

Pointed harmonic volumes of hyperelliptic curves

田所 勇樹

(東京大学大学院数理科学研究科)

Yuuki Tadokoro

(Department of Mathematical Sciences, University of Tokyo)

概要

M. Pulte は, B. Harris の定めた調和体積を用いて, 点付き Riemann 面に対する点付き調和体積を定義した. 超楕円曲線に対する Weierstrass 点を基点とする点付き調和体積 I_ν を完全に決定し, その組み合わせ公式を導出した.

目次

- 1 Introduction
- 2 The pointed harmonic volume
- 3 Hyperelliptic curves
- 4 Pointed harmonic volumes for (C_0, P_ν)
- 5 A combinatorial formula of I_ν

1 Introduction

B. Harris [3] は Chen の反復積分 [2] を用いて, コンパクト Riemann 面 X の調和体積を定義した. その応用例は X の Jacobian 上の代数的サイクル $X - X^-$ が非自明である十分条件を導くものがある. これについては, [4], [6] を参照せよ. 一般的に調和体積を計算することは容易ではない. [5] において, 超楕円曲線の調和体積は決定された. M. Pulte [8] は点付き Riemann 面の点付き調和体積について深く研究した. 今回は, 超楕円曲線の Weierstrass 点を基点とする点付き調和体積 I_ν を計算することが目標である.

2 The pointed harmonic volume

X を種数 $g(\geq 2)$ のコンパクト Riemann 面とする. X 上の 1 形式に対する, X 上の道に沿った Chen [2] の反復積分の定義を復習しよう. ω_1, ω_2 を X 上の 1 形式とし, $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ を X 上の道とする. このとき, ω_1, ω_2 の γ での (長さ 2 の) 反復積分は

$$\int_{\gamma} \omega_1 \omega_2 = \int_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1} f_1(t_1) f_2(t_2) dt_1 dt_2$$

と定義される. ただし, f_1, f_2 は, t を閉区間 $[0, 1]$ の座標としたとき, $\gamma^*(\omega_i) = f_i(t)dt$ を満たす. 端点を固定した際, 反復積分は一般的にホモトピー不変ではない. ホモトピー不変にするために補正項を付け加える.

Lemma 2.1 $\omega_{1,i}, \omega_{2,i}, i = 1, 2, \dots, m$, を X 上の閉 1 形式とし, $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ を X 上の道とする. $\int_X \sum_{i=1}^m \omega_{1,i} \wedge \omega_{2,i} = 0$ を仮定すれば, $d\eta = \sum_{i=1}^m \omega_{1,i} \wedge \omega_{2,i}$ を満たすような X 上の 1 形式 η がとれる.

このとき,

$$\sum_{i=1}^m \int_{\gamma} \omega_{1,i} \omega_{2,i} - \int_{\gamma} \eta$$

は端点を固定してホモトピー不変になる.

Lemma 2.1 を用いて, 点付き調和体積 [8] を定義しよう. X の 1 次元コホモロジー群 $H^1(X; \mathbb{Z})$ とホモロジー群 $H_1(X; \mathbb{Z})$ を Poincaré 双対により同一視し, H と表す. Hodge * 作用素 (ここでは, 複素構造にのみ依存し計量には依存しない) によりこの H は “ X 上の $\mathbb{Z}$ に周期を持つ, 実調和 1 形式全体からなる加群” と同一視できる (Hodge の定理). $(,) : H \otimes H \rightarrow \mathbb{Z}$ を交叉形式とし, $K = \ker(,)$ とおく. p を X 上の点とする. 点付き調和体積 I_p は点付き Riemann 面 (X, p) に対し, 反復積分を用いて以下のように定義される $K \otimes H$ から $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ への準同型である.

Definition 2.2

$$I_p \left(\left(\sum_{i=1}^m a_i \otimes b_i \right) \otimes c \right) = \sum_{i=1}^m \int_{\gamma} a_i b_i - \int_{\gamma} \eta \pmod{\mathbb{Z}}.$$

ここで γ は, $H_1(X; \mathbb{Z}) \ni [\gamma] = (\text{コホモロジー類 } c \text{ の Poincaré 双対})$, となる p を基点とするループである. $\sum_{i=1}^m (a_i, b_i) = 0$ であることから, 以下を満たす X 上の 1-形式 η の存在とその一意性が言える. $d\eta = \sum_{i=1}^m a_i \wedge b_i$ かつ, 任意の X 上の閉 1-形式 α に対して, $\int_X \eta \wedge * \alpha = 0$, を満たす. I_p は γ のとり方に依存しない.

Remark 2.3 Pulte [8] は, 点付き調和体積 I_p を用いて, $\mathbb{Z}\pi_1(X, p)/J^3$ が mixed Hodge structure として同型なら点付き Riemann 面 (X, p) が同型になる, という点付き Torelli の定理を示した. ただし, p は基点であり, J は群環 $\mathbb{Z}\pi_1(X, p)$ の添加イデアルである.

$\{x_i, y_i\}_{i=1, \dots, g}$ を H のシンプレクティック基底, つまり $(x_i, y_j) = \delta_{ij} = -(y_j, x_i)$, $(x_i, x_j) = (y_i, y_j) = 0$ を満たす H の基底, とする. $z_i = x_i$ or y_i , などとおくと K の基底の一つは以下のように表される

$$\left\{ \begin{array}{ll} (1) & z_i \otimes z'_j \quad (i \neq j) \\ (2) & x_i \otimes y_i - x_1 \otimes y_1 \quad (i \neq 1) \\ (3) & x_i \otimes y_i + y_i \otimes x_i \quad (i = 1, 2, \dots, g) \\ (4) & z_i \otimes z_i \quad (i = 1, 2, \dots, g) \end{array} \right\}.$$

$(H^{\otimes 3})'$ を次の自然な準同型の kernel とする

$$H \otimes H \otimes H \ni \omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \omega_3 \mapsto ((\omega_1, \omega_2)\omega_3, (\omega_2, \omega_3)\omega_1, (\omega_3, \omega_1)\omega_2) \in H \oplus H \oplus H.$$

$(H^{\otimes 3})' \subset K \otimes H$ であり, I_p の定義域を $(H^{\otimes 3})'$ に制限すると基点に依存しないことが示せて, それを調和体積と呼ぶ ([3]). 超楕円曲線の調和体積は [5] により調べられている. よって目標は, $K \otimes H$ の基底において $(H^{\otimes 3})'$ の元でないもの, つまり以下の元だけを調べることである

$$\begin{array}{ll} (1a) & z_i \otimes z'_j \otimes z''_i \quad (i \neq j, z_i \neq z''_i), \\ (1b) & z_i \otimes z'_j \otimes z''_i \quad (i \neq j, z'_j \neq z''_j), \\ (2a) & (x_i \otimes y_i - x_1 \otimes y_1) \otimes z''_i \quad (i \neq 1), \\ (2b) & (x_i \otimes y_i - x_1 \otimes y_1) \otimes z''_1 \quad (i \neq 1), \\ (3) & (x_i \otimes y_i + y_i \otimes x_i) \otimes z''_i, \\ (4) & x_i \otimes x_i \otimes y_i, y_i \otimes y_i \otimes x_i. \end{array}$$

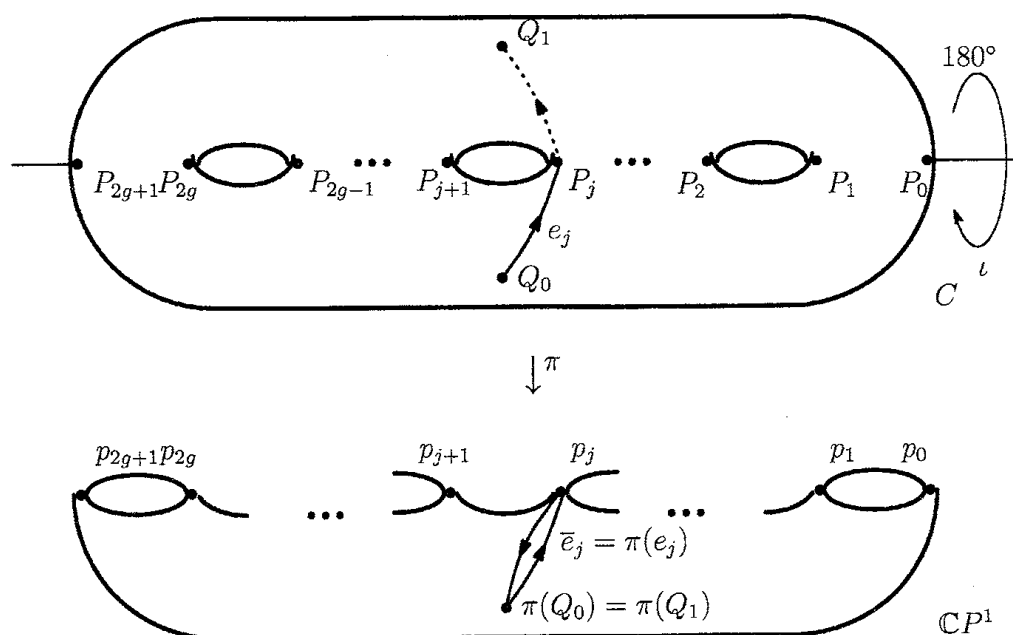
3 Hyperelliptic curves

$\mathbb{C}$ 上の相異なる点 $p_i, i = 0, 1, \dots, 2g+1$ をとる. 超楕円曲線 C は次式で表される代数曲線のコンパクト化で定義する.

$$\left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^2; w^2 = \prod_{i=0}^{2g+1} (z - p_i) \right\}.$$

正則射影を

$$\pi: C \ni (z, w) \mapsto z \in \mathbb{C}P^1$$

図 1: $\pi: C \rightarrow \mathbb{CP}^1$

と定めると, π は $\{p_i\}_{i=0,1,\dots,2g+1}$ を分岐点とする 2 重分岐被覆となる. C 上の分岐点を P_i ($\pi(P_i) = p_i$ を満たす) とおく. また, 超楕円対合として, C 上の正則同型

$$\iota: C \ni (z, w) \mapsto (z, -w) \in C$$

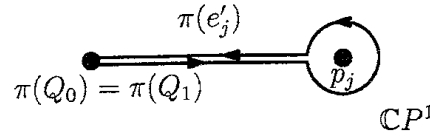
がとれる. 超楕円曲線では, すべての分岐点 P_i は **Weierstrass 点** になり, 分岐点以外に Weierstrass 点がないことが知られている. さらに, 超楕円対合 ι は, H にマイナス倍で作用し, I_{P_i} を保つので, $I_{P_i} = (-1)^3 I_{P_i} \bmod \mathbb{Z}$ から, $I_{P_i} = 0$ or $1/2 \bmod \mathbb{Z}$ がわかる.

C 上の 1 次元ホモロジー群 $H_1(C; \mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底を求める. 図 1 のように, $Q_0, Q_1 = (\iota(Q_0))$ をとり, C 上の道 e_j を, 自己交差を持たない道で Q_0, P_j, Q_1 と順に結ぶものと定める. $e_{j_1} \cdot \iota(e_{j_2})$ は C 上の Q_0 を基点とするループであることがわかる. ただし, $e_{j_1} \cdot \iota(e_{j_2})$ は, e_{j_1} を先に通り, その後 $\iota(e_{j_2})$ を通る道を表すものとする. 基点 Q_0 を固定したホモトピー同値関係

$$e_j \cdot \iota(e_j) \sim 1, \quad j = 0, 1, \dots, 2g+1,$$

と

$$e_0 \cdot \iota(e_1) \cdots e_{2g} \cdot \iota(e_{2g+1}) \sim 1.$$

図 2: $\pi(e'_j)$

を得る. Q_0 を基点とする C 上のループ $a_i, b_i, i = 1, 2, \dots, g$ を

$$\begin{aligned} a_i &= e_{2i-1} \cdot \iota(e_{2i}), \\ b_i &= e_{2i-1} \cdot \iota(e_{2i-2}) \cdots e_1 \cdot \iota(e_0). \end{aligned}$$

と定める. a_i, b_i の定めるホモロジー類をそれぞれ $x_i, y_i \in H_1(C; \mathbb{Z})$ とおく.

Lemma 3.1 $\{x_i, y_i\}_{i=1,2,\dots,g}$ は, $H_1(C; \mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底である.

$H_{\mathbb{Z}_2} := H_1(C; \mathbb{Z}_2)$ について考察する. B を $\{p_i\}_{i=0,1,\dots,2g+1}$ とおく. C 上の道 e_j を P_j の近傍のみを変形し, 以下の条件を満たす道 e'_j を定める. $\pi(e'_j)$ が図 2 のようになり, かつ $\{\pi(e'_j)\}_{j=0,1,\dots,2g}$ が $H_1(\mathbb{CP}^1 \setminus B; \mathbb{Z}_2)$ の基底になる. また, $\sum_{j=0}^{2g+1} \pi(e'_j) = 0$ が成り立つ. $\mathbb{Z}_2$ -係数で考えているため, $e'_j \in H_1(\mathbb{CP}^1 \setminus B; \mathbb{Z}_2)$ はその選び方に依存しない.

線形写像 $v: H_{\mathbb{Z}_2} \rightarrow H_1(\mathbb{CP}^1 \setminus B; \mathbb{Z}_2)$ を $v(x_i \bmod 2) = \pi(e'_{2i-1}) + \pi(e'_{2i})$, $v(y_i \bmod 2) = \pi(e'_0) + \pi(e'_1) + \cdots + \pi(e'_{2i-1})$ と定めるとこれは単射になる. 以下の完全列を得る

$$0 \longrightarrow H_{\mathbb{Z}_2} \xrightarrow{v} H_1(\mathbb{CP}^1 \setminus B; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0.$$

$\varepsilon: H_1(\mathbb{CP}^1 \setminus B; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ は添加写像 $\varepsilon(\pi(e'_i)) = 1$ である. Weierstrass 点 P_ν を固定する. $f_i = \pi(e'_\nu) + \pi(e'_i), i = 0, 1, \dots, 2g+1$ とする. $f_\nu = 0 \in H_1(\mathbb{CP}^1 \setminus B; \mathbb{Z}_2)$ に注意.

$$\begin{cases} x_i = f_{2i-1} + f_{2i}, \\ y_i = f_0 + f_1 + \cdots + f_{2i-1}. \end{cases} \quad (1)$$

と言う $H_{\mathbb{Z}_2}$ における同一視がある. さらに, $f_0 + f_1 + \cdots + f_{2g+1} = 0$ が成立することがわかる.

4 Pointed harmonic volumes for (C_0, P_ν)

超楕円曲線 C_0 は次式で表される代数曲線のコンパクト化で定義する.

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2; w^2 = z^{2g+2} - 1\}.$$

C_0 上の2点, $Q_0 = (0, \sqrt{-1}), Q_1 = (0, -\sqrt{-1}) (= \iota(Q_0))$ をとる. $\zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/(2g+2))$ とし, C_0 上の道 $e_j : [0, 1] \rightarrow C_0, j = 0, 1, \dots, 2g+1$ を次のように定義する.

$$\begin{cases} (2t\zeta^j, \sqrt{-1}\sqrt{1-(2t)^{2g+2}}) & \text{for } 0 \leq t \leq 1/2, \\ ((2-2t)\zeta^j, -\sqrt{-1}\sqrt{1-(2-2t)^{2g+2}}) & \text{for } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

C_0 上の1形式を $\omega_i = z^{i-1}dz/w, i = 1, 2, \dots, g$ と定める. ω_i は, C_0 上で正則であり, $\{\omega_i\}_{i=1,2,\dots,g}$ は C_0 上の正則1-形式からなる $\mathbb{C}$ ベクトル空間の基底になる.

$B(u, v)$ をベータ関数 $\int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}dx$ ($u, v > 0$) とする. ω'_i を, 正則1-形式

$$\frac{(2g+2)\sqrt{-1}}{2B(i/(2g+2), 1/2)}\omega_i$$

と定める. Ω_a, Ω_b を, (i, j) -成分がそれぞれ以下のような行列とする

$$\int_{a_j} \omega'_i \quad \text{and} \quad \int_{b_j} \omega'_i.$$

C_0 上の実調和1-形式 $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2, \dots, g$ を

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_g \end{pmatrix} = \Re \left((\Omega_b)^{-1} \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \vdots \\ \omega'_g \end{pmatrix} \right) \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_g \end{pmatrix} = -\Re \left((\Omega_a)^{-1} \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \vdots \\ \omega'_g \end{pmatrix} \right)$$

と定める. このとき, Poincaré 双対によつて, $\alpha_i \leftrightarrow x_i, \beta_i \leftrightarrow y_i$ と同一視ができることがわかる.

整数 u に対して, $t_u = \sum_{p=1}^g \zeta^{up}$ と定める.

$$t_u = \begin{cases} g & \text{for } u \in (2g+2)\mathbb{Z}, \\ -1 & \text{for } u \notin (2g+2)\mathbb{Z} \text{ and } u : \text{even}, \\ \frac{1+\zeta^u}{1-\zeta^u} & \text{for } u : \text{odd}. \end{cases}$$

が直ちに得られる. [5] の Lemma 3.8 と同じようにして反復積分が計算できる.

Lemma 4.1

$$\begin{aligned}
(1) \quad \int_{a_k} \beta_i \beta_j &= \frac{1}{2(g+1)^2} \left\{ (t_{2k-2j} - t_{2k}) \sum_{u=1}^i t_{2k-2u} + (t_{2k} - t_{2k-2i}) \sum_{u=1}^j t_{2k-2u+2} \right\}, \\
(2) \quad \int_{b_k} \beta_i \beta_j &= 0, \\
(3) \quad \int_{a_k} \alpha_i \alpha_j &= 0, \\
(4) \quad \int_{b_k} \alpha_i \alpha_j &= \frac{1}{2(g+1)^2} \left\{ \sum_{u=1}^k (t_{2u-2j} t_{2u-2i} - 2t_{2u-2j-2} t_{2u-2i} + t_{2u-2j-2} t_{2u-2i-2}) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{v=2}^k 2(t_{2v-2i} - t_{2v-2i-2})(t_{2v-2j-2} - t_{(-2j)}) \right\}, \\
(5) \quad \int_{a_k} \alpha_i \beta_j &= \frac{-1}{2(g+1)^2} t_{2k-2i} (t_{2k-2j} - t_{2k}), \\
(6) \quad \int_{b_k} \alpha_i \beta_j &= \frac{-1}{2(g+1)^2} \sum_{u=1}^k \left\{ (t_{2u-2i-2} - t_{2u-2i}) \sum_{v=1}^j t_{2v+2u-2j-2} \right\}.
\end{aligned}$$

この補題と $\int_{e_j} \eta = 0$ を用いて, Q_0 を基点とする点付き調和体積 I_{Q_0} が計算できる.

Proposition 4.2

(1)	$ \begin{aligned} I_{Q_0}(x_i \otimes x_j \otimes y_i) &= \mu \\ I_{Q_0}(x_i \otimes y_j \otimes y_i) &= \begin{cases} (g-j+1)\mu & i < j \\ (2g-j+2)\mu & i > j \end{cases} \\ I_{Q_0}(y_i \otimes x_j \otimes x_i) &= (2g+1)\mu \\ I_{Q_0}(y_i \otimes y_j \otimes x_i) &= \begin{cases} (g+j+1)\mu & i < j \\ j\mu & i > j \end{cases} \end{aligned} $	$ \begin{aligned} i &\neq j \\ i &< j \\ i &> j \\ i &\neq j \\ i &< j \\ i &> j \end{aligned} $
(2)	$ \begin{aligned} I_{Q_0}((x_i \otimes y_i - x_1 \otimes y_1) \otimes x_i) &= (g+2)\mu \\ I_{Q_0}((x_i \otimes y_i - x_1 \otimes y_1) \otimes y_i) &= (2g-i+2)\mu \\ I_{Q_0}((x_i \otimes y_i - x_1 \otimes y_1) \otimes x_1) &= g\mu \\ I_{Q_0}((x_i \otimes y_i - x_1 \otimes y_1) \otimes y_1) &= (g+2)\mu \end{aligned} $	$ \begin{aligned} i &\neq 1 \\ i &\neq 1 \\ i &\neq 1 \\ i &\neq 1 \end{aligned} $
(3)	$I_{Q_0}((x_i \otimes y_i + y_i \otimes x_i) \otimes z_i'') = 0$	
(4)	$ \begin{aligned} I_{Q_0}(x_i \otimes x_i \otimes y_i) &= 1/2 \\ I_{Q_0}(y_i \otimes y_i \otimes x_i) &= 1/2 \end{aligned} $	

ただし, 数値は $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に値をとり, $\mu = 1/2(g+1)$ である.

$h_1 \otimes h_2 \otimes h_3 \in K \otimes H$ に対して, $\Lambda_\nu(h_1 \otimes h_2 \otimes h_3) = I_\nu(h_1 \otimes h_2 \otimes h_3) - I_{Q_0}(h_1 \otimes h_2 \otimes h_3) \bmod \mathbb{Z}$ と定める. C_0 上の道 $\ell_\nu: [0, 1] \rightarrow C_0$ を $t \mapsto (t\zeta^\nu, \sqrt{-1}\sqrt{1-t^{2g+2}}) \in C_0$ とする. 反復積分の性質から以下が得られる.

Lemma 4.3

$$\Lambda_\nu(h_1 \otimes h_2 \otimes h_3) = (h_1, h_3) \int_{\ell_\nu} h_2 - (h_2, h_3) \int_{\ell_\nu} h_1 \bmod \mathbb{Z}.$$

これを用いて点付き調和体積 I_ν と I_{Q_0} の差 (modulo $\mathbb{Z}$) がわかる.

Lemma 4.4

(1)	$\Lambda_\nu(x_i \otimes x_j \otimes y_i) = \begin{cases} g\mu & i \neq j \\ (2g+1)\mu & i = j \end{cases}$ $\Lambda_\nu(x_i \otimes y_j \otimes y_i) = \begin{cases} j\mu & i \neq j \\ (g+j+1)\mu & i = j \end{cases}$ $\Lambda_\nu(y_i \otimes x_j \otimes x_i) = \begin{cases} (g+2)\mu & i \neq j \\ \mu & i = j \end{cases}$ $\Lambda_\nu(y_i \otimes y_j \otimes x_i) = \begin{cases} (2g-j+2)\mu & i \neq j \\ (g-j+1)\mu & i = j \end{cases}$	$\begin{cases} i \neq j \\ i = j \end{cases}$	$\begin{cases} \nu = 2j-1 \text{ or } 2j \\ \nu \neq 2j-1 \text{ and } 2j \\ \nu > 2j-1 \\ \nu \leq 2j-1 \\ \nu = 2j-1 \text{ or } 2j \\ \nu \neq 2j-1 \text{ and } 2j \\ \nu > 2j-1 \\ \nu \leq 2j-1 \end{cases}$
(2)	$\Lambda_\nu((x_i \otimes y_i - x_1 \otimes y_1) \otimes x_i) = \begin{cases} g\mu & i \neq 1 \\ (2g+1)\mu & i = 1 \end{cases}$ $\Lambda_\nu((x_i \otimes y_i - x_1 \otimes y_1) \otimes y_i) = \begin{cases} i\mu & i \neq 1 \\ (g+i+1)\mu & i = 1 \end{cases}$ $\Lambda_\nu((x_i \otimes y_i - x_1 \otimes y_1) \otimes x_1) = \begin{cases} (g+2)\mu & i \neq 1 \\ \mu & i = 1 \end{cases}$ $\Lambda_\nu((x_i \otimes y_i - x_1 \otimes y_1) \otimes y_1) = \begin{cases} (2g+1)\mu & i \neq 1 \\ g\mu & i = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} i \neq 1 \\ i = 1 \\ i \neq 1 \\ i = 1 \\ i \neq 1 \\ i = 1 \\ i \neq 1 \\ i = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} \nu = 2i-1 \text{ or } 2i \\ \nu \neq 2i-1 \text{ and } 2i \\ \nu > 2i-1 \\ \nu \leq 2i-1 \\ \nu = 1 \text{ or } 2 \\ \nu \neq 1 \text{ and } 2 \\ \nu > 1 \\ \nu \leq 1 \end{cases}$
(3)	$\Lambda_\nu((x_i \otimes y_i + y_i \otimes x_i) \otimes z_i'') = 0$		
(4)	$\Lambda_\nu(x_i \otimes x_i \otimes y_i) = 0$ $\Lambda_\nu(y_i \otimes y_i \otimes x_i) = 0$		

ただし, 数値は $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に値をとる.

Proposition 4.2 と Lemma 4.4 を組み合わせると C_0 の点付き調和体積 I_{P_ν} が得られる.

Proposition 4.5

(1)	$I_{P_\nu}(x_i \otimes x_j \otimes y_i) =$	$\begin{cases} 1/2 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$	$\begin{cases} \nu = 2j - 1 \text{ or } 2j \\ \nu \neq 2j - 1 \text{ and } 2j \end{cases}$
	$I_{P_\nu}(x_i \otimes y_j \otimes y_i) =$	$\begin{cases} 1/2 & i < j \\ 0 & i > j \end{cases}$	$\begin{cases} \nu > 2j - 1 \\ \nu \leq 2j - 1 \end{cases}$
	$I_{P_\nu}(y_i \otimes x_j \otimes x_i) =$	$\begin{cases} 1/2 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$	$\begin{cases} \nu = 2j - 1 \text{ or } 2j \\ \nu \neq 2j - 1 \text{ and } 2j \end{cases}$
	$I_{P_\nu}(y_i \otimes y_j \otimes x_i) =$	$\begin{cases} 1/2 & i < j \\ 0 & i > j \end{cases}$	$\begin{cases} \nu > 2j - 1 \\ \nu \leq 2j - 1 \end{cases}$
	$I_{P_\nu}(x_i \otimes x_j \otimes x_i) =$	$\begin{cases} 1/2 & i < j \\ 0 & i > j \end{cases}$	$\begin{cases} \nu > 2j - 1 \\ \nu \leq 2j - 1 \end{cases}$
	$I_{P_\nu}(y_i \otimes y_j \otimes y_i) =$	$\begin{cases} 1/2 & i < j \\ 0 & i > j \end{cases}$	$\begin{cases} \nu > 2j - 1 \\ \nu \leq 2j - 1 \end{cases}$
(2)	$I_{P_\nu}((x_i \otimes y_i - x_1 \otimes y_1) \otimes x_i) =$	$\begin{cases} 0 & i \neq 1 \\ 1/2 & i = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} \nu = 2i - 1 \text{ or } 2i \\ \nu \neq 2i - 1 \text{ and } 2i \end{cases}$
	$I_{P_\nu}((x_i \otimes y_i - x_1 \otimes y_1) \otimes y_i) =$	$\begin{cases} 0 & i \neq 1 \\ 1/2 & i = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} \nu > 2i - 1 \\ \nu \leq 2i - 1 \end{cases}$
	$I_{P_\nu}((x_i \otimes y_i - x_1 \otimes y_1) \otimes x_1) =$	$\begin{cases} 0 & i \neq 1 \\ 1/2 & i = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} \nu = 1 \text{ or } 2 \\ \nu \neq 1 \text{ and } 2 \end{cases}$
	$I_{P_\nu}((x_i \otimes y_i - x_1 \otimes y_1) \otimes y_1) =$	$\begin{cases} 1/2 & i \neq 1 \\ 0 & i = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} \nu > 1 \\ \nu \leq 1 \end{cases}$
	$I_{P_\nu}((x_i \otimes y_i + y_i \otimes x_i) \otimes z_i'') =$	0	
	$I_{P_\nu}(x_i \otimes x_i \otimes y_i) =$	1/2	
(4)	$I_{P_\nu}(y_i \otimes y_i \otimes x_i) =$	1/2	

Remark 4.6 この結果を一般の超楕円曲線の場合に拡張することができる。

次節では、反復積分を用いなくて、一般の超楕円曲線の Weierstrass 点を基点とする調和体積を求める。

5 A combinatorial formula of I_ν

$I_\nu = I_{P_\nu}$ を求めることができる組み合わせ公式を導出する。 Γ_g を種数 g の閉曲面 Σ_g の写像類群、つまり向きを保つ微分同相写像のイソトピー類全体のなす群、と

する. 超楕円の写像類群 Δ_g を Γ_g の ι による中心化群 $\Delta_g = \{\varphi \in \Gamma_g; \varphi\iota = \iota\varphi\}$, とする. ただし, ι は超楕円対合である. 固定した ν に対して,

$$\Delta_{g,\nu} = \{\varphi \in \Delta_g; \varphi(P_\nu) = P_\nu\} \subset \Delta_g$$

と定める. S_{2g+1} を $(2g+1)$ 次対称群とする. 自然な射影 $\Delta_{g,\nu} \rightarrow S_{2g+1}$ を用いて, $\mathbb{Z}_2\Delta_{g,\nu}$ -加群 $H_{\mathbb{Z}_2}$ は $\mathbb{Z}_2S_{2g+1}$ -加群とみなすことができる (Arnol'd [1]). [5], [7] により, 以下を得る.

Proposition 5.1

$$I_\nu \in \text{Hom}_{\Delta_{g,\nu}}(K \otimes H, \mathbb{Z}_2) = \text{Hom}_{S_{2g+1}}((H_{\mathbb{Z}_2})^{\otimes 3}, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2.$$

さらに, $\text{Hom}_{S_{2g+1}}((H_{\mathbb{Z}_2})^{\otimes 3}, \mathbb{Z}_2)$ の非自明な元 ψ は,

$$\psi(f_i \otimes f_j \otimes f_k) = \begin{cases} 1 & \text{for } \#\{i, j, k\} = 2, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

を満たす S_{2g+1} -準同型 $(H_{\mathbb{Z}_2})^{\otimes 3} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ である.

これを利用して, 組み合わせ公式を作る. $K \otimes H$ の任意の元 A に対して, 同一視 (1) を用いて, $A = \sum_{p,q,r \neq \nu} A_{p,q,r} f_p \otimes f_q \otimes f_r$ と表すことにする. ただし, $A_{p,q,r} \in \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ である. 数え上げ関数 $\kappa: K \otimes H \rightarrow \mathbb{Z}_2$ を

$$\kappa(A) = \#\{(p, q, r); A_{p,q,r} = 1, \#\{p, q, r\} = 2\} \bmod 2$$

と定める. このとき, 以下が成立する.

Theorem 5.2 (組み合わせ公式)

$$I_\nu(A) = \begin{cases} 1/2 \bmod \mathbb{Z} & \text{if } \kappa(A) = 1, \\ 0 \bmod \mathbb{Z} & \text{if } \kappa(A) = 0. \end{cases}$$

参考文献

- [1] Arnol'd, V. I.: *A remark on the branching of hyperelliptic integrals as functions of the parameters*. Funkcional. Anal. i Priložen. 2 1968 no. 3, 1–3.
- [2] Chen, Kuo Tsai: *Iterated integrals, fundamental groups and covering spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. 206 (1975), 83–98.

- [3] Harris, Bruno: *Harmonic volumes*. Acta Math. 150 (1983), no. 1-2, 91–123.
- [4] Harris, Bruno: *Homological versus algebraic equivalence in a Jacobian*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 80 (1983), no. 4 i., 1157–1158.
- [5] Tadokoro, Yuuki: *The Harmonic Volumes of Hyperelliptic Curves*, to appear in Publ. Res. Inst. Math. Sci.
- [6] Tadokoro, Yuuki: *A nontrivial algebraic cycle in the Jacobian variety of the Klein quartic*, Preprint.
- [7] Tadokoro, Yuuki: *The pointed harmonic volumes of hyperelliptic curves with Weierstrass base points*, Preprint.
- [8] Pulte, Michael J.: *The fundamental group of a Riemann surface: mixed Hodge structures and algebraic cycles*. Duke Math. J. 57 (1988), no. 3, 721–760.