

多重エネルギー準位をもつ

原子の輝線強度

京大理 石 沢 俊 高

§ 1. 序

太陽の彩層や紅炎，惑星状星雲，活動的な銀河系外星雲の中心核等も分ち観測すると，比較的弱い連続スペクトルの上に数多くの輝線が重なって見える。このような大気の物理状態は局所熱力学平衡から大きくずれていることはよく知られている。輝線スペクトルは，連続スペクトルと共に，このような物理状態に関して数多くの情報を提供してきた。

輝線は一般に原子あるいはイオンによって放射される。原子あるいはイオンは多くの離散エネルギー準位を持っているため，いくつかの輝線輻射と連続輻射も放射する。このような輻射は一般に強い相互作用をする。従来，観測された輝線スペクトルを解釈する際，簡単のために大気が特定の線あるいは連続輻射に対して光学的に厚いか薄いかという仮定をするか，またはある輻射を無視することが確かな根拠なしに

行われてきた。

この研究では多重エネルギー準位をもつモデル原子の放射するすべての輻射場の同時解を求めてその相互作用を明らかにするとともに、観測された強度との比較により大気の物理状態を決定することを試みる。

§ 2. 統計平衡の式

N 個の離散エネルギー準位と一つの電離状態を持つ原子の各準位にある単位体積当りの個数に対する定常状態の式（統計平衡の式）は次のように書くことができる。

$$(1) \quad - \sum_{n=1}^{m-1} b_n C_{nm} + b_m (C_{mc} + R_{mc} + \sum_{n=1}^{m-1} C_{mn} + \sum_{k=m+1}^N C_{mk} + \sum_{n=1}^{m-1} \Delta_{mn}) - \sum_{k=m+1}^N b_k (C_{km} + \Delta_{km}) = C_{cm} + R_{cm}, \quad n < m < k,$$

ここで b_m は m 番目の準位にある原子の個数 N_m の局所熱力学平衡における個数 N_m^* に対する比である。

$$(2) \quad b_m = N_m / N_m^*.$$

C_{nm} , C_{mc} , C_{cm} は電子衝突による単位時間当りの遷移確率, R_{cm} , R_{mc} はそれぞれ輻射再結合, 電離による遷移確率に関する量である。 C_{nm} , C_{mc} , C_{cm} , R_{cm} は電子温度と電子密度の関数である。 R_{mc} は m 準位の連続輻射の強度に

依存する。 Δ_{mn} は輻射による上の準位から下の準位への差し引きの遷移確率に関係する量であり、遷移 $m \rightarrow n$ の線輻射場に依存する。大気中の電子温度と電子密度が与えられているとき、すべての連続輻射と線輻射場が分かれば b_m が(1)式より、したがって N_m を(2)式より決定することができる。

§ 3. 輻射輸達の式

1. 線輻射

スペクトル線の輻射輸達を解くとき、次の仮定をする。

(i) 連続吸収および連続放射は無視できる。

(ii) ドプラー速度は大気中で一定である。

(iii) 源泉関数は振動数に依存しない。

これらの仮定のもとに平行平面大気における輸達方程式は

$$(3) \quad \mu \frac{\partial I(\tau, x, \mu)}{\partial \tau} = \phi(x) [I(\tau, x, \mu) - S(\tau)],$$

で与えられる。ここで $I(\tau, x, \mu)$ は光学的深さ τ のところで振動数 x を持ち方向 μ で伝播する光の強度である。 x はドプラーや $\Delta \nu_D$ で線中心から測られた振動数、 μ は伝播方向と大気の外向きの方線のなす角度の余弦である。 τ は幾何学的深さと

$$(4) \quad d\tau = k(z) dz,$$

の関係にある。 $k(\nu)$ は単位体積当りの吸収係数であり、

$$(5) \quad k(\nu) = \frac{h\nu_{nm}}{4\pi\Delta\nu_D} N_n^* B_{nm} (b_n - b_m e^{-h\nu_{nm}/kT_e}),$$

添字 n, m は線遷移の下と上の準位を示す。 B_{nm} はアインシュタインの遷移確率である。 $\phi(x)$ は規格化されたドプラ一散乱係数である。

$$(6) \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

振動数に無関係な源泉関数 $S(\tau)$ は

$$(7) \quad S(\tau) = \frac{2h\nu_{nm}^3}{c^2} \left[\frac{b_n}{b_m} e^{h\nu_{nm}/kT_e} - 1 \right]^{-1},$$

で表わされる。 統計平衡の式の形式解 b_n/b_m を代入すると $S(\tau)$ を輻射場で表わすことができる。

$$(8) \quad S(\tau) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx \int_{-1}^1 I(\tau, x, \mu) \frac{d\mu}{2} + W(\tau) B}{1 + \epsilon(\tau)},$$

ここで B はプランク関数である。 $\epsilon(\tau), W(\tau)$ は b_n/b_m の形式解より求まる量であり他の線輻射と連続輻射に依存する。統計平衡の式に現われる線輻射場に依存する量 Δ_{mn} は

$$(9) \quad \Delta_{mn} = A_{mn} g_m e^{h\nu_{nm}/kT_e} \left(\frac{WB}{S} - \epsilon \right),$$

で表わされる。 ここで A_{mn} はアインシュタインの遷移確率

があり, g_m は m 準位の統計的重みである。

2. 連続輻射

連続吸収係数は吸収端で不連続であるから, 連続輻射の輸達方程式は隣り合う吸収端の間の波長域で別々に解かれる。

そのとき輸達方程式は次の形に書ける。

$$(10) \quad \mu \frac{\partial I(z, \nu, \mu)}{\partial z} = - \sum_{n=n_0}^N N_n a_n(\nu) I(z, \nu, \mu) + \sum_{n=n_0}^N N_n^* a_n(\nu) e^{-h\nu/kT_e} \left(\frac{2h\nu^3}{c^2} + I(z, \nu, \mu) \right),$$

ここで $a_n(\nu)$ は n 準位からの電離の吸収係数である。 $n=0$ 項は電離による吸収と, $n=N$ 項は再結合による放出を表わす。

この方程式を書直して

$$(11) \quad \mu \frac{\partial I(\tau, \nu, \mu)}{\partial \tau} = \chi(\tau, \nu) [I(\tau, \nu, \mu) - S(\tau, \nu)],$$

ここで τ は吸収端 $\nu = \nu_{n_0}$ における光学的深さであり

$$(12) \quad d\tau = - \sum_{n=n_0}^N N_n^* a_n(\nu_{n_0}) (b_n - e^{-h\nu_{n_0}/kT_e}) dz,$$

$$(13) \quad \chi(\tau, \nu) = \frac{\sum_{n=n_0}^N N_n^* a_n(\nu) (b_n - e^{-h\nu/kT_e})}{\sum_{n=n_0}^N N_n^* a_n(\nu_{n_0}) (b_n - e^{-h\nu_{n_0}/kT_e})},$$

$$(14) \quad S(\tau, \nu) = \frac{\sum_{n=n_0}^N N_n^* a_n(\nu) \cdot (b_{n_0} - e^{-h\nu/kT_e})}{\sum_{n=n_0}^N N_n^* a_n(\nu) (b_n - e^{-h\nu/kT_e})} \cdot \frac{B_\nu (1 - e^{-h\nu/kT_e})}{b_{n_0} - e^{-h\nu/kT_e}},$$

統計平衡の式の b_{n_0} に対する形式解を用いて $S(\tau, \nu)$ を輻射場を表わすと

$$(15) \quad S(\tau, \nu) = \frac{\xi(\tau, \nu) \left[\sigma(\nu) \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi a_{n_0}(\nu)}{h\nu} d\nu \int_{-1}^1 I(\tau, \nu, \mu) \frac{d\mu}{2} + W(\tau) B_\nu \right]}{1 + \tilde{\epsilon}(\tau, \nu)}$$

ここで

$$(16) \quad \xi(\tau, \nu) = \frac{\sum_{n=n_0}^N N_n^* a_n(\nu) \cdot (b_{n_0} - e^{-h\nu/kT_e})}{\sum_{n=n_0}^N N_n^* a_n(\nu) (b_n - e^{-h\nu/kT_e})},$$

$$(17) \quad \sigma(\nu) = \frac{B_\nu}{\int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi a_{n_0}(\nu)}{h\nu} B_\nu d\nu}$$

$\tilde{\epsilon}(\tau, \nu)$, $W(\tau)$ は b_{n_0} の形式解より決定される量であり他の線輻射場と連続輻射場に依存する。

§ 4. 輸達方程式の解法

輸達方程式は線輻射と連続輻射のいずれに対しても同じ形に書くことができることが(3)式と(11)式より分る。

$$(18) \quad \mu \frac{\partial I(\tau, x, \mu)}{\partial \tau} = \chi(\tau, x) \left[I(\tau, x, \mu) - S(\tau, x) \right],$$

ここで源泉関数 $S(\tau, x)$ は

$$(19) \quad S(\tau, x) = \zeta(\tau, x) \int \phi(x) dx \int I(\tau, x, \mu) \frac{d\mu}{2} + \eta(\tau, x)$$

の形に書き表わすことができる。変数 x は線輻射に対してドプラー巾で測った線中心からの振動数であり、連続輻射に対して振動数そのものである。

Feautrier (1964) に従って方程式 (18) と (19) は差分法によって解かれる。

$$(20) \quad J(\tau, x, \mu) = \frac{1}{2} [I(\tau, x, \mu) + I(\tau, x, -\mu)],$$

$$(21) \quad F(\tau, x, \mu) = \frac{1}{2} [I(\tau, x, \mu) - I(\tau, x, -\mu)],$$

を導入すると方程式 (18) は次のようになる。

$$(22) \quad \mu \frac{\partial F(\tau, x, \mu)}{\partial \tau} = \chi(\tau, x) [J(\tau, x, \mu) - S(\tau, x)],$$

$$(23) \quad \mu \frac{\partial J(\tau, x, \mu)}{\partial \tau} = \chi(\tau, x) F(\tau, x, \mu).$$

その結果

$$(24) \quad \frac{\mu}{\chi(\tau, x)} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\mu}{\chi(\tau, x)} \frac{\partial J(\tau, x, \mu)}{\partial \tau} \right) = J(\tau, x, \mu) - S(\tau, x).$$

を得る。方程式 (24) において源泉関数 $S(\tau, x)$ 中の角度と振動数の積分に対してガウスの離散分点法を用いて

$$(25) \quad \int \phi(x) dx \int_{-1}^1 I(\tau, x, \mu) \frac{d\mu}{2} = \int \phi(x) dx \int_0^1 J(\tau, x, \mu) d\mu \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j J(\tau, x_i, \mu_j).$$

さらに光学的深さに対しても離散分点を導入して微分を差分近似する。

$$(26) \quad \frac{\mu}{\chi} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\mu}{\chi} \frac{\partial J}{\partial \tau} \right) = \frac{\mu}{\chi_\ell} \frac{2}{\tau_{\ell+1} - \tau_{\ell-1}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\chi_{\ell+1}} + \frac{\mu}{\chi_\ell} \right) \frac{J_{\ell+1} - J_\ell}{\tau_{\ell+1} - \tau_\ell} - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\chi_\ell} + \frac{\mu}{\chi_{\ell-1}} \right) \frac{J_\ell - J_{\ell-1}}{\tau_\ell - \tau_{\ell-1}} \right].$$

その結果、(24) は次のようなベクトル方程式に書ける。

$$(27) \quad -A_l J_{l-1} + B_l J_l - C_l J_{l+1} = D_l,$$

ここで J_l は $J(\tau_l, x_i, \mu_j)$ を成分とする列ベクトルである。

A_l, B_l, C_l は $nm \times nm$ の行列であり, D_l は列ベクトルである。

表面における境界条件として $I(0, x, -\mu) = E^0(x, \mu)$,

$I(\tau, x, \mu) = E^\tau(x, \mu)$ をとれば, (21) と (23) を用いて

$$(28) \quad B_1 J_1 - C_1 J_2 = D_1,$$

$$(29) \quad -A_g J_{g-1} + B_g J_g = D_g.$$

となる。もし大気がある中心のまわりに対称であるときでも

$\tau = \tau_g$ を中心にとれば (29) と同じ形の境界条件になる。こ

の境界条件のもとにベクトル方程式 (27) は漸化式によっ

て解くことができる。すなわち補助行列 S とベクトル e を

導入する。

$$(30) \quad S_1 = B_1^{-1} C_1, \quad e_1 = B_1^{-1} D_1,$$

$$(31) \quad S_l = (-A_l S_{l-1} + B_l)^{-1} C_l,$$

$$(32) \quad e_l = (-A_l S_{l-1} + B_l)^{-1} (D_l + A_l e_{l-1}).$$

J_l は漸化式によって決定される。

$$(33) \quad J_g = e_g,$$

$$(34) \quad J_l = S_l J_{l+1} + e_l.$$

線輻射に対して $J(\tau_l, x_i, \mu_j)$ の値より源泉関数 $S(\tau_l)$ が (8) 式よ

り, Δ_{mn} が (9) 式より決定される。連続輻射に対して

$J(\tau_l, x_i, \mu_j)$ より直接 R_{mc} が決定される。

§ 5. 輻射場の決定

線輻射に対する光学的深さはすべての輻射場に、源泉関数のパラメーターは他のすべての輻射場に依存するから、逐次近似の方法を用いなければならない。

逐次近似はすべての輻射場 Δ_{mn} , R_{mc} に初期値を与えるところによって始められる。一つの逐次近似は次の三つの段階を輻射場の数だけ繰返すことから成る。

(i) 前に得られた Δ_{mn} , R_{mc} を用いて統計平衡の式を解き b_m を求める。

(ii) 考えている輻射の光学的深さと源泉関数のパラメーターを決定する。

(iii) 輸送方程式を解いて Δ_{mn} あるいは R_{mc} を求める。

一回の逐次近似の終るごとに前回の逐次近似の b_m と比較して収束条件がすべての準位と深さに対して満たれるまで繰返す。

§ 6. 電離カルシウムと水素に対する応用

1. 電離カルシウムの輝線強度

電離カルシウムの強い線を生じる準位は図 1 に示されているように $4^2S_{1/2}$, $4^2P_{3/2}$, $4^2P_{1/2}$, $3^2D_{3/2}$, $3^2D_{5/2}$ の五つの準位である。二重線の K 線 ($3934 \text{ \AA}$) と H 線 ($3968 \text{ \AA}$) はそれぞれ

$4^2P_{3/2} - 4^2S_{1/2}$, $4^2P_{1/2} - 4^2S_{1/2}$ の遷移により, 三重線の $\lambda 8542$ 線, $\lambda 8662$ 線, $\lambda 8498$ 線はそれぞれ $4^2P_{3/2} - 3^2D_{3/2}$, $4^2P_{1/2} - 3^2D_{3/2}$, $4^2P_{3/2} - 3^2D_{3/2}$ の遷移により生じる。

太陽の彩層や紅炎の輝線スペクトルにおいてこれらの五本の線は強い輝線として認められ, 今迄も度々観測の対象となってきた。これらの輝線強度を彩層や紅炎の物理状態を含むと考えられるいろいろな状態に対して計算した。

有限平行平面大気は四つのパラメーター (電子温度 T_e , 電子密度 N_e , K 線における光学的厚さ T_K , ドップラー速度 v_D) によって記述できる。計算は

$$T_e = 4000 \sim 20000^\circ K, N_e = 10^{10} \sim 10^{12} \text{ cm}^{-3}$$

$T_K = 0.1 \sim 100$ に対して行われた。

全強度がドップラー速度で割られる形で求められるので, ドップラー速度は観測と比較するとき決定されるべきパラメーターである。

大気の両側を照らす光球からの線輻射の強度として光球の中心における対応する吸収線の中心強度の $1/2$ を用いた。連続輻射に対して彩層や紅炎は光学的に非常に薄いので, 大気中の強度は入射強度に等しく取られた。したがって輸送方程式は線輻射だけに対して解かれる。振動数の分点の数

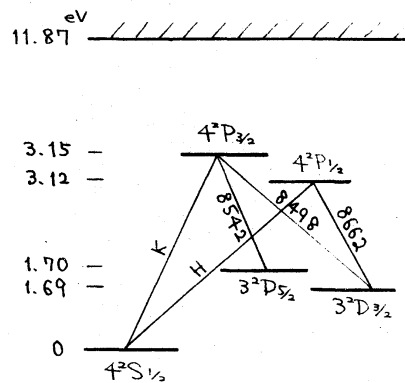


図1. カルシウムイオンのモデル

$n=4$, 角度の分点の数 $m=2$, 光学的深さの分点の間隔 $\Delta \log \tau = 0.1$ と取られた。

従来 H, K 線を解釈する際, 3D 準位は無視されてきた。赤外域の三重線は H, K 線と上の準位も共有するため, 3D 準位の存在は H, K 線の輝線強度に影響を与える筈である。表 1 にモデル 2 ($4^2S_{1/2}$ と $4^2P_{3/2}$), モデル 3 ($4^2S_{1/2}, 4^2P_{3/2}, 4^2P_{1/2}$), モデル 5 (五つの準位すべてを持つ) に対して, $T_e = 10000^\circ\text{K}$, $N_e = 10^{11}\text{cm}^{-3}$, $T_k = 1, 10, 100$ の大気から垂直に放射される K 線の全強度を与える。この表から 3D 準位を持つことにより

表 1. $T_e = 10000^\circ\text{K}$, $N_e = 10^{11}\text{cm}^{-3}$ に対する K 線の全強度

T_k	1	10	100
モデル 2	1.29×10^3	6.28×10^3	2.94×10^4
モデル 3	1.29×10^3	6.19×10^3	2.52×10^4
モデル 5	1.52×10^3	9.02×10^3	3.99×10^4

K 線の強度が増すことが分る。これは H, K 線の輻射が三重線の輻射に変換される割合より基底準位 $4S$ より 3D 準位を経て $4P$ 準位まで電子衝突によって励起される割合が優れることによる。 $T_k = 10$ に対するモデル 2 の強度は, 同じ T_k と N_e で $T_e = 7700^\circ\text{K}$ に対するモデル 5 の強度に相当する。したがって 3D 準位を持たないモデル原子を用いれば, T_e, N_e あるいは T_k を過大評価することになる。

図2に $N_e = 10^{11}$ に対する K 線に対する他の線の相対強度を与える。これらの相対強度は T_e にあまり敏感でないことが分る。また他の N_e の計算との比較から N_e にもあまり依存しない。したがって相対強度より T_k を決定できる。しかしながら三重線は T_k と共に同じような変化をすうから、独立な情

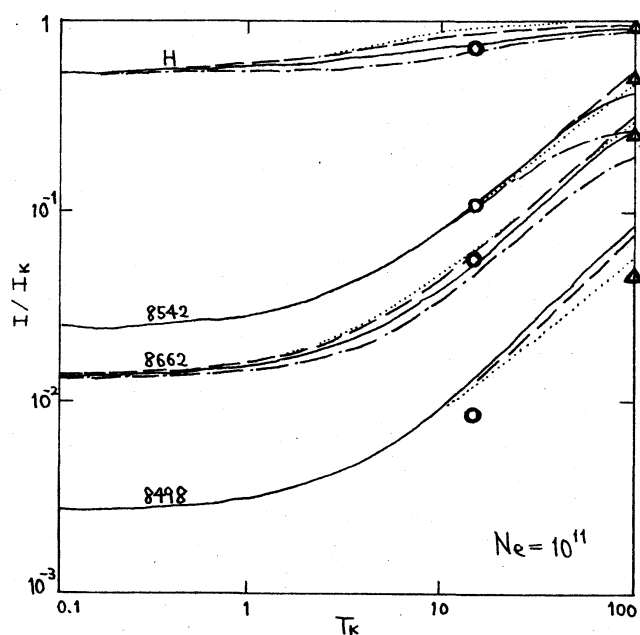


図2. K線に対する相対強度

----- $T_e = 4000^\circ\text{K}$ --- $T_e = 6000^\circ\text{K}$
 ——— $T_e = 10000^\circ\text{K}$ - - - $T_e = 20000^\circ\text{K}$

報を与えない。H線の変化も緩やかである。したがって五本の電離カルシウム4線の全強度のうちで完全に独立であるのは二つだけである。図中の記号は1962年のラエ日食で得られた彩層の3000 km (Δ) と4000 km (O)の高さにおける表面輝度の相対値である。(Dunn et al., 1968) それぞれ

$T_k = 100$ と $T_k = 15$ を与える。

表面輝度の絶対値を用いて仮定した N_e に対して T_e を決定することができる。計算された強度はドップラー速度で割られている。彩層の乱流速度として 15 km/s を採用する (Suemoto, 1963)。図3に $T_k = 100$ と 15 に対する全強度も T_e に関して与える。観測された表面輝度は $N_e = 10^{11}$ に対して 3000 km と 4000 km の高さで $T_e = 7000^\circ\text{K}$ と 10000°K を与える。これらの値は Suemoto (1963) が水素と金属線の中より導いた温度と相容れる。

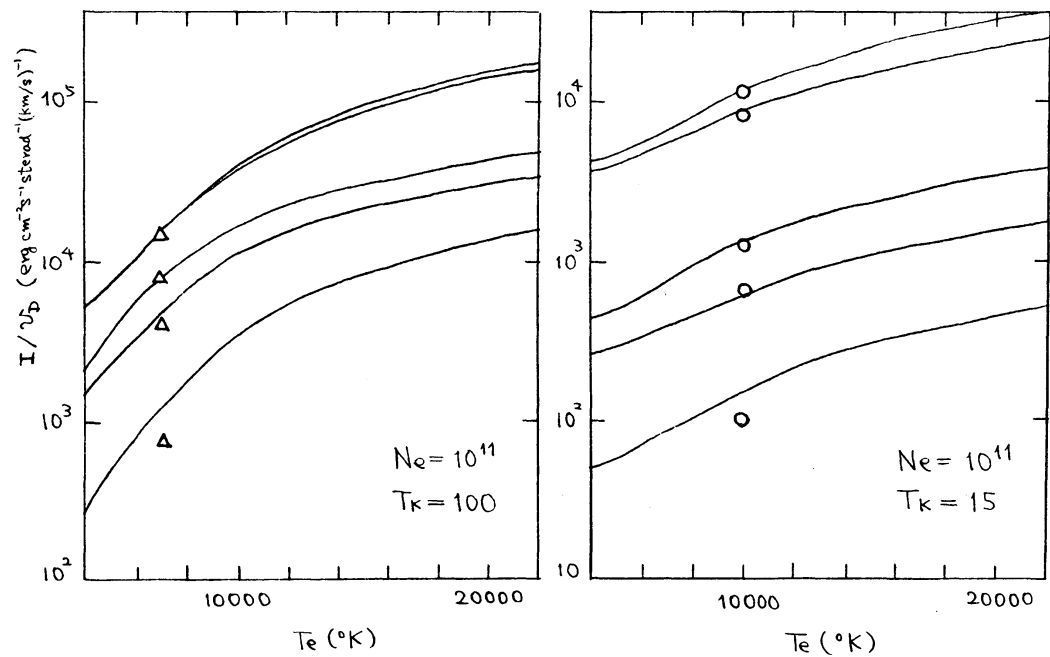


図3. $T_k = 100$ と 15 に対する全強度

2. 水素原子の輝線強度

水素原子は連続状態に近づくにつれて無数のエネルギー準

位を持ちこれらの準位をとあして連続状態と強い相互作用を
 する。従って準位数を有限個に限ることは著しい誤りを生
 ずる恐れがある。しかし N 個の準位を持つ水素原子は
 $\frac{1}{2}N(N+1)$ 個の輻射場を有するため、大きい N に対してすべての
 の輻射場を同時に解くことは困難になる。従って何らかの
 簡単化をして解くべき輻射場の数を減らすことが必要である。

準位数を増していくときの輝線強度の変化を調べよう。一歩
 として三、四、五準位の原子に対して輻射場を決定して輝線
 強度を決定した。逐次近似の方法は電離カルシウムの場合
 と同じである。角度の分点数 $m=1$, 線輻射に対する振動数
 の分点数 $n_l=2$, 連続状態に対する振動数の分点数 $n_c=3$ と
 取った。また $\Delta \log \tau = 0.2$ 。大気の状態は $T_e = 10000^\circ \text{K}$,
 幾何学的厚さ $H = 10^9 \text{cm}$, 全粒子数 $N = 10^{12} \text{cm}^{-3}$ である。乱
 流速度 $\xi_t = 0 \text{ km/s}$ とした。外部からの入射光線はない。

図4に $\text{H}\alpha$ 線 (3-2 遷移により生じ可視域で最も強い線) の
 源泉関数を幾何学的深さに対して与える。図で $\log \tau = 5$ 近
 辺に当る $\tau_{\text{H}\alpha} \sim 1$ では源泉関数は準位数を変えてもあまり大
 きく変化しない。しかし大気中心ではかなり変化する。
 表2に各準位数に対して $\text{H}\alpha$ 線の光学的厚さと全強度を与える。
 準位数が増すにつれて収束する傾向を示しているがさらに準
 位の多い場合の計算を必要とする。

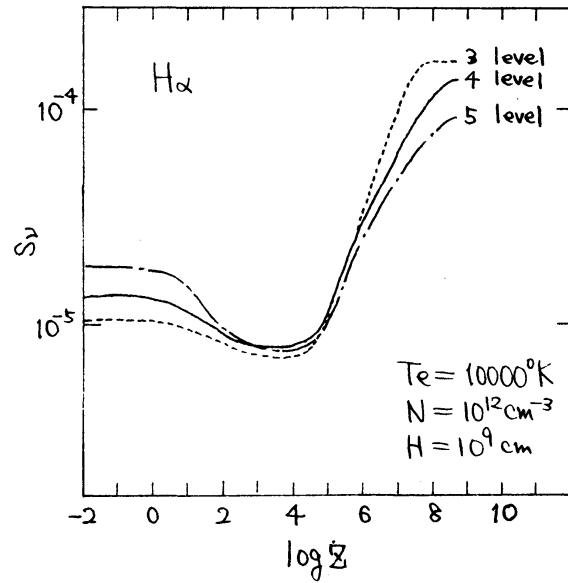


図2. 三,四,五準位を持つ水素原子に対するH α 線の源泉関数

表2. 三,四,五準位を持つ水素原子に対するH α 線の全強度

準位数	$\tau_{H\alpha}$	$I_{H\alpha}$
3	2.4 (3)	7.2 (6)
4	1.1 (3)	5.2 (6)
5	9.2 (2)	3.8 (6)

参考文献

- Dunn, R. B., Evans, J. W., Jefferies, J. T., Orrall, F. O., White, O. R.
and Zirker, J. B. 1968, *Astrophys. J. Suppl.*, 139, 275.
Feautrier, P. 1964, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 258, 3189.
Suemoto, Z. 1963, *Publ. Astr. Soc. Japan*, 15, 531.