\sigma+u), \chi)|^2 U_R(\sigma+u, \chi) du,$$

但し

$$U_R(t, \chi) = \sum_{\substack{r \leq R \\ (r, q)=1}} \frac{q \mu^2(r)}{\varphi(rq)} |M(\frac{1}{2} + it, \chi, \psi_r)|^2,$$

である。ここで零点は次のように 2 つの類に分けられる:

(I)

$$\rho \text{ s.t. } \log R \ll \sum_{\substack{r \leq R \\ (r, q)=1}} \frac{q \mu^2(r)}{\varphi(rq)} \left| \sum_{z \leq n < Y^2} a(n) \chi(n) \psi_r(n) n^{-\rho} e^{-\frac{n}{Y}} \right|^2$$

$$(II) \quad \rho \text{ s.t. } \log R \ll Y^{1-2\beta} \int_{-(\log QT)^2}^{(\log QT)^2} |L(\frac{1}{2} + i(\sigma+u), \chi)|^2 U_R(\sigma+u, \chi) du.$$

以下当分のありに (I) の場合を考察する。まず, そのために
領域 $\alpha \leq \sigma \leq 1$, $|t| \leq T$ を

$$\Delta_k: \alpha \equiv \sigma \equiv 1, \quad \frac{k}{\log QT} \leq t < \frac{k+1}{\log QT}$$

$$k = 0, \pm 1, \dots, \pm [T \log QT]$$

と分割する。そして各 Δ_k 内にある $L(s, \chi) \pmod{q}$ ($q \leq Q$) の零実の数を $N_\chi(\Delta_k)$ と書けば, Linnik のよく知られた結果により

$$(3.3) \quad N_\chi(\Delta_k) \ll (1-\alpha) \log QT \quad (1-\alpha \geq (\log QT)^{-1})$$

が成りた。次に領域 $\alpha \equiv \sigma \equiv 1$, $|t| \leq T$ 内は実際に

零実を ρ_j $L(s, \chi_j) \pmod{q_j}$ ($q_j \leq Q$) の個数を $J^{(I)}$ とする。

そして更に $L(s, \chi_j)$ が Δ_k 内に零実 $\rho_{j,k}$ を ρ_j の ρ_j とする。

勿論ある k については $\rho_{j,k}$ は存在しないのであるが, 上の

実は以下の議論には不都合を来さないので, 上の ρ_j のように

すると, $\rho_{j,k} = \sigma_{j,k} + it_{j,k}$ と書けば,

$$J^{(I)} \log R \ll \log R \sum_j \sum_{\substack{k \\ \rho_{j,k} \in (I)}} 1$$

$$\begin{aligned} &\ll \sum_j \sum_{\substack{r \leq R \\ (I) \quad (r, q_j)=1}} \frac{q_j \mu^2(r)}{\varphi(r q_j)} \left\{ \sum_{k \equiv 1 \pmod{2}} + \sum_{k \equiv 0 \pmod{2}} \right\} \times \\ &\quad \times \left| \sum_{z \leq n < Y^2} a(n) \chi_j(n) m^{-\rho_{j,k}} e^{-\frac{n}{Y}} \right|^2 \end{aligned}$$

となり, $\forall k, k' \equiv \nu \pmod{2}$ については

$$|t_{j,k} - t_{j,k'}| \geq (\log QT)^{-1} \quad (k \neq k')$$

であるから, Lemma 7 (5'),

$$\ll \log QT \sum_{z \leq n < Y^2} (n + J^{(I)} TQR^2 (\log QR)^2) |a(n)|^2 n^{-2d} e^{-\frac{2n}{Y}}$$

$$\ll \log QT \left\{ \frac{Y^{2(1-d)}}{(1-d) \log QT} + J^{(I)} z^{1-2d} TQR^2 (\log QT) \right\}$$

を得る. 但し $z = z$. Lemma 8 及び条件 (3.2) を用いる. 両

辺を比較して,

$$(3.4) \quad z^{2d-1} \gg TQR^2 \log QT$$

であるから,

$$\sum_j \sum_{\substack{k \\ p_{j,k}: (I)}} 1 \ll \frac{Y^{2(1-d)}}{(1-d) \log QT}$$

を得る. よって (3.4) の $z = 1$, (3.3) により,

$$(3.5) \quad \sum_{p: (I)} 1 \ll \sum_j \sum_{\substack{k \\ p_{j,k}: (I)}} N_{X_j}(\Delta_k)$$

$$\ll (1-d) \log QT \sum_j \sum_{\substack{k \\ p_{j,k}: (I)}} 1 \ll Y^{2(1-d)}$$

を得る.

次に (II) の場合を考察するのであるが, 議論がやや複雑になる. まず 領域 $d \leq \alpha \leq 1, |t| \leq T$ を

$$D_k: d \leq \sigma \leq 1, \quad k[3(\log 2T)^2] \leq t < (k+1)[3(\log 2T)^2]$$

$$k=0, \pm 1, \dots, \pm [T/[3(\log 2T)^2]]$$

と分割する。 $L(s, \chi) \pmod{q}$ ($q \leq 2$) が D_k 内に $\neq 0$ の零位の個数を $N_\chi(D_k)$ とすれば

$$(3.6) \quad N_\chi(D_k) \ll (\log 2T)^3$$

となる。 $\zeta = z$, (II) の条件をみたし D_k 内にあり $L(s, \chi_j) \pmod{q_j}$ の零位の $\neq 0$ と $\omega_{j,k} = \bar{\sigma}_{j,k} + i\bar{t}_{j,k}$ とすると, (II) の被積分関数の最大値が $t'_{j,k} = \bar{t}_{j,k} + u$ で起るとして

$$(3.7) \quad (\log 2T)^{-1} Y^{2d-1} \ll |L(\frac{1}{2} + it'_{j,k}, \chi_j)|^2 U_k(t'_{j,k}, \chi_j)$$

を得る。そして更に後で定まるパラメータ V を用いて, $\omega_{j,k}$ を 2 つに分類する。

$$(II^{(1)}) : \omega_{j,k} \text{ s.t. } |L(\frac{1}{2} + it'_{j,k}, \chi_j)| \geq V,$$

$$(II^{(2)}) : \omega_{j,k} \text{ s.t. } |L(\frac{1}{2} + it'_{j,k}, \chi_j)| < V.$$

そして $II^{(\nu)}$ を満たす $\omega_{j,k}$ の個数を $P^{(\nu)}$ ($\nu=1, 2$) とする。 [9, Theorem 10.3] と全く同様にして

$$(3.8) \quad P^{(1)} \ll V^{-4} Q^2 T (\log QT)^5$$

を得る。

一方 $(\Pi^{(2)})$ の右辺は (3.7) より

$$V^{-2} Y^{2d-1} (\log QT)^{-1} \ll U_R(t'_{j,k}, \chi_j)$$

である。したがって

$$U_R(t'_{j,k}, \chi) \ll \log QT \sum_{r \in R} \frac{\mu^2(r)}{r} |M(\frac{1}{2} + it'_{j,k}, \chi, \psi_r)|^2,$$

ただし

$$\begin{aligned} M(s, \chi, \psi_r) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^{1+\varepsilon}} \frac{\chi(n) \lambda_n}{n^s} \psi_r(n) \prod_{d | \frac{r}{(r,n)}} \left(1 - \frac{\chi(d)}{d^s}\right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^{1+\varepsilon}} \frac{\chi(n)}{n^s} b_r(n), \end{aligned}$$

$$\text{但し } b_r(n) = \sum_{\substack{dm=n \\ d | \frac{r}{(r,m)}}} \psi_r(m) \lambda_m \mu(d) d, \quad \text{これはよく知られた事}$$

⁹
[9, Theorem 8.2] により、

$$P^{(2)} V^{-2} Y^{2d-1} (\log QT)^{-2} \ll \sum_{r \in R} \frac{\mu^2(r)}{r} \times$$

$$\times \sum_{j,k} \sum_{\omega_{j,k} : \Pi^{(2)}} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}^{1+\varepsilon}} \frac{\chi_j(n)}{n^{\frac{1}{2} + it'_{j,k}}} b_r(n) \right|^2$$

$$\ll \sum_{r \in R} \frac{\lambda^2(r)}{r} \log QT (r z^{1+\varepsilon} + P^{(2)} Q T^{\frac{1}{2}} \log QT) \sum_{n \in r z^{1+\varepsilon}} \frac{b_r(n)^2}{n}$$

但し、この評価を得るに当り、 $k \equiv 1, 2 \pmod{2}$ と分類し

$$|t'_{j,k} - t'_{j,k'}| > (\log QT)^2 \quad (k \neq k', k \equiv k' \pmod{2})$$

を利用した。さて、粗い評価として、

$$\sum_{n \in r z^{1+\varepsilon}} \frac{b_r(n)^2}{n} \ll R^2 (\log QT)^4$$

を得るが

$$\begin{aligned} & P^{(2)} V^{-2} Y^{2d-1} (\log QT)^{-2} \\ & \ll z^{1+\varepsilon} R^3 (\log QT)^6 + P^{(2)} Q T^{\frac{1}{2}} R^2 (\log QT)^7. \end{aligned}$$

従って

$$(3.9) \quad Y^{2d-1} \gg V^2 Q T^{\frac{1}{2}} R^2 (\log QT)^9$$

で表わせば

$$(3.10) \quad P^{(2)} \ll z^{1+\varepsilon} R^3 V^2 Y^{1-2d} (\log QT)^9$$

となる。

以上まとめると、まず (3.6) により、

$$\sum_{\beta \in (\mathbb{I})} 1 = \sum_{j, k} \sum_{w_{j, k}} N_{X_j}(D_k)$$

$$< (\log Q_T)^3 \left\{ \sum_j \sum_k 1 + \sum_j \sum_k 1 \right\}$$

$$\omega_{j,k}: (\mathbb{I}^{(1)}) \quad \omega_{j,k}: (\mathbb{I}^{(2)})$$

$$< (\log Q_T)^3 (P^{(1)} + P^{(2)}).$$

よ、条件 (3.9) の $\dagger$ とに, (3.8), (3.10) より

$$\sum_{p: (\mathbb{I})} 1 < V^{-4} Q^2 T (\log Q_T)^8 + z^{1+\varepsilon} R^3 V^2 Y^{1-2\alpha} (\log Q_T)^{12}.$$

おそれ、

条件 (3.4), (3.9) の $\dagger$ とに

$$\sum_{q \in Q} \sum_{\chi \pmod{q}}^* N(\alpha, T, \chi) = \sum_{p: (\mathbb{I})} 1 + \sum_{p: (\mathbb{II})} 1$$

$$< Y^{2(1-\alpha)} + V^{-4} Q^2 T (\log Q_T)^8 + z^{1+\varepsilon} R^3 V^2 Y^{1-2\alpha} (\log Q_T)^{12}.$$

よ、この不等式において、条件 (3.4) を差して、

$$z = (QTR^3)^{\frac{1}{2\alpha-1}}, \quad R = (QT)^{\varepsilon}$$

よ、更に、条件 (3.9) を差して、

$$Y^{2\alpha-1} = V^2 QTR^9$$

$$V = (Q^2 T)^{\frac{3\alpha-2}{4\alpha}} R^{\frac{1}{4}}$$

よ、よ。 よ、よ、

$$V^{-4} Q^2 T (\log QT)^8 = (Q^2 T)^{\frac{2}{\alpha}(1-\alpha)} R^{-1} (\log QT)^8,$$

$$Z^{1+\varepsilon} R^2 V^2 Y^{1-2\alpha} (\log QT)^{12}$$

$$= (QT)^{\frac{2(1-\alpha)}{2\alpha-1}} R^{-1} (\log QT)^{12}$$

$$\leq (Q^4 T^3)^{\frac{1}{\alpha}(1-\alpha)} R^{-1} (\log QT)^{12} \quad (\text{但し } \alpha \geq 4/5).$$

次に

$$Y = \left(Q^{\frac{2(2\alpha-1)}{\alpha}} T^{\frac{5\alpha-2}{2\alpha}} R^{\frac{19}{2}} \right)^{\frac{1}{2\alpha-1}}$$

$$= Q^{\frac{2}{\alpha}} T^{\frac{5\alpha-2}{2\alpha(2\alpha-1)}} (QT)^{\frac{19\varepsilon}{2(2\alpha-1)}}$$

次に

$$\sum_{q \leq Q} \sum_{\chi \pmod{q}}^* N(\alpha, T, \chi)$$

$$\ll \left(Q^{\frac{2}{\alpha}} T^{\frac{5\alpha-2}{2\alpha(2\alpha-1)}} (QT)^{\frac{19\varepsilon}{2(2\alpha-1)}} \right)^{2(1-\alpha)}$$

$$+ (Q^4 T^3)^{\frac{1}{\alpha}(1-\alpha)}$$

よゝ $\alpha \geq 4/5$ には、この不等式が成立する。よゝ、特に $\alpha \geq 1-\varepsilon$

次に

$$\sum_{q \leq Q} \sum_{\chi \pmod{q}}^* N(\alpha, T, \chi) \ll (Q^4 T^3)^{(1+\varepsilon)(1-\alpha)}$$

となる。しかるに Jutila [12] によつて, $\alpha \geq 4/5$ のとき

$$\sum_{q \leq 2} \sum_{\chi \pmod{q}}^* N(\alpha, T, \chi) \ll (2^{\frac{1}{2}} T)^{2(1-\alpha)} (\log 2T)^C$$

である故, 是れによつて定理の言明が完成したのである。

[注意] Burgess [12] によれば, non-principal $\chi \pmod{q}$ にて

$$\sum_{M < n \leq M+N} \chi(n) \ll \sqrt{N} q^{\frac{3}{16} + \varepsilon}.$$

是れを Pólya-Vinogradov のかわりに用ゐれば, $\alpha = 1$ の(4) < どころに $\frac{3}{16} + \varepsilon$ となる。

30 IX '75.

文 献

- [1] H.L. Montgomery and A. Selberg: Linnik's theorem.
(unpublished)
- [2] M. Jutila: On two theorems of Linnik concerning the zeros of
Dirichlet's L-functions. Ann. Acad. Fennicae. ser. A, I. Math.,
No. 458 (1969).
- [3] P. Turán: On a density theorem of Yu. V. Linnik. Publ. Math.
Inst. Hung. Acad. Sci., Ser. A 6 (1961), 165-179.

- [4] E. Fogels : On the zeros of L -functions. *Acta Arith.* 11 (1965) 67-96.
- [5] P. X. Gallagher : A large sieve density estimate near $\sigma=1$.
Invent. Math., 11 (1970), 329-339.
- [6] 本橋 洋一 : Linnik-Fogels-Gallagher の定理について.
解析数論シンポジウム報告集. 1973年10月京都.
- [7] 本橋 洋一 : 素数分布論序説, *数学* 26 (1974), 1-12.
- [8] E. Bombieri : Le grand crible dans la theorie analytique des nombres. *Soc. Math. France, Asterisque* No. 18, 1974.
- [9] H. L. Montgomery : Topics in multiplicative number theory.
Lect. Note in Math., No. 227, Springer 1971.
- [10] M. B. Barban and P. P. Veohor : On an extremal problem.
Trans. Moscow Math. Soc., 18 (1968), 91-99.
- [11] 本橋 洋一 : 篩の方法からの一問題. *数理論講究録* 222 (1974), 9-50.
- [12] M. Jutila : Zero density estimate for L -functions, II.
(unpublished)
- [13] D. A. Burgess : On character sums and L -series, II.
Proc. London Math. Soc., 13 (1963), 524-536.