

一般型曲面の変形と退化の例

東北大・理 今野 一宏 (Kazuhiro Konno)

0. 序

S を複素数体 $\mathbb{C}$ 上定義された極小な一般型代数曲面とし $p_g(S)$, $q(S)$, $c_1^2(S)$ によって各々 S の幾何種数、不正則数、チャーン数を表す。

この時、よく知られた Noether 及び 宮岡 の不等式より (p_g, c_1^2) の存在可能領域は $\{(p_g, c_1^2) ; 2p_g - 4 \leq c_1^2 \leq 9p_g + 9, p_g \geq 0, c_1^2 > 0\}$ である。逆に、この領域内の格子点 (x, y) を勝手に与えたとき、 $p_g(S) = x$, $c_1^2(S) = y$ となるような S が存在するか？というのが所謂 "geography" の問題である。これについて、Persson, Xiao たちは超楕円曲線の pencil を持つ曲面を多数構成することにより解決を試みている。しかし、不変量を固定したときの曲面の構造の分類、或は変形型の決定といった本来は一般型曲面論の核となるべき問題は、その難しさ故に堀川の一連の研究以来さして進歩していないように見うけられる。

残念ながら、ここでもこういった問題を正面から考えるわけではないが、上述の様な現状を考えると比較的手がかりの多いものをより詳しく調べておく事は重要であると思われる。そこで一般型曲面のうちでも構造が知られている種数 2 の曲線の pencil を持つ曲面（ここでは種数 2 の超楕円曲面と呼ぶ）を題材にして、さまざまな不変量を持つものを構成し、その変形および穏やかな退化を調べて見る。目標は、同じ不変量を持つものどうしは変形でつながり、異なる不変量をもつものは Type I 退化でつなげる、という事である。すなわち、『種数 2 の曲線たちが変形でつながっている』事実の 2 次元版はどうなるのかを考えたい。実際、 $2p_g - 4 \leq c_1^2 \leq 4p_g - 2$ の範囲で、変形および p_g を不変にする退化でつながる曲面の系列を与える事は出来る。

しかし、この最も簡単と思える種数2の超楕円曲面でさえも変形型を完全に決定するのは難しく、解答には程遠い。

最後の節では種数3の非超楕円曲線の pencil を持つ曲面が種数3の超楕円曲面に変形、退化する例を与える。

1. 曲面の構成

種数2の超楕円曲面の一般論は堀川 [H3] によって整備された。このような曲面は曲線上の射影直線束の二重被覆と双有理になり、その branch locus の特異点は初等変換によって (0) , (I_k) , (II_k) , (III_k) , (IV_k) , (V) 型の六種類に標準化される。この内 (0) 型とは通常二重あるいは三重点の事で、曲面の不変量に影響を及ぼさない。最近、 (0) 型以外の他の型のものは、少なくとも局所的には、全て (I_1) 型の特殊化として得られる事が堀川により示された [H5]。従って“一般の”種数2の超楕円曲面とは (I_1) 型のみを持つものと言っても差し支えない。そういうわけで、ここでは (I_1) 型のみを持つ曲面だけを考える事にする。また、以下 $q(S) = 0$ を仮定する。

記号 : Σ_d で d 次 Hirzebruch 曲面を表す。 $\pi : \Sigma_d \rightarrow \mathbb{P}^1$ を自然な射影とした時、 Γ でファイバーを Δ_0 で minimal section を表す。また、しばしば Δ_∞ によりトートロジカル因子を表す。

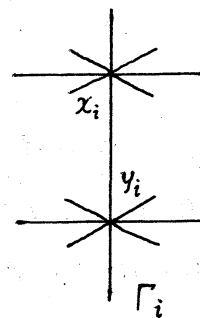
自然数 p_g を固定し

$$(1) \quad 0 \leq d \leq p_g, \quad d \equiv p_g \pmod{2}$$

を満たす d をとり、 $W = \Sigma_d$ とおく。非負整数 k に対して W 上の因子

$$(2) \quad B \sim 6\Delta_0 + (p_g + 3d + 2 + 2k)\Gamma$$

が次の条件を満足すると仮定する。



(★) B は異なる k 本のファイバー $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ を含み、その特異点は $2k$ 個の通常四重点のみで、それらは各 Γ_i 上に二点ずつ分布している。

$B_0 = B - \sum_{i=1}^k \Gamma_i$ とおき、 Γ_i 上にある B の二つの四重点を x_i, y_i と記す。

$q: \bar{W} \rightarrow W$ を $2k$ 個の点 $\{x_i, y_i\}, 1 \leq i \leq k$, を中心とする二次変換とし

$E_{x_i} = q^{-1}(x_i), E_{y_i} = q^{-1}(y_i)$ とおく。また、 $\bar{D}$ で W 上の因子 D の proper

transformを表す。この記号下で $\bar{B} \cdot \bar{\Gamma}_i = -2$ だから $\sum_{i=1}^k \bar{\Gamma}_i$ は一次系 $|\bar{B}|$ の固定成分になり $|\bar{B}| = |\bar{B}_0| + \sum \bar{\Gamma}_i$ 。ここに

$$(3) \quad \bar{B}_0 \sim 6q^* \Delta_0 + (p_g + 3d + 2 + k)q^* \Gamma - 3 \sum_{i=1}^k (E_{x_i} + E_{y_i})$$

仮定(*)より $\bar{B}_0$ は(必ずしも既約でない)非特異曲線であり、 $\bar{B}_0 \cdot \bar{\Gamma}_i = 0$ だ

から $\bar{B}$ は非特異になっている。そこで $\bar{B}$ で分岐する $\bar{W}$ の二重分岐被覆

$\bar{h}: \bar{S} \rightarrow \bar{W}$ をとる。 $\bar{\Gamma}_i$ は branch locus $\bar{B}$ に属する (-2) 曲線だから、

$\bar{h}^* \bar{\Gamma}_i = 2E_i, E_i$ は (-1) 曲線、と書ける。また

$$(4) \quad K_{\bar{S}} \sim \bar{h}^*(q^* \Delta_0 + ((p_g + d)/2 - 1 + k)q^* \Gamma - \sum (E_{x_i} + E_{y_i})) \\ \sim \bar{h}^* q^* (\Delta_0 + ((p_g + d)/2 - 1)\Gamma) + 2 \sum_{i=1}^k E_i$$

なので簡単な計算から、 $\bar{S}$ の不変量は $p_g(\bar{S}) = p_g, q(\bar{S}) = 0, c_1^2(\bar{S}) = 2p_g - 4$ を満たすことが解る。 k 個の (-1) 曲線 $E_1, \dots, E_k$ の縮約を $\mu: \bar{S} \rightarrow S$ とすれば、 S の不変量は

$$(5) \quad p_g(S) = p_g, \quad q(S) = 0, \quad c_1^2(S) = 2p_g - 4 + k$$

であり更に $c_1^2(S) > 0$ ならば極小な一般型曲面である。また、写像 $\pi \circ q \circ \bar{h}$ は写像 $g: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ を誘導し、 S は種数 2 の超楕円曲面である。

注意: $p_g \geq 3$ なる時には標準一次系 $|K_S|$ は固定部分としては k 個の基点

$b_i = \mu(E_i)$, $1 \leq i \leq k$, のみを持つ。また、 S の標準像は

- 1) $d \leq p_g - 4$ ならば Δ_d と同型。
- 2) $d = p_g - 2$ ならば有理曲線上の錐体。
- 3) $d = p_g$ ならば有理曲線。

尚、 $d = p_g + 2$ として同様の構成を行うと $q(S) = 1$ となる。

次に条件 (★) を満たす B の例を与える。

例 1. $C \sim 2\Delta_0 + 2\Gamma$ なる非特異曲線を取り、 $\Gamma_i \cap C = \{x_i, y_i\}$ と考えて二次変換 $q: \bar{W} \rightarrow W$ をとる。この時、(3)より

$$\begin{aligned}\bar{B}_0 &\sim 3\bar{C} + (p_g - 3d + 2 + k)q^*\Gamma \\ &\sim 6q^*\Delta_0 + 3\Sigma \bar{\Gamma}_i + (p_g + 3d + 2 - 2k)q^*\Gamma\end{aligned}$$

と書ける。従って、もし

$$(6) \quad p_g + 2 + k \geq 3d, \quad p_g + 3d + 2 \geq 2k$$

が満たされれば、上の二つの表示において $q^*\Gamma$ の係数は非負であり、かつ $\bar{C} \cap q^*\Delta_0 \cap (\Sigma \bar{\Gamma}_i) = \emptyset$ なので一次系 $|\bar{B}_0|$ は固定成分も基点も持たないから Bertini の定理より非特異な member $\bar{B}_0$ が取れる。求める B を得るには $B = q_*\bar{B}_0 + \Sigma \Gamma_i$ とすればよい。

例 2. $\varphi \in H^0(\Sigma_d, \mathcal{O}(2\Delta_0 + m\Gamma))$ は Σ_d のファイバー座標 (X_0, X_1) を用いて

$$\varphi = \varphi_m X_0^2 + \varphi_{m-d} X_0 X_1 + \varphi_{m-2d} X_1^2, \quad \varphi_j \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(j))$$

と書けるが、このうち $\varphi_{m-d} = 0$ となっているような φ が定める因子全体を $|2\Delta_0 + m\Gamma|_P$ と書く。これは $\Delta_0 + \Delta_\infty \subset \Sigma_{2d}$ で分岐する二重被覆 $\Sigma_d \rightarrow \Sigma_{2d}$ による Σ_{2d} 上の一次系 $|2\Delta_0 + m\Gamma|$ の引き戻しに他ならない。

m, n を $2d \leq m \leq n$ なる自然数とし、 $C \in |2\Delta_0 + m\Gamma|_P$ および $D \in$

$|2\Delta_0 + n\Gamma|_P$ を一般にとると、これらは非特異既約で $C \cdot D = 2(m + n - 2d)$ 個の相異なる点で横断的に交わる。しかもこれら交点は $k := m + n - 2d$ 本のファイバー $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ の各々に二点ずつのっている。各 Γ_i 上の交点を x_i, y_i とすれば、同様に

$$\begin{aligned}\bar{B}_0 &\sim 3\bar{C} + (p_g + 3d + 2 + k - 3m)q^*\Gamma \\ &\sim 3\bar{D} + (p_g + 3d + 2 + k - 3n)q^*\Gamma\end{aligned}$$

となるので、 $\bar{C} \cap \bar{D} = \emptyset$ なることから、もし

$$(7) \quad p_g + d + 2 + m \geq 2n$$

ならば $|\bar{B}_0|$ は固定成分も基点ももたない。従って非特異な $\bar{B}_0$ がとれて $B = q_*\bar{B}_0 + \sum \Gamma_i$ は条件(★)を満たす。

例3. 例2の状況で $n = p_g + d + 2$ とおく。このとき、 $\bar{C}$ は $|\bar{B}_0|$ の固定成分になる。そこで

$$\bar{B}_1 = \bar{B}_0 - \bar{C} \sim 4q^*\Delta_0 + (p_g + 3d + 2 + k - m)q^*\Gamma - 2\sum(E_{x_i} + E_{y_i})$$

とおくと $\bar{B}_1 \cdot \bar{C} = 0$ だから $|\bar{B}_1|$ が固定成分も基点も持たない事を見れば $B = q_*\bar{B}_1 + C + \sum \Gamma_i$ は条件(★)を満たす。これは次の表示より従う。

$$B_1 \sim 2\bar{C} + 2(n - m)q^*\Gamma \sim 2\bar{D}$$

以上の例によって、 $2p_g - 4 \leq c_1^2 \leq 4p_g$ の範囲で不正則数0、種数2の超楕円曲面が構成出来た。 $c_1^2 > 4p_g$ の例が作りにくいのは、次の事実に由来するものと思われる。

$$(\bar{B}_0)^2 \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0 \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad k \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 2p_g + 4 \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad c_1^2 \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 4p_g$$

2. Type I 退化

この節の目的は次のような曲面の準安定退化族 $p: \mathcal{J} \longrightarrow \Delta_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}; |z| < \varepsilon\}$ を構成する事にある。

1) 一般ファイバー $\mathcal{J}_t$, $t \neq 0$, は前節で構成した型の曲面。

2) 特異ファイバー $\mathcal{J}_0$ は二つの成分 $V_1, V_2 = \mathbb{P}^2$ から成りその交わり $V_1 \cap V_2$ は非特異有理曲線 (conic in $V_2 = \mathbb{P}^2$) であって、 V_1 は

$$p_g(V_1) = p_g(\mathcal{J}_t), \quad c_1^2(V_1) = c_1^2(\mathcal{J}_t) - 1 \quad (t \neq 0)$$

を満たす極小な種数2の超楕円曲面。

性質2)からこの様な退化は所謂Type I 退化 (モノドロミーが $H^2(\mathbb{Z})$ に自明に作用する退化) である事が解る。例えば、K3曲面のType I 退化においては特異ファイバーはまたK3曲面になる。従って、上の様な現象は一般型曲面の複雑さを表していると言える。また、Type I 退化の特異ファイバーは周期写像を固有射に拡張する際に真っ先に付け加えるべき点に対応している事にも注意しておく。更にもう一言付け加えれば、上の族を $\Delta_\varepsilon - \{0\}$ に制限したものは (本質的には) 可微分的に自明であるが、複素解析的には S_0 を非特異にとることは出来ない ([F] 参照)。従って、上記の様な退化は変形と比べてもさほど悪くはない。

記号: $k > 0$ とし前節の手続きで $\bar{W}$ を作り、次の様に記号を定める。

$$\mathcal{W} = \bar{W} \times \Delta_\varepsilon, \quad \mathcal{J} = \bar{\Gamma}_k \times \Delta_\varepsilon, \quad C = \bar{\Gamma}_k \times \{0\},$$

$$\bar{B}_{(k)} \sim 6q^* \Delta_0 + (p_g + 3d + 2 + 2k)q^* \bar{\Gamma} - 4 \sum_{i=1}^k (E_{x_i} + E_{y_i})$$

$$\bar{B}_{(k-1)} \sim 6q^* \Delta_0 + (p_g + 3d + 2k)q^* \bar{\Gamma} - 4 \sum_{i=1}^{k-1} (E_{x_i} + E_{y_i}) - 2(E_{x_k} + E_{y_k})$$

$$\mathcal{B} = \{\bar{B}_t = t\bar{B}_{(k)} + (\bar{B}_{(k-1)} + 2\bar{\Gamma}_k); t \in \Delta_\varepsilon\}$$

仮定(☆): $\bar{B}_{(k-1)} - \sum_{i=1}^{k-1} \bar{\Gamma}_i$ は非特異であり、 $\bar{B}_{(k)}$ は十分一般で $t \neq 0$ に対

して $\bar{B}_t - \sum_{i=1}^k \bar{\Gamma}_i$ は非特異である。

$\bar{\Gamma}_k$ は $\bar{W}$ 上の (-2) 曲線なので、 C の $\mathcal{W}$ における法束は $0_C \oplus 0_C(-2)$ となるから $\tilde{\mathcal{W}}$ で C を中心とした $\mathcal{W}$ のブローアップとすれば、その例外因子 W_2 は Σ_2 と同型になる：

$$\tilde{\mathcal{W}}_0 = W_1 \cup W_2, \quad W_1 = \bar{W}, \quad W_2 = \Sigma_2; \quad \tilde{\mathcal{W}}_t = \bar{W} \quad \text{for } t \neq 0.$$

$C_1 = W_1 \cap W_2$ とおくと、 $(C_1)^2 = -2$ in W_1 故 $(C_1)^2 = 2$ in W_2 である。

また、 $\tilde{\mathcal{F}}$ を $\mathcal{F}$ の proper transform とし $C_2 = \tilde{\mathcal{F}} \cap W_2$ とおくと C_2 は W_2 の切断で C_1 とは交わらないから $C_2 = \Delta_0$ in $W_2 = \Sigma_2$ となっている。

$\tilde{\mathcal{B}}$ を $\mathcal{B}$ の proper transform とすれば

$$\tilde{\mathcal{B}} \cap W_1 = \bar{B}_{(k-1)}, \quad \tilde{\mathcal{B}} \cap W_2 = C_2 + C_3$$

ここで $\bar{B}_{(k-1)} \cdot \bar{\Gamma}_k = 2$ なので、 $C_1 \cdot C_3 = 2$ in W_2 であり、 $C_3 \cdot \Gamma = 1$ in W_2 だから C_3 は $W_2 = \Sigma_2$ でみると $C_3 \in |C_1| = |\Delta_0 + \mathcal{F}|$ である。

さて、 $\tilde{\mathcal{B}}$ で分岐する $\tilde{\mathcal{W}}$ の二重被覆を $\tilde{\mathcal{F}}$ とおくと、

- $\tilde{\mathcal{F}}_t$ ($t \neq 0$) は $c_1^2 = 2p_g - 4 + k$ なる曲面の k 点ブローアップ
(前節の $\bar{S}$ に対応)

- $\tilde{\mathcal{F}}_0$ は二つの成分 $\bar{V}_1, \bar{V}_2$ から成り、

$\bar{V}_1$ は $\bar{B}_{(k-1)}$ で分岐する $W_1 = \bar{W}$ の二重被覆、

$\bar{V}_2$ は $C_2 + C_3$ で分岐する $W_2 = \Sigma_2$ の二重被覆 $= \Sigma_1$

ここで、 C_1 の引き戻し C_1' は $\bar{V}_2$ では bisection に見えている事に注意する。

$\tilde{\mathcal{F}}$ は $\tilde{\mathcal{F}}_t$ ($t \neq 0$) 上に (-1) 曲線を誘導し、これは $t \rightarrow 0$ とすると $\bar{V}_2$ の minimal section Δ_0 になる。これを縮約し、更に $\bar{\Gamma}_1, \dots, \bar{\Gamma}_{k-1}$ より

誘導される (-1) 曲線たちを縮約する事によって求める退化族 $p: \mathcal{J} \rightarrow \Delta_\varepsilon$ が得られる。これが本節冒頭に挙げた性質 1), 2) を満たす事は容易に確かめられる。

残る問題は仮定 (☆) を満たす $\bar{B}_{(k)}$, $\bar{B}_{(k-1)}$ の存在であるが、 $\bar{B}_{(k)}$ に関しては前節の例と同様の考察をすれば良く、 $\bar{B}_{(k-1)}$ に対しても $|\bar{B}_{(k-1)} - \sum_{i=1}^{k-1} \bar{\Gamma}_i|$ が一次系

$$|6q^* \Delta_0 + (p_g + 3d + k + 1)q^* \bar{\Gamma} - 3 \sum_{i=1}^k (E_{x_i} + E_{y_i})|$$

を含む事を利用して同様の事をすれば良い。例えば、前節例 1 のような場合には次の条件が満たされれば、 $|\bar{B}_{(k-1)} - \sum_{i=1}^{k-1} \bar{\Gamma}_i|$ は固定成分も基点も持たない。

$$(6)' \quad p_g + 1 + k \geq 3d, \quad p_g + 3d + 2 \geq 2k$$

この様にして、 $2p_g - 4 \leq c_1^2 \leq 4p_g - 2$ の範囲で p_g が一定で c_1^2 が一つずつ下がって行く Type I 退化の具体例を構成出来る。但し、例えば $d = p_g$ と固定したまま Noether line $c_1^2 = 2p_g - 4$ まで行けるわけではない。

[H4, III, Theorem 1.1] の証明より、 d は (1) の他に更に

$$(8) \quad d \leq \max\{(3p_g - c_1^2 - 2)/2, (c_1^2 - p_g + 6)/3\}$$

をも満たす必要があるからである。従って、この様な場合には途中で曲面を d が減る方向へ変形しなくてはならない。

注意： この節のような Type I 退化は、最初 Friedman[F] が数値的 5 次曲面で発見したが、最近、臼井[U]によって Todorov 曲面や Noether-Horikawa lines 上の曲面においても考察されている。

3. 変形

この節では、堀川[H2]を参考にして第一節で構成した曲面の変形を調べ

る。複素多様体の間の正則写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して $\mathcal{I}_{X/Y}$ で自然な写像 $\theta_X \rightarrow f^* \theta_Y$ の余核を表す。特に f が埋め込みの時にはこれは法束なので、 $N_{X/Y}$ 或は単に N_X と書く。

Lemma 3.1. ([H2, Lemma12]) $\mathcal{I}_{\bar{W}/W} \simeq \bigoplus_{i=1}^k (O_{E_{X_i}}(1) \oplus O_{E_{Y_i}}(1))$

従って特に $h^0(\bar{W}, \mathcal{I}_{\bar{W}/W}) = 4k$, $h^p(\bar{W}, \mathcal{I}_{\bar{W}/W}) = 0$ ($p > 0$)

Lemma 3.2. ([H2, Lemma13])

$$h^0(\bar{S}, \bar{h}^* \mathcal{I}_{\bar{W}/W}) = 4k, \quad h^p(\bar{S}, \bar{h}^* \mathcal{I}_{\bar{W}/W}) = 0 \quad (p > 0)$$

Lemma 3.3. ([H2, Lemma10]) 次の自然な同型がある。

$$b: \mathcal{I}_{\bar{S}/\bar{W}} \xrightarrow{\sim} \bar{h}^* N_{\bar{B}} = \bar{h}^* (N_{\bar{B}_0} \oplus \bigoplus_{i=1}^k N_{\Gamma_i})$$

特に、 $H^0(\bar{S}, \mathcal{I}_{\bar{S}/\bar{W}}) \simeq H^0(\bar{B}_0, N_{\bar{B}_0})$, $H^2(\bar{S}, \mathcal{I}_{\bar{S}/\bar{W}}) = 0$

以下、簡単のため $\bar{B}_0$ が既約と仮定して話を進める。この時、リーマン・ロッホの定理より、 $\chi(N_{\bar{B}_0}) = 7p_g + 20 - 5k$ となる。層の完全系列

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{\bar{S}/\bar{W}} \rightarrow \mathcal{I}_{\bar{S}/W} \rightarrow \bar{h}^* \mathcal{I}_{\bar{W}/W} \rightarrow 0$$

より次のコホモロジー完全系列を得る。

$$(9) \quad H^0(\bar{h}^* \mathcal{I}_{\bar{W}/W}) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathcal{I}_{\bar{S}/\bar{W}}) \rightarrow H^1(\mathcal{I}_{\bar{S}/W}) \rightarrow 0$$

この時、次が成立する。

Proposition 3.4. $k < 2p_g + 16$ ならば、 δ は全射である。

これを認めて話を進める。 $f = q \circ \bar{h}$ とおく。

$$0 \rightarrow \Theta_{\bar{S}} \rightarrow f^* \Theta_W \rightarrow \mathcal{J}_{\bar{S}/W} \rightarrow 0$$

から生じるコホモロジーの完全系列より $H^2(\Theta_{\bar{S}}) \rightarrow H^2(f^* \Theta_W)$ である。一方

$$0 \rightarrow O(f^*(\mathcal{A}_0 + d\Gamma)) \rightarrow f^* \Theta_W \rightarrow O(2f^*\Gamma) \rightarrow 0$$

を利用して $h^2(f^* \Theta_W)$ を計算すると

$$h^2(\bar{S}, f^* \Theta_W) = \begin{cases} p_g - 4 & \text{if } d \leq p_g - 4 \\ (p_g - 3)^+ & \text{if } d = p_g - 2 \\ (p_g - 2)^+ & \text{if } d = p_g \end{cases}$$

但し、整数 m に対して $m^+ = \max(m, 0)$ とおいた。さらに完全系列

$$0 \rightarrow \Theta_{\bar{S}} \rightarrow \mu^* \Theta_S \rightarrow \bigoplus_{i=1}^k O_{E_i}(1) \rightarrow 0$$

より、 $H^2(\bar{S}, \Theta_{\bar{S}}) \simeq H^2(\bar{S}, \mu^* \Theta_S) \simeq H^2(S, \Theta_S)$ を得る。また、 $g: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ に対しては $H^1(S, g^* \Theta_{\mathbb{P}^1}) \simeq H^1(\bar{S}, O(2f^*\Gamma))$ なので

$$h^1(S, g^* \Theta_{\mathbb{P}^1}) = \begin{cases} 0 & \text{if } d \leq p_g - 4 \\ 1 & \text{if } d = p_g - 2 \\ 2 + (2 - p_g) & \text{if } d = p_g \end{cases}$$

なる事が解る。以上の事と堀川の正則写像の変形理論 [H1]より、[H2]と同様に次の事が示される。

Theorem 3.5. $\bar{B}_0$ が既約で $c_1^2(S) < 4p_g + 12$ とすると

- 1) S は Σ_d の次数 d を減らす方向に変形出来る。
- 2) 更に、 $d \leq p_g - 4$ ならば S の倉西空間は非特異でその次元は

$$h^1(S, \Theta_S) = 7p_g + 14 - 2k$$

に等しい。また、 S の持つ種数 2 の曲線の pencil は微小変形に対して安定である。

注意：堀川は [H2], [H3, III], [H3, IV] において標準束が豊富な障害曲面の例を与えている。それは、 $(p_g, c_1^2) = (4, 5), (4, 6), (5, 8)$ のものである。筆者の知る限りではこう言った例は珍しい。 $d = p_g - 2$ の場合には同様になるものと予想される。実際、 $p_g = 4, 5$ で $d = p_g - 2$ の時は堀川と同じ方針で第一節の例で構成したものが障害曲面になっている事が確認されている。従って、

$$p_g = 4, 5 \leq c_1^2 \leq 16; \quad p_g = 5, 8 \leq c_1^2 \leq 20$$

なる障害曲面で標準束が豊富であるものが存在する。

Proposition 3.4 の証明：簡単な計算から

$$(10) \quad (\bar{B}_0)^2 = 6(2p_g + 4 - k), \quad g(\bar{B}_0) = 5p_g + 5 - k$$

完全系列 (9) と Lemmas 3.1, 3.2 より、

$$\delta^- : \bigoplus_{i=1}^k (H^0(E_{x_i}, \mathcal{O}(1)) \oplus H^0(E_{y_i}, \mathcal{O}(1))) \longrightarrow H^1(N_{\bar{B}_0}) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^k H^1(N_{\bar{\Gamma}_i}) \right)$$

の全射性を示せば良い。これは次のように分解される。

$$(11) \quad H^0(\mathcal{J}_{\bar{W}/W}) \longrightarrow H^0(\mathcal{J}_{\bar{W}/W|_{\bar{B}}}) \xrightarrow{\nu} H^1(N_{\bar{B}})$$

ここに最初の写像は制限写像で、二番目のものは完全系列

$$(12) \quad 0 \longrightarrow N_{\bar{B}} \longrightarrow \mathcal{J}_{\bar{B}/W} \longrightarrow \mathcal{J}_{\bar{W}/W|_{\bar{B}}} \longrightarrow 0$$

から生じるコホモロジー完全系列のコバウンダリー写像に他ならない。

Claim 1: $\deg(\mathcal{J}_{\bar{B}_0/W}) = 12p_g + 24$, $\deg(\mathcal{J}_{\bar{\Gamma}_i/W}) = 0$. 特に

$H^1(\bar{B}, \mathcal{J}_{\bar{B}/W}) = 0$ 故 (11) の ν は全射である。

証明： $\bar{B}_0$ (resp. $\bar{\Gamma}_i$) と E_{x_i}, E_{y_i} は各々 3点 (resp. 1点) で交わるから

例えば、 $E_{x_i} \cap \bar{B}_0 = \{P_{i1}, P_{i2}, P_{i3}\}$, $E_{y_i} \cap \bar{B}_0 = \{P_{i4}, P_{i5}, P_{i6}\}$,

$$E_{x_i} \cap \bar{\Gamma}_i = \{P_{i7}\}, \quad E_{y_i} \cap \bar{\Gamma}_i = \{P_{i8}\}$$

と書いておくと Lemma 3.1 より $\mathcal{I}_{\bar{W}/W}|_{\bar{B}} = \bigoplus_{i,j} \mathbb{C}_{P_{ij}}$ となる。(12) の

$\bar{B}$ を $\bar{B}_0$ で置き換えたものを考えれば、 $\deg(\mathcal{I}_{\bar{B}_0/W}) = \deg(N_{\bar{B}_0}) + 6k$ である

から (10) より前半が従う。 $\bar{\Gamma}_i$ の方も同様である。また、(10) より

$$2g(\bar{B}_0) - 2 - \deg(\mathcal{I}_{\bar{B}_0/W}) < 0$$

であるから後半の主張も正しい。■

従って $H^0(\mathcal{I}_{\bar{W}/W}|_{\bar{B}})$ が $H^0(\mathcal{I}_{\bar{B}/W})$ の像と $H^0(\mathcal{I}_{\bar{W}/W})$ の像で生成される事をみれば十分。各 $\bar{\Gamma}_i$ および $\bar{B}_0$ に対して次の図式を考える。

$$(13) \quad 0 \rightarrow H^0(\mathcal{I}_{\bar{\Gamma}_i/W}) \rightarrow \mathbb{C}_{P_{i7}} \oplus \mathbb{C}_{P_{i8}} \rightarrow H^1(N_{\bar{\Gamma}_i}) \rightarrow 0$$

$$\quad \quad \quad \uparrow$$

$$\quad \quad \quad H^0(E_{x_i}, \mathcal{O}(1)) \oplus H^0(E_{y_i}, \mathcal{O}(1))$$

$$(14) \quad 0 \rightarrow H^0(N_{\bar{B}_0}) \rightarrow H^0(\mathcal{I}_{\bar{B}_0/W}) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^k \bigoplus_{j=1}^6 \mathbb{C}_{P_{ij}} \rightarrow H^1(N_{\bar{B}_0}) \rightarrow 0$$

$$\quad \quad \quad \uparrow$$

$$\quad \quad \quad \bigoplus_{i=1}^k (H^0(E_{x_i}, \mathcal{O}(1)) \oplus H^0(E_{y_i}, \mathcal{O}(1)))$$

まず、(13) より $H^0(\mathcal{I}_{\bar{W}/W})$ の $4k$ 次元分のうち k 次元分を $\bigoplus (\mathbb{C}_{P_{i7}} \oplus \mathbb{C}_{P_{i8}})$ に提供すればよいことが解る。残りの $3k$ 次元分は $\bar{B}_0$ のほうに使える。

Claim 2: もし、 $k < 2p_g + 16$ ならば、任意の $3k$ 個の点 $Q_1, \dots, Q_{3k}$ に対して

制限写像 $H^0(\bar{B}_0, \mathcal{I}_{\bar{B}_0/W}) \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{3k} \mathbb{C}_{Q_j}$ は全射である。

証明: $H^1(\mathcal{I}_{\bar{B}_0/W}(-\sum Q_j)) = 0$ を示せば良いが、

$$2g(\bar{B}_0) - 2 - \deg(\mathcal{I}_{\bar{B}_0/W}(-\sum Q_j)) = k - 2(p_g + 8) < 0$$

となり満たされる。■

従って、(14)を考えれば主張が示されたことになる。 ■

以上、 $\bar{B}_0$ が既約な場合のみ考察したが、そうでない時もほぼ同様の議論が出来る。

4. そのほかの例

P^1 上の射影平面束 $\Sigma_{l,m} = P(0 \oplus O(l) \oplus O(m))$, $0 \leq l \leq m$, の相対豊富なトートロジカル因子を L , ファイバーを F する。非負整数 n をとり一次系 $|4L + nF|$ を考えるとこれは基底集合を持たないので一般の元 S は非特異既約になる。 $\Sigma_{l,m}$ の射影から誘導される写像 $S \rightarrow P^1$ の一般ファイバーは種数3の非超楕円曲線(平面4次曲線)である。簡単な計算より、

$$(15) \quad p_g(S) = 4(l + m) + 3(n - 1), \quad q(S) = 0, \quad c_1^2(S) = 3p_g(S) - 7$$

となる事が解る。 $p_g \geq 4$ なる時には S の標準一次系は大変豊富である。

今、非負整数 α, β を

$$(16) \quad n = 2\alpha + \beta$$

を満たすように取り、 $L_\alpha = 2L + \alpha F$ とおく。また、 $q \in H^0(\Sigma_{l,m}, O(L_\alpha))$ を一般にとって固定する。 q の定める因子 Q は非特異既約としてよい。 $\Sigma_{l,m}$ 上の射影直線束 $P(0 \oplus O(L_\alpha))$ のファイバー座標を (X_0, X_1) として次の連立方程式で定義される部分多様体の族を考える。

$$(17) \quad S_t : \begin{cases} a_0 X_0^2 + a_1 X_0 X_1 + a_2 X_1^2 = 0 \\ t X_0 = q X_1 \end{cases}, \quad t \in \Delta_\varepsilon$$

但し、 $a_j \in H^0(\Sigma_{l,m}, O(jL_\alpha + \beta F))$, $0 \leq j \leq 2$, は十分一般であるとする。 $t \neq 0$ なる時は S_t は次式で定義される $\Sigma_{l,m}$ の超曲面と双正則である。

$$(18) \quad a_0 q^2 + t a_1 q + t^2 a_2 = 0$$

よって、このときには $S_t \in |4L + nF|$ となり、 $c_1^2(S) = 3p_g(S) - 7$ を満たす。一方 S_0 は $\beta + 1$ 個の既約成分からなり、ひとは Q の二重被覆 V で残りは全て $\mathbb{P}^2$ と同型である。ここで、 V は種数 3 の超楕円曲面である事を注意しておく。直接計算から、 V の不変量は

$$(19) \quad p_g(V) = p_g(S_t), \quad q(V) = 0, \quad c_1^2(V) = 3p_g(V) - 7 - \beta$$

を満たす事が言えて、しかも他の成分 ($\mathbb{P}^2$) との交わりは非特異有理曲線 (conic) である事がわかる。

特に、 $(l, m, n) = (0, 1, 1)$, $(\alpha, \beta) = (0, 1)$ とすれば、一般ファイバー S_t は数値的 5 次曲面 (実は直線を含む 5 次曲面) である。従って、上の退化族は Friedman[F] が存在のみを示した 5 次曲面の Type I 退化の具体例になっている。

また、 $\beta = 0$ とすれば $c_1^2 = 3p_g - 7$ を満たす曲面の変形族で既に [AK] に見られるものである: $S_0 = V$ の標準写像は双有理になり得ず、一般ファイバーのそれは双有理になっている。

参考文献

- [AK] T. Ashikaga and K. Konno: Algebraic surfaces of general type with $c_1^2 = 3p_g - 7$, preprint.
- [F] R. Friedman: A degenerating family of quintic surfaces with trivial monodromy, Duke Math. J. 50 (1983), 203-214.
- [H1] E. Horikawa: On deformations of holomorphic maps II, J. Math. Soc. Japan 26 (1974), 647-667.
- [H2] E. Horikawa: On deformations of quintic surfaces, Invent. Math.

31 (1975), 43-85.

[H3] E. Horikawa: On algebraic surfaces with pencils of curves of genus 2, In: Complex Analysis and Algebraic Geometry, a volume dedicated to K.Kodaira, Tokyo and Cambridge: Iwanami Shoten Publishers and Cambridge University Press (1977), 79-90.

[H4] E. Horikawa: Algebraic surfaces of general type with small c_1^2 , II, III, IV, Invent. Math. 37 (1976), 121-155; ibid. 47 (1978), 209-248; ibid. 50 (1979), 103-128.

[H5] E. Horikawa: Local deformation pencil of curves of genus two, Proc. Japan Acad. 64 (1988), 241-244.

[U] S. Usui: Private communication.