

等質 Siegel 領域の Shilov 境界上の調和解析

伊師英之（横浜市大 理）

序.

Siegel 領域とは上半平面を一般化した複素領域であり, 全ての有界等質領域は或る等質 Siegel 領域と正則同値であるという事実 [13] から 幾何学的に重要な対象として様々な研究が為されてきた. 等質 Siegel 領域の著しい特徴として, その正則同型群の岩澤部分群 (極大連結可解部分群. 実半単純 Lie 群については岩澤分解の AN -part) が領域に単純推移的に作用する affine 変換群として実現される, ということがある. 上半平面に単純推移的に作用する $ax+b$ 群は その最も簡単な例であるが, このような可解 Lie 群の作用に着目した Siegel 領域上の調和解析についても興味深い研究がこれまで数多く行なわれている.

我々が考察するのは, 上述のような可解 Lie 群 G が Siegel 領域 D に作用しているときに D の Shilov 境界 Σ 上の函数空間 $L^2(\Sigma)$ に自然に定義される G の unitary 表現である. いわゆる Hardy 空間は この表現の既約な不変部分空間であり, とくに D が対称領域のときには Hardy 空間上の G の部分表現は D の正則同型群の正則離散系列表現の極限へと拡張される ([12]. なお通常 Hardy 空間とは L^2 の意味で Σ 上に境界値をもつ D 上の正則関数のなす空間のことをいうが, ここでは その境界値たちの方のなす Σ 上の函数空間を指すものとする). そこで函数空間 $L^2(\Sigma)$ には Hardy 空間の他に そのような既約部分空間がどれだけあるか, ということが問題となるが, それに関して これまで知られている結果は次の 2 つである.

- (1) D が tube 型で rank r のとき, $L^2(\Sigma)$ は 2^r 個の互いに同値でない既約部分空間に分解される (Gindikin [2]).
- (2) D が tube 型ではなく rank 1 のとき, $L^2(\Sigma)$ の既約分解には 2 つの表現がそれぞれ可算無限個ずつ現れる (Liu-Peng [5]).

Shilov 境界 Σ は或る G の正規部分群 $N(Q)$ と orbit map によって同一視できるが ((1.4) 参照), D が tube 型であるときに限り $N(Q)$ は可換で, そうでないとき $N(Q)$ は 2 step 巾零 Lie 群 (とくに rank 1 のときは Heisenberg 群) である. この $N(Q)$ の非可換性が (2) の場合の $L^2(\Sigma)$ の調和解析を格段に複雑にしているのであるが, [5] では Heisenberg 群の表現論, とくに生成消滅作用素を利用してうまく既約な函数空間を記述している ([9] も参照).

我々は [2], [5] 双方の手法を拡張し, 次のように問題の解答を与えた.

主定理 (定理 4.3). Tube 型でない rank r の Siegel 領域 D について, $L^2(\Sigma)$ の既約分解には 2^r 個の表現がそれぞれ可算無限個ずつ現れる.

鍵となるアイディアは、 G の表現を直積群 $G \times N(Q)$ の表現へと拡張し、この大きな群の表現に関する既約分解を実行することである (§3). その結果 $L^2(\Sigma)$ は重複度なしで 2^r 個の空間に分解され (定理 3.2), 各々の空間上の部分表現は G と $N(Q)$ それぞれの既約 unitary 表現のテンソル積と同値になる. これらの空間をさらに G の表現空間として分解するには、 $N(Q)$ の微分表現に由来する線型作用素 (調和振動子に相当する) に関する同時固有空間分解を考えればよい (§4). 各部分空間上に実現される G の既約 unitary 表現たちは Kirillov-Bernat 理論 (orbit method) によって分類される (定理 4.3 (i)). Hardy 空間も主定理で述べた可算個の既約部分空間のうちの一つであるが (定理 4.6), 我々は残りの部分空間も Hardy 空間の類似物とみなし、各々の空間に対して Cauchy-Szegö 核に相当するものを構成した. これを用いれば函数 $f \in L^2(\Sigma)$ に対し、既約分解による f の各成分を具体的に求めることができる (定理 4.5).

§1. 準備.

序で述べたように等質 Siegel 領域 D についてはその上に affine 変換群として単純推移的に作用する可解 Lie 群 G が必ず存在するが、この G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ には正規 j 代数とよばれる構造が入り、しかも正規 j 代数 $\mathfrak{g}$ の j -同型類と等質 Siegel 領域 D の正則同値類との間には一対一の対応がある ([10]). よって本稿では正規 j 代数 $\mathfrak{g}$ から議論を始め、可解 Lie 群 $G = \exp \mathfrak{g}$ が affine 変換群として作用する等質 Siegel 領域 D を [11] に従って構成し、その G と D について考察をすすめていくことにする.

正規 j 代数とは $\mathbb{R}$ 上の分裂型可解 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ と $j^2 = -\text{id}_{\mathfrak{g}}$ をみたす $\mathfrak{g}$ 上の線型変換 j , および $\mathfrak{g}$ 上の線型形式 $\omega \in \mathfrak{g}^*$ の組で次の (i), (ii) をみたすものをいう:

(i) 任意の $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}$ について $[Y_1, Y_2] + j[jY_1, Y_2] + j[Y_1, jY_2] - [jY_1, jY_2] = 0$,

(ii) $(Y_1|Y_2)_{\omega} := \omega([Y_1, jY_2])$ は $\mathfrak{g}$ 上の j -不変な内積を定める.

内積 $(\cdot|\cdot)_{\omega}$ に関する $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ の直交補空間を $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ とし、その次元 $r := \dim \mathfrak{a}$ を rank とよぶ. この $\mathfrak{a}$ は可換な部分代数であり、次の定理の示すように正規 j 代数 $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{a}$ に関して root 空間分解される.

定理 1.1 (Piatetskii-Shapiro [10]). 双対ベクトル空間 $\mathfrak{a}^*$ の基底 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ を次が成り立つようにとることができる: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(1) \oplus \mathfrak{g}(1/2) \oplus \mathfrak{g}(0)$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(0) &= \mathfrak{a} \oplus \sum_{1 \leq k < m \leq r}^{\oplus} \mathfrak{g}_{(\alpha_m - \alpha_k)/2}, & \mathfrak{g}(1/2) &= \sum_{k=1}^r \mathfrak{g}_{\alpha_k/2}, \\ \mathfrak{g}(1) &= \sum_{k=1}^r \mathfrak{g}_{\alpha_k} \oplus \sum_{1 \leq k < m \leq r}^{\oplus} \mathfrak{g}_{(\alpha_m + \alpha_k)/2}, \end{aligned}$$

ただし一般に $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ について $\mathfrak{g}_{\alpha} := \{Y \in \mathfrak{g}; [C, Y] = \alpha(C)Y \ (\forall C \in \mathfrak{a})\}$ とする. さらに $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ に双対な $\mathfrak{a}$ の基底を $\{A_1, \dots, A_r\}$ とし、 $E_k := -jA_k$ ($k = 1, \dots, r$)

とすると $\mathfrak{g}_{\alpha_k} = \mathbb{R}E_k$ である. また $p, q = 0, 1/2, 1$ について

$$[\mathfrak{g}(p), \mathfrak{g}(q)] \subset \mathfrak{g}(p+q) \quad (\text{ただし } p > 1 \text{ のとき } \mathfrak{g}(p) := \{0\}). \quad (1.1)$$

が成り立つ.

線型形式 $E^* \in \mathfrak{g}^*$ を $x = \sum_{k=1}^r x_{kk} E_k + \sum_{1 \leq k < m \leq r} X_{mk} \in \mathfrak{g}(1)$ ($x_{kk} \in \mathbb{R}$, $X_{mk} \in \mathfrak{g}_{(\alpha_m + \alpha_k)/2}$) および $u \in \mathfrak{g}(1/2)$, $T \in \mathfrak{g}(0)$ について

$$\langle x + u + T, E^* \rangle = \sum_{k=1}^r x_{kk} \quad (1.2)$$

となるように定義して

$$(Y|Y') := \langle [jY, Y'], E^* \rangle / 2 \quad (Y, Y' \in \mathfrak{g}) \quad (1.3)$$

とすると, この $(\cdot|\cdot)$ も $\mathfrak{g}$ 上の j -不変な正定値の内積を定める (以後 $\mathfrak{g}$ 上の内積といえは こちらを指すものとする). 定理 1.1 に現れる root 空間 $\mathfrak{g}_{(\alpha_m \pm \alpha_k)/2}$ および $\mathfrak{g}_{\alpha_k/2}$ は $\{0\}$ となること (よって $\mathfrak{g}(1/2) = \{0\}$ となることも) あり得る. 関係式 (1.1) から $\mathfrak{g}(0)$, $\mathfrak{g}(1)$ はそれぞれ $\mathfrak{g}$ の部分代数および可換な ideal で, $\mathfrak{g}(0)$ に対応する Lie 群 $H := \exp \mathfrak{g}(0)$ は $\mathfrak{g}(1)$ に随伴表現によって作用している. ここで $E := E_1 + \cdots + E_r \in \mathfrak{g}(1)$ において $\Omega := H \cdot E \subset \mathfrak{g}(1)$ とすると, Ω は $\mathfrak{g}(1)$ の中の正則錐 (直線を含まない開凸錐) であり, 群 H は Ω に単純推移的に作用している. 部分空間 $\mathfrak{g}(1/2)$ には $j|_{\mathfrak{g}(1/2)}$ により複素構造が定まる. 一方 (1.1) から H は $\mathfrak{g}(1/2)$ にも随伴表現によって作用しているが, その作用は j と可換である. 複素ベクトル空間 $(\mathfrak{g}(1/2), j)$ 上の Hermitian map $Q : (\mathfrak{g}(1/2), j) \times (\mathfrak{g}(1/2), j) \rightarrow \mathfrak{g}(1)_{\mathbb{C}}$ を $Q(u, u') := ([ju, u'] + i[u, u'])/4$ と定義すると, Q は Ω -positive であり (すなわち 任意の $u \in \mathfrak{g}(1/2) \setminus \{0\}$ について $Q(u, u) \in \bar{\Omega} \setminus \{0\}$), 次のような H -同変性をもつ:

$$Q(t \cdot u, t \cdot u') = t \cdot Q(u, u') \quad (t \in H, u, u' \in \mathfrak{g}(1/2)).$$

正規 j 代数 $(\mathfrak{g}, j, \omega)$ に対応する等質 Siegel 領域とは, 複素ベクトル空間 $\mathfrak{g}(1)_{\mathbb{C}} \times (\mathfrak{g}(1/2), j)$ の中の次のような複素領域

$$D(\Omega, Q) := \{(z, u) \in \mathfrak{g}(1)_{\mathbb{C}} \times (\mathfrak{g}(1/2), j); \Im z - Q(u, u) \in \Omega\}$$

のことである. とくに $\mathfrak{g}(1/2) = \{0\}$, $Q \equiv 0$ のとき $D(\Omega, Q)$ は tube 領域 $\mathfrak{g}(1) + i\Omega \subset \mathfrak{g}(1)_{\mathbb{C}}$ になる. 以下, $\mathfrak{g}$ に対応する可解 Lie 群 $G := \exp \mathfrak{g}$ の $D(\Omega, Q)$ への作用を定義する. まず (1.1) から $\mathfrak{n}(Q) := \mathfrak{g}(1) \oplus \mathfrak{g}(1/2)$ は $\mathfrak{g}$ の ideal で, 高々 2 step の巾零 Lie 代数をなすことに注意する ($\mathfrak{g}(1/2) = \{0\}$ のときは $\mathfrak{n}(Q) = \mathfrak{g}(1)$ となり, これは可換である). この $\mathfrak{n}(Q)$ に対応する巾零 Lie 群を $N(Q)$ とし, その元

$\exp(x+u)$ ($x \in \mathfrak{g}(1), u \in \mathfrak{g}(1/2)$) を $n(x, u)$ で表すと, Campbell - Hausdorff の公式から次の乗法公式が得られる:

$$n(x, u)n(x', u') = n(x + x' + 2\Im Q(u, u'), u + u') \quad (x, x' \in \mathfrak{g}(1), u, u' \in \mathfrak{g}(1/2)).$$

一方

$$t n(x, u) t^{-1} = n(t \cdot x, t \cdot u) \quad (t \in H, u \in \mathfrak{g}(1/2), x \in \mathfrak{g}(1))$$

が成り立ち, 可解 Lie 群 G は半直積 $N(Q) \rtimes H$ に等しい. ベクトル空間 $\mathfrak{g}(1)_{\mathbb{C}} \times (\mathfrak{g}(1/2), j)$ への G の作用を

$$\begin{aligned} t_0 \cdot (z, u) &:= (t_0 \cdot z, t_0 \cdot u), \\ n_0 \cdot (z, u) &:= (z + x_0 + 2iQ(u, u_0) + iQ(u_0, u_0), u + u_0) \\ &\quad (t_0 \in H, n_0 = n(x_0, u_0) \in N(Q), (z, u) \in \mathfrak{g}(1)_{\mathbb{C}} \times (\mathfrak{g}(1/2), j)) \end{aligned}$$

と定めると, この作用は D 上単純推移的である. 複素領域 $D(\Omega, Q)$ の Shilov 境界を Σ とすると

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{(z, u) \in \mathfrak{g}(1)_{\mathbb{C}} \times (\mathfrak{g}(1/2), j); \Im z - Q(u, u) = 0\} \\ &= \{(x + iQ(u, u), u); x \in \mathfrak{g}(1), u \in \mathfrak{g}(1/2)\} \end{aligned}$$

となり, 群 G は Σ にも推移的に作用する. 実際, その部分 Lie 群 $N(Q)$ は Σ に単純推移的に作用し, したがって orbit map

$$\iota: N(Q) \ni n(x, u) \mapsto n(x, u) \cdot (0, 0) = (x + iQ(u, u), u) \in \Sigma \quad (1.4)$$

は微分同相である. 函数 $\chi_p: G \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ($p = 1/2, 1$) を

$$\chi_p(nt) := (\det_{\mathfrak{g}(p)} \text{Ad}(t))^{-1/2} \quad (t \in H, n \in N)$$

と定義すると, これらは G の 1 次元表現である. Shilov 境界 Σ 上の L^2 函数空間

$$L^2(\Sigma) := \left\{ f: \Sigma \rightarrow \mathbb{C}; \|f\|^2 := \int_{\mathfrak{g}(1)} \int_{\mathfrak{g}(1/2)} |f(x + iQ(u, u), u)|^2 dm(u) dm(x) < \infty \right\}$$

($dm(u), dm(x)$ はそれぞれ $\mathfrak{g}(1/2), \mathfrak{g}(1)$ 上の内積から定まるルベーグ測度) の上に G の表現 L を

$$L(g_0)f(p) := \chi_1(g_0)\chi_{1/2}(g_0)f(g_0^{-1}p) \quad (g_0 \in G, p \in \Sigma, f \in L^2(\Sigma))$$

と定義すると, L は G の unitary 表現である. 微分同相 $\iota: N(Q) \rightarrow \Sigma$ から誘導される Hilbert 空間の同型 $\iota^*: L^2(\Sigma) \xrightarrow{\sim} L^2(N(Q))$ により, 表現 L の群 $N(Q)$ への制限は $N(Q)$ の左正則表現と同値になる.

さて $n_0 = n(x_0, u_0) \in N(Q)$ について, $\mathfrak{g}(1)_{\mathbb{C}} \times (\mathfrak{g}(1/2), j)$ 上の反正則な affine 変換 $\rho(n_0)$ を

$$\rho(n_0)(z, u) := (z + x_0 + 2iQ(u_0, u) + iQ(u_0, u_0), u + u_0)$$

と定めると

$$\iota(n_1 n_2) = \rho(n_2) \iota(n_1), \quad \rho(n_1 n_2) = \rho(n_2) \circ \rho(n_1) \quad (n_1, n_2 \in N(Q))$$

が成り立つ. 群 $N(Q)$ の右作用を $\iota : N(Q) \rightarrow \Sigma$ によって Σ 上に移したものが $\rho(\cdot)|_{\Sigma}$ である. よって群 $N(Q)$ の $L^2(\Sigma)$ 上の unitary 表現 R を

$$R(n)f(p) := f(\rho(n)p) \quad (n \in N(Q), p \in \Sigma)$$

によって定めると, この表現 R は $\iota^* : L^2(\Sigma) \rightarrow L^2(N(Q))$ によって $N(Q)$ の右正則表現と同値になる. 表現 L と R の間には

$$L(n_0)R(n_1) = R(n_1)L(n_0) \quad (n_0, n_1 \in N(Q)) \quad (1.5)$$

$$L(t_0)R(n_1) = R(t_0 n_1 t_0^{-1})L(t_0) \quad (t_0 \in H, n_1 \in N(Q)) \quad (1.6)$$

という関係があり, (1.5) から直積群 $N(Q) \times N(Q)$ の unitary 表現 $(P, L^2(\Sigma))$ が $P(n_0, n_1) := L(n_0)R(n_1)$ ($n_0, n_1 \in N(Q)$) によって定義できる.

§2. フーリエ変換と表現の分解.

双対ベクトル空間 $\mathfrak{g}(1)^*$ への群 H の余随伴作用を考える. パラメータ $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r) \in \{-1, 1\}^r$ について $\mathfrak{g}(1)$ 上の線型形式 $E_{\varepsilon}^* \in \mathfrak{g}(1)^*$ を

$$\langle x, E_{\varepsilon}^* \rangle := \sum_{k=1}^r \varepsilon_k x_{kk} \quad (x = \sum_{k=1}^r x_{kk} E_k + \sum_{m>k} X_{mk}, \quad x_{kk} \in \mathbb{R}, X_{mk} \in \mathfrak{g}_{(\alpha_m + \alpha_k)/2})$$

と定めて E_{ε}^* を通る H -軌道を $\mathcal{O}_{\varepsilon}^* \subset \mathfrak{g}(1)^*$ とすると, これらは開軌道である. とくに $E_{(1, \dots, 1)}^*$ は (1.2) の E^* に等しく, 軌道 $\mathcal{O}_{(1, \dots, 1)}^* = H \cdot E_{(1, \dots, 1)}^*$ は正則錐 $\Omega \subset \mathfrak{g}(1)$ の双対錐 $\Omega^* := \{ \xi \in \mathfrak{g}(1)^*; \langle x, \xi \rangle > 0 \ (\forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}) \}$ と一致する. 和集合 $\mathcal{O}^* := \bigsqcup_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^r} \mathcal{O}_{\varepsilon}^*$ は $\mathfrak{g}(1)^*$ の中で稠密であり, 群 H はその上に自由に作用する. すなわち任意の元 $\xi \in \mathcal{O}^*$ は一意的に $\xi = t \cdot E_{\varepsilon}^*$ ($t \in H, \varepsilon \in \{-1, 1\}^r$) と表される (この節のここまでの結果は Gindikin [2] による).

さて $\mathfrak{g}(1)$ の複素化 $\mathfrak{g}(1)_{\mathbb{C}}$ と $\mathfrak{g}(1)^*$ の部分集合 $\mathcal{O}^*$ との“ひねった”カップリング $\gamma : \mathfrak{g}(1)_{\mathbb{C}} \times \mathcal{O}^* \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$\gamma(x + iy, t \cdot E_{\varepsilon}^*) := \langle x, t \cdot E_{(1, \dots, 1)}^* \rangle + i \langle y, t \cdot E_{\varepsilon}^* \rangle \quad (x, y \in \mathfrak{g}(1), t \in H, \varepsilon \in \{-1, 1\}^r).$$

と定義し, $\xi \in \mathcal{O}^*$ に対して $\mathfrak{g}(1/2)$ 上の実双線型形式 $q_{\xi} : \mathfrak{g}(1/2) \times \mathfrak{g}(1/2) \rightarrow \mathbb{C}$ を $q_{\xi}(u, u') := 2\gamma(Q(u, u'), \xi)$ によって定める. もし $\xi \in \mathcal{O}_{(1, \dots, 1)}^* = \Omega^*$ ならば $\gamma(x + iy, \xi)$

は通常のカップリング $\langle x, \xi \rangle + i\langle y, \xi \rangle$ と一致し, $q_\xi = 2\xi \circ Q$ は $(\mathfrak{g}(1/2), j)$ 上の正定値 Hermite 形式となる. 一般の $\xi \in \mathcal{O}^*$ については q_ξ が複素構造 j に関して半双線型になるとは限らないが, $q_\xi(u, u') = \overline{q_\xi(u', u)}$ ($u, u' \in \mathfrak{g}(1/2)$) および $q_\xi(u, u) > 0$ ($u \in \mathfrak{g}(1/2) \setminus \{0\}$) は成り立つ.

境界 Σ 上のコンパクトな台をもつ連続関数 $f \in C_c(\Sigma)$ について, $\mathcal{O}^* \times \mathfrak{g}(1/2)$ 上の C^∞ 関数 $\hat{f}$ を

$$\hat{f}(\xi, u) := \frac{e^{q_\xi(u, u)/2}}{(\sqrt{2\pi})^{\dim \mathfrak{g}(1)}} \int_{\mathfrak{g}(1)} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x + iQ(u, u), u) dm(x) \\ (\xi \in \mathcal{O}^*, u \in \mathfrak{g}(1/2))$$

と定める. Plancherel の公式により

$$\int_{\mathfrak{g}(1)} |f(x + iQ(u, u), u)|^2 dm(x) = \int_{\mathcal{O}^*} |\hat{f}(\xi, u)|^2 e^{-q_\xi(u, u)} dm(\xi) \quad (u \in \mathfrak{g}(1/2))$$

となるから

$$\|f\|^2 = \int_{\mathcal{O}^*} \int_{\mathfrak{g}(1/2)} |\hat{f}(\xi, u)|^2 e^{-q_\xi(u, u)} dm(u) dm(\xi) \quad (2.1)$$

であり, これから完備化によってユニタリ同型

$$\Phi: L^2(\Sigma) \ni f \mapsto \hat{f} \in L^2(\mathcal{O}^* \times \mathfrak{g}(1/2), e^{-q_\xi(u, u)} dm(u) dm(\xi)) \quad (:= \mathcal{L})$$

が得られる. ここで $\xi \in \mathcal{O}^*$ について函数空間 $L^2(\mathfrak{g}(1/2), e^{-q_\xi(u, u)} dm(u))$ を $\mathcal{L}_\xi$ とし, その元 $\phi \in \mathcal{L}_\xi$ のノルムを

$$\|\phi\|_\xi^2 := \int_{\mathfrak{g}(1/2)} |\phi(u)|^2 e^{-q_\xi(u, u)} dm(u)$$

と表すものとする, (2.1) は

$$\|f\|^2 = \int_{\mathcal{O}^*} \|\hat{f}(\xi, \cdot)\|_\xi^2 dm(\xi)$$

と書き直され(とくに $\hat{f}(\xi, \cdot) \in \mathcal{L}_\xi$ a.a. $\xi \in \mathcal{O}^*$), Φ は Hilbert 空間 $L^2(\Sigma)$ の直積分分解 $L^2(\Sigma) \xrightarrow{\sim} \int_{\mathcal{O}^*}^\oplus \mathcal{L}_\xi dm(\xi)$ を与えていることがわかる.

同型 Φ によって前節で $L^2(\Sigma)$ 上に定義した unitary 表現 L および R がどのように $\mathcal{L} \equiv \int_{\mathcal{O}^*}^\oplus \mathcal{L}_\xi dm(\xi)$ 上に移されるかをみよう. 群 H の元 t に対し

$$D_t \phi(u) := \chi_{1/2}(t) \phi(t^{-1} \cdot u) \quad (\phi \text{ は } \mathfrak{g}(1/2) \text{ 上の函数, } u \in \mathfrak{g}(1/2))$$

と定義すると, 任意の ξ について D_t は $\mathcal{L}_\xi$ から $\mathcal{L}_{t \cdot \xi}$ への unitary 同型を与える. 函数空間 $\mathcal{L}_\xi$ 上に巾零 Lie 群 $N(Q)$ の unitary 表現 l_ξ および r_ξ を

$$l_\xi(n_0) \phi(u) := e^{-i\langle x_0, \xi \rangle + q_\xi(u, u_0) - q_\xi(u_0, u_0)/2} \phi(u - u_0), \\ r_\xi(n_0) \phi(u) := e^{i\langle x_0, \xi \rangle - q_\xi(u_0, u) - q_\xi(u_0, u_0)/2} \phi(u + u_0) \\ (n_0 = n(x_0, u_0) \in N(Q), u \in \mathfrak{g}(1/2), \phi \in \mathcal{L}_\xi)$$

と定義する.

命題 2.1. 函数 $f \in L^2(\Sigma)$ および $\xi \in \Omega^*$, $t_0 \in H$, $n_0, n_1 \in N(Q)$ について

$$(L(t_0)f)^\wedge(\xi, \cdot) = \chi_1(t_0) D_{t_0} \hat{f}(t_0^{-1} \cdot \xi, \cdot), \quad (2.2)$$

$$(L(n_0)f)^\wedge(\xi, \cdot) = l_\xi(n_0) \hat{f}(\xi, \cdot), \quad (2.3)$$

$$(R(n_1)f)^\wedge(\xi, \cdot) = r_\xi(n_1) \hat{f}(\xi, \cdot) \quad (2.4)$$

が成り立つ. よって $\Phi : L^2(\Sigma) \rightarrow \mathcal{L}$ は $N(Q)$ の unitary 表現の分解

$$L|_{N(Q)} \xrightarrow{\sim} \int_{\mathcal{O}^*}^{\oplus} l_\xi dm(\xi) \quad R|_{N(Q)} \xrightarrow{\sim} \int_{\mathcal{O}^*}^{\oplus} r_\xi dm(\xi) \quad (2.5)$$

を与える.

群 $N(Q)$ の表現に関する主張 (2.3), (2.4) および (2.5) は Ogden-Vági [9] による. 命題 2.1 と (1.5), (1.6) から (あるいは直接の計算によって),

$$l_\xi(n_0) \circ r_\xi(n_1) = r_\xi(n_1) \circ l_\xi(n_0) \quad (n_0, n_1 \in N(Q)), \quad (2.6)$$

$$D_t \circ l_\xi(n) = l_{t \cdot \xi}(t n t^{-1}) \circ D_t, \quad (2.7)$$

$$D_t \circ r_\xi(n) = r_{t \cdot \xi}(t n t^{-1}) \circ D_t \quad (t \in H, n \in N(Q)) \quad (2.8)$$

が全ての $\xi \in \mathcal{O}^*$ について成り立つことがわかる. 関係式 (2.6) から直積群 $N(Q) \times N(Q)$ の unitary 表現 p_ξ が $p_\xi(n_0, n_1) := l_\xi(n_0) r_\xi(n_1)$ ($n_0, n_1 \in N(Q)$) と定義できる.

命題 2.2 (Ogden-Vági [9]). 全ての $\xi \in \mathcal{O}^*$ について p_ξ は既約である. 同型 $\Phi : L^2(\Sigma) \rightarrow \mathcal{L}$ は直積群 $N(Q) \times N(Q)$ の unitary 表現 P の既約分解 $P \simeq \int_{\mathcal{O}^*}^{\oplus} p_\xi dm(\xi)$ を与える.

§3. 直積群 $G \times N(Q)$ の表現の構成と分解.

関係式 (1.6) からわかるように, 一般に $L(g_0)$ ($g_0 \in G$) と $R(n_1)$ ($n_1 \in N(Q)$) は可換とは限らない. そこで $N(Q)$ の表現 $(R, L^2(\Sigma))$ を次のように “変形” して可換性を獲得させる. まず $\xi = t \cdot E_\varepsilon^* \in \mathcal{O}^*$ に対し, $N(Q)$ の unitary 表現 $(\tilde{r}_\xi, \mathcal{L}_\xi)$ を

$$\tilde{r}_\xi(n_1) := r_\xi(t n_1 t^{-1}) = D_t \circ r_{E_\varepsilon^*}(n_1) \circ D_{t^{-1}} \quad (n_1 \in N(Q))$$

と定義する (2 番目の等号は (2.8) から従う). すなわち表現 $(\tilde{r}_\xi, \mathcal{L}_\xi)$ は, $(r_{E_\varepsilon^*}, \mathcal{L}_{E_\varepsilon^*})$ を同型 $D_t : \mathcal{L}_{E_\varepsilon^*} \rightarrow \mathcal{L}_\xi$ によって $\mathcal{L}_\xi$ 上に移したものに他ならない. 次に $N(Q)$ の unitary 表現 $(\tilde{R}, L^2(\Sigma))$ を

$$\tilde{R}(n_1) := \Phi \circ \left(\int_{\mathcal{O}^*}^{\oplus} \tilde{r}_\xi(n_1) dm(\xi) \right) \circ \Phi^{-1} \quad (n_1 \in N(Q))$$

と定める. すなわち 任意の $f \in L^2(\Sigma)$ について

$$(\tilde{R}(n_1)f)^\wedge(\xi, \cdot) = \tilde{r}_\xi(n_1)\hat{f}(\xi, \cdot) \quad (\xi \in \mathcal{O}^*)$$

が成り立つものとして $\tilde{R}(n_1)$ を定義する.

命題 3.1. 任意の $g_0 \in G$ と $n_1 \in N(Q)$ について $L(g_0)$ と $\tilde{R}(n_1)$ は可換である.

証明. 函数 $f \in L^2(\Sigma)$ と元 $\xi = t \cdot E_e^* \in \mathcal{O}^*$ について

$$(L(g_0) \circ \tilde{R}(n_1)f)^\wedge(\xi, \cdot) = (\tilde{R}(n_1) \circ L(g_0)f)^\wedge(\xi, \cdot)$$

が成り立つことを示せばよい. 命題 2.1 により, まず $g_0 = n_0 \in N(Q)$ のときは

$$\begin{aligned} (L(n_0) \circ \tilde{R}(n_1)f)^\wedge(\xi, \cdot) &= l_\xi(n_0)\tilde{r}_\xi(n_1)\hat{f}(\xi, \cdot) \\ &= l_\xi(n_0)r_\xi(t n_1 t^{-1})\hat{f}(\xi, \cdot) \\ &= r_\xi(t n_1 t^{-1})l_\xi(n_0)\hat{f}(\xi, \cdot) \\ &= (\tilde{R}(n_1) \circ L(n_0)f)^\wedge(\xi, \cdot) \end{aligned}$$

(3 番目の等号は (2.6) を用いる). 一方 $g_0 = t_0 \in H$ のときは

$$\begin{aligned} (L(t_0) \circ \tilde{R}(n_1)f)^\wedge(\xi, \cdot) &= \chi_1(t_0)D_{t_0}(\tilde{R}(n_1)f)^\wedge(t_0^{-1} \cdot \xi, \cdot) \\ &= \chi_1(t_0)D_{t_0} \circ \tilde{r}_{t_0^{-1} \cdot \xi}(n_1)\hat{f}(t_0^{-1} \cdot \xi, \cdot) \\ &= \chi_1(t_0)D_{t_0} \circ r_{t_0^{-1} \cdot \xi}(t_0^{-1} t n_1 t^{-1} t_0)\hat{f}(t_0^{-1} \cdot \xi, \cdot) \\ &= \chi_1(t_0)r_\xi(t n_1 t^{-1}) \circ D_{t_0}\hat{f}(t_0^{-1} \cdot \xi, \cdot) \\ &= \tilde{r}_\xi(n_1)(L(t_0)f)^\wedge(\xi, \cdot) \\ &= (\tilde{R}(n_1) \circ L(t_0)f)^\wedge(\xi, \cdot) \end{aligned}$$

(4 番目の等号は (2.8) による). したがって主張は成り立つ. □

命題 3.1 から直積群 $G \times N(Q)$ の unitary 表現 $(\pi, L^2(\Sigma))$ が

$$\pi(g_0, n_1) := L(g_0) \circ \tilde{R}(n_1) \quad (g_0 \in G, n_1 \in N(Q))$$

と定義できる. この表現 π の既約分解を考えよう. パラメータ $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \in \{-1, 1\}^r$ について, $L^2(\Sigma)$ の部分空間 $L_\varepsilon^2(\Sigma)$ を

$$\begin{aligned} L_\varepsilon^2(\Sigma) &:= \Phi^{-1}\left(\int_{\mathcal{O}_\varepsilon}^\oplus \mathcal{L}_\xi dm(\xi)\right) \\ &= \left\{ f \in L^2(\Sigma); \hat{f}(\xi, \cdot) = 0 \quad (\text{a.a. } \xi \in \mathcal{O}^* \setminus \mathcal{O}_\varepsilon^*) \right\} \end{aligned}$$

と定める. このとき $\mathcal{O}^* = \bigsqcup_{\epsilon \in \{-1,1\}^r} \mathcal{O}_\epsilon^*$ から

$$L^2(\Sigma) = \sum_{\epsilon \in \{-1,1\}^r}^{\oplus} L_\epsilon^2(\Sigma) \quad (3.1)$$

がわかる.

定理 3.2. 各 $\epsilon \in \{-1,1\}^r$ について $L_\epsilon^2(\Sigma)$ は群 $G \times N(Q)$ の表現 π に関する既約な不変部分空間である. すなわち (3.1) は unitary 表現 $(\pi, L^2(\Sigma))$ の既約分解を与える.

部分表現 $(\pi, L_\epsilon^2(\Sigma))$ を π_ϵ とすると, これは直積群 $G \times N(Q)$ の既約 unitary 表現なので G と $N(Q)$ それぞれの或る既約 unitary 表現のテンソル積と同型である. 一方 G と $N(Q)$ はそれぞれ分裂型可解 Lie 群 と巾零 Lie 群であるから orbit method の一般論により それぞれの既約 unitary 表現の同値類と余随伴軌道の集合との間には Kirillov-Bernat 対応とよばれる一対一対応が存在する ([1], [6]). 元 $\xi \in \mathcal{O}^* (\subset \mathfrak{n}(Q)^* \subset \mathfrak{g}^*)$ について, 余随伴軌道 $\text{Ad}^*(G) \cdot (-\xi) \subset \mathfrak{g}^*$ と $\text{Ad}^*(N(Q)) \cdot (-\xi) \subset \mathfrak{n}(Q)^*$ に対応する G および $N(Q)$ の既約 unitary 表現をそれぞれ σ_ξ と τ_ξ とする.

定理 3.3. 直積群 $G \times N(Q)$ の unitary 表現として π_ϵ はテンソル積表現 $\sigma_{E_\epsilon^*} \otimes \tau_{-E_\epsilon^*}$ と同値である. よって $\epsilon \neq \epsilon'$ ならば π_ϵ と $\pi_{\epsilon'}$ は同値でなく, $(\pi, L^2(\Sigma))$ の既約分解 (3.1) は重複度をもたない.

証明の概要は以下の通りである: 直積群 $N(Q) \times N(Q)$ の表現 $(p_{E_\epsilon^*}, \mathcal{L}_{E_\epsilon^*})$ は既約だから 2 つの $N(Q)$ の既約 unitary 表現のテンソル積と同値である. 中心 $\exp \mathfrak{g}(1) \times \exp \mathfrak{g}(1) \subset N(Q) \times N(Q)$ の作用を考慮すれば

$$p_{E_\epsilon^*} \simeq \tau_{E_\epsilon^*} \otimes \tau_{-E_\epsilon^*}. \quad (3.2)$$

がわかる. 一方

$$\pi_\epsilon \simeq \text{Ind}_{N(Q) \times N(Q)}^{G \times N(Q)} p_{E_\epsilon^*}$$

を示すことができ ((2.2) ~ (2.8) などがポイントとなる), 両者を合わせて

$$\pi_\epsilon \simeq (\text{Ind}_{N(Q)}^G \tau_{E_\epsilon^*}) \otimes \tau_{-E_\epsilon^*}.$$

他方 Kirillov-Bernat 対応の定義より $\sigma_{E_\epsilon^*} \simeq \text{Ind}_{N(Q)}^G \tau_{E_\epsilon^*}$ だから, 定理は成り立つ.

部分空間 $\mathfrak{g}(1/2)$ が $\{0\}$ のとき (すなわち $D(\Omega, Q)$ が tube 領域のとき) $\tau_{-E_\epsilon^*}$ は $N(Q) = \exp \mathfrak{g}(1)$ の 1 次元表現だから, G の表現空間としても $L_\epsilon^2(\Sigma)$ は既約であり (実際 $(L, L_\epsilon^2(\Sigma)) \simeq \sigma_{E_\epsilon^*}$), (3.1) は G の表現 $(L, L^2(\Sigma))$ の重複度なしの既約分解を与えている ([2, Theorem 6.5]).

§4. 表現 $(L, L^2(\Sigma))$ の既約分解.

これから後の議論では常に $\mathfrak{g}(1/2) \neq \{0\}$ (すなわち $N(Q)$ は非可換) と仮定する. 群 G の表現 $(L, L^2(\Sigma))$ (これは $G \times N(Q)$ の表現 π_ϵ を G に制限したものである) は, 定理 3.3 から既約表現 $\sigma_{E_i^*}$ の $\infty (= \dim \tau_{-E_i^*})$ 個の直和と同型である. この表現の分解を具体的に与えることがこの節の目標である.

まず $N(Q)$ の表現 $(l_{E_i^*}, \mathcal{L}_{E_i^*})$ の既約分解を考察しよう. 以後, 簡単のため E_i^* を記号 (ϵ) で随時置き換える (たとえば $l_{(\epsilon)} := l_{E_i^*}$, $\mathcal{L}_{(\epsilon)} := \mathcal{L}_{E_i^*}$ など). 関係式 (3.2) および上と同様の議論から, $l_{(\epsilon)}$ は既約表現 $\tau_{E_i^*}$ の $\infty (= \dim \tau_{-E_i^*})$ 個の直和と同値である. そこで 2 step 巾零 Lie 群 $N(Q)$ の表現論が Heisenberg 群のそれに類似していることに注意して, 表現 $\tau_{-E_i^*}$ についての生成消滅演算子や調和振動子 (に相当するもの) を構成し, その作用に着目することによって具体的な $l_{(\epsilon)} \simeq (\tau_{E_i^*})^{\oplus \infty}$ の分解を得よう, というのが我々のアイディアである. 複素ベクトル空間 $(\mathfrak{g}_{\alpha_k/2}, j)$ の次元を m_k とし, $\Lambda := \{\lambda = (k, l); 1 \leq k \leq r, 1 \leq l \leq m_k\}$ とする. 内積 $(\cdot | \cdot)$ ((1.3) 参照) は j -不変なので, それを実部とするような $(\mathfrak{g}_{\alpha_k/2}, j)$ 上の Hermite 内積が定まるが, それに関する正規直交基底を $\{U_{(k,1)}, U_{(k,2)}, \dots, U_{(k,m_k)}\}$ とすると $\{U_\lambda, jU_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が実ベクトル空間 $\mathfrak{g}(1/2)$ の基底である. 添数集合 Λ の元の個数, すなわち複素ベクトル空間 $(\mathfrak{g}(1/2), j)$ の次元を $M (= m_1 + m_2 + \dots + m_r)$ とし, 複素数の組 $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \mathbb{C}^M$ と $(\mathfrak{g}(1/2), j)$ の元 u を $u = \sum_{\lambda \in \Lambda} \{(\Re u_\lambda)U_\lambda + (\Im u_\lambda)jU_\lambda\}$ によって同一視する. Lie 代数 $\mathfrak{n}(Q)$ の複素化 $\mathfrak{n}(Q)_\mathbb{C}$ の元 a_λ^ϵ と c_λ^ϵ ($\lambda = (k, l) \in \Lambda$) を次のように定める:

$$a_\lambda^\epsilon := (U_\lambda + i\epsilon_k jU_\lambda)/2, \quad c_\lambda^\epsilon := (-U_\lambda + i\epsilon_k jU_\lambda)/2.$$

このとき $\lambda = (k, l)$, $\lambda' = (k', l') \in \Lambda$ について

$$[a_\lambda^\epsilon, c_{\lambda'}^\epsilon] = -i\epsilon_k E_k, \quad [c_\lambda^\epsilon, c_{\lambda'}^\epsilon] = [a_\lambda^\epsilon, a_{\lambda'}^\epsilon] = 0$$

が成り立つ. 実ベクトル空間 $\mathfrak{g}(1/2)$ 上の任意の多項式 ϕ は函数空間 $\mathcal{L}_{(\epsilon)}$ 上の Lie 群 $N(Q)$ の表現 $r_{(\epsilon)} := r_{E_i^*}$ の C^∞ ベクトルであることに注意すると, $r_{(\epsilon)}$ の微分表現を $dr_{(\epsilon)}$ としたとき

$$dr_{(\epsilon)}(a_\lambda^\epsilon)\phi(u) = \begin{cases} \bar{\partial}_\lambda \phi(u) & (\epsilon_k = 1), \\ \partial_\lambda \phi(u) & (\epsilon_k = -1), \end{cases}$$

$$dr_{(\epsilon)}(c_\lambda^\epsilon)\phi(u) = \begin{cases} (\bar{u}_\lambda - \partial_\lambda)\phi(u) & (\epsilon_k = 1), \\ (u_\lambda - \bar{\partial}_\lambda)\phi(u) & (\epsilon_k = -1), \end{cases}$$

となることがわかる (ただし $\partial_\lambda := \frac{\partial}{\partial u_\lambda}$, $\bar{\partial}_\lambda = \frac{\partial}{\partial \bar{u}_\lambda}$). Lie 代数 $\mathfrak{n}(Q)$ の普遍包絡環を $\mathcal{U}(\mathfrak{n}(Q))$ として $h_\lambda^\epsilon := c_\lambda^\epsilon a_\lambda^\epsilon \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}(Q))$ とすると

$$h_\lambda^\epsilon = -\{(U_\lambda)^2 + (jU_\lambda)^2\}/4 + i\epsilon_k E_k/2$$

である. Hilbert 空間 $\mathcal{L}_{(\epsilon)}$ 上の作用素としての $dr_{(\epsilon)}(a_\lambda^\epsilon)$, $dr_{(\epsilon)}(c_\lambda^\epsilon)$ および $dr_{(\epsilon)}(h_\lambda^\epsilon)$ の閉包をそれぞれ $\mathcal{A}_\lambda^\epsilon, \mathcal{C}_\lambda^\epsilon, \mathcal{H}_\lambda^\epsilon$ とし, 非負整数の組 $\nu = (\nu_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \mathbb{Z}_+^M$ (ここで $\mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \dots\}$) について $\mathcal{L}_{(\epsilon)}$ の部分空間 $\mathcal{L}_{(\epsilon), \nu}$ を

$$\mathcal{L}_{(\epsilon), \nu} := \{ \phi; \mathcal{H}_\lambda^\epsilon \phi = \nu_\lambda \phi \quad (\forall \lambda \in \Lambda) \}$$

と定める.

命題 4.1. (i) ベクトル空間 $\mathfrak{g}(1/2)$ 上の函数空間 $\mathcal{L}_{(\epsilon)}$ は M 個の作用素 $\mathcal{H}_\lambda^\epsilon$ ($\lambda \in \Lambda$) の同時固有空間 $\mathcal{L}_{(\epsilon), \nu}$ たちの Hilbert 空間としての直和に等しい:

$$\mathcal{L}_{(\epsilon)} = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+^M}^{\oplus} \mathcal{L}_{(\epsilon), \nu}. \quad (4.1)$$

(ii) パラメータ $\nu = (\nu_\lambda), \mu = (\mu_\lambda) \in \mathbb{Z}_+^M$ について

$$\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} (\mathcal{C}_\lambda^\epsilon)^{\mu_\lambda} \right) \mathcal{L}_{(\epsilon), \nu} = \mathcal{L}_{(\epsilon), \nu + \mu}, \quad \left(\prod_{\lambda \in \Lambda} (\mathcal{A}_\lambda^\epsilon)^{\mu_\lambda} \right) \mathcal{L}_{(\epsilon), \nu} = \mathcal{L}_{(\epsilon), \nu - \mu}.$$

ただし, いずれかの $\lambda \in \Lambda$ について $\nu_\lambda - \mu_\lambda < 0$ のときは $\mathcal{L}_{(\epsilon), \nu - \mu} = \{0\}$ とする.

(iii) $\mathbf{0} := (0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}_+^M$ とすると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(\epsilon), \mathbf{0}} &= \{ \phi; \mathcal{A}_\lambda^\epsilon \phi = 0 \quad (\forall \lambda \in \Lambda) \} \\ &= \left\{ \phi \in \mathcal{L}_{(\epsilon)}; \begin{array}{l} \phi \text{ は全ての変数 } u_\lambda \text{ } (\lambda = (k, l) \in \Lambda) \text{ に関して} \\ \epsilon_k = 1 \text{ } (\epsilon_k = -1) \text{ のとき正則 (反正則)} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

(iv) パラメータ $\nu = (\nu_\lambda) \in \mathbb{Z}_+^M$ について, 線型作用素 $\prod_{\lambda \in \Lambda} (\nu_\lambda!)^{-1/2} (\mathcal{C}_\lambda^\epsilon)^{\nu_\lambda}$ は $\mathcal{L}_{(\epsilon), \mathbf{0}}$ から $\mathcal{L}_{(\epsilon), \nu}$ への unitary 同型を与える.

関係式 (2.6) より各固有空間 $\mathcal{L}_{(\epsilon), \nu}$ は $N(Q)$ の表現 $l_{(\epsilon)}$ の不変部分空間であるが, さらに次が成り立つ.

命題 4.2. 部分表現 $(l_{(\epsilon)}, \mathcal{L}_{(\epsilon), \nu})$ は $\tau_{E_\epsilon^*}$ と同値 (とくに既約) であり, よって (4.1) は $N(Q)$ の unitary 表現 $(l_{(\epsilon)}, \mathcal{L}_{(\epsilon)})$ の既約分解を与える.

元 $\xi = t \cdot E_\epsilon^* \in \mathcal{O}^*$ と $\nu \in \mathbb{Z}_+^M$ について

$$\mathcal{L}_{\xi, \nu} := D_t \mathcal{L}_{(\epsilon), \nu} \subset \mathcal{L}_\xi \quad (4.2)$$

とする. このとき $\mathcal{L}_\xi = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+^M}^{\oplus} \mathcal{L}_{\xi, \nu}$ であり, 命題 4.2 と (2.7) から この分解は $N(Q)$ の表現 $(l_\xi, \mathcal{L}_\xi)$ の既約分解を与え, 各 $(l_\xi, \mathcal{L}_{\xi, \nu})$ は τ_ξ と同値である.

目標である G の表現 $(L, L_e^2(\Sigma))$ に議論を移そう. 巾零 Lie 群 $N(Q)$ の表現 $\tilde{R}$ の部分表現 $(\tilde{R}, L_e^2(\Sigma))$ を $\tilde{R}_e$ とし, その微分表現を $d\tilde{R}_e$ とする. Hilbert 空間 $L_e^2(\Sigma)$

上の作用素としての $d\tilde{R}_e(a_\lambda^\epsilon)$, $d\tilde{R}_e(c_\lambda^\epsilon)$, $d\tilde{R}_e(h_\lambda^\epsilon)$ の閉包をそれぞれ $A_\lambda^\epsilon, C_\lambda^\epsilon, H_\lambda^\epsilon$ とし, $\nu = (\nu_\lambda) \in \mathbb{Z}_+^M$ について $L_e^2(\Sigma)$ の部分空間 $L_{e,\nu}^2(\Sigma)$ を

$$L_{e,\nu}^2(\Sigma) := \{f; H_\lambda^\epsilon f = \nu_\lambda f \quad (\forall \lambda \in \Lambda)\} \quad (4.3)$$

と定める. 関係式 (2.2), (2.3), (2.7) から $(L, L_e^2(\Sigma)) \simeq \text{Ind}_{N(Q)}^G l_{(e)}$ がわかり, これと $\sigma_{E_e^*} \simeq \text{Ind}_{N(Q)}^G \tau_{E_e^*}$ および これまでの議論の結果から我々は次の定理を得る.

定理 4.3. (i) 函数空間 $L^2(\Sigma)$ は G の表現空間として

$$L^2(\Sigma) = \sum_{\epsilon \in \{-1,1\}^r}^{\oplus} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+^M}^{\oplus} L_{e,\nu}^2(\Sigma) \quad (4.4)$$

と既約分解され, 各部分表現 $(L, L_{e,\nu}^2(\Sigma))$ は $\sigma_{E_e^*}$ と同値である.

(ii) 函数空間 $L_{e,\nu}^2(\Sigma)$ は次のように記述される:

$$\begin{aligned} L_{e,\nu}^2(\Sigma) &= \left\{ f \in L_e^2(\Sigma); \hat{f}(\xi, \cdot) \in \mathcal{L}_{\xi,\nu} \quad (\text{a.a. } \xi \in \mathcal{O}_e^*) \right\} \\ &= \Phi^{-1} \left(\int_{\mathcal{O}_e^*}^{\oplus} \mathcal{L}_{\xi,\nu} dm(\xi) \right). \end{aligned}$$

(iii) 2 つの表現 $(L, L_{e,\nu}^2(\Sigma))$ と $(L, L_{e,\nu'}^2(\Sigma))$ ($\nu, \nu' \in \mathbb{Z}_+^M$) の間の絡作用素は, 作用素 C_λ^ϵ および A_λ^ϵ の適当な巾乗の積によって与えられる. とくに $\nu = (\nu_\lambda)$ について, $\prod_{\lambda \in \Lambda} (\nu_\lambda!)^{-1/2} (C_\lambda^\epsilon)^{\nu_\lambda}$ は G の表現 $(L, L_{e,0}^2(\Sigma))$ から $(L, L_{e,\nu}^2(\Sigma))$ への unitary 同値を与える.

定理 4.3 (i), (ii) とほぼ同じ結果が $r = 1$ のときには Liu-Peng [5] によって得られている.

最後に函数空間 $L_{e,\nu}^2(\Sigma)$ に対する Cauchy-Szegö 核の類似物について述べる. 非負整数 $m \in \mathbb{Z}_+$ について, m 次の Laguerre 多項式を ψ_m とする:

$$\psi_m(s) := \frac{e^s}{m!} \left(\frac{d}{ds} \right)^m \left[e^{-s} s^m \right].$$

パラメータ $\nu = (\nu_\lambda) \in \mathbb{Z}_+^M$ について $\mathfrak{g}(1/2)$ 上の 2 変数函数 k_ν および $\kappa_{\xi,\nu}$ ($\xi = t \cdot E_e^* \in \mathcal{O}^*$) を

$$\begin{aligned} k_\nu(u, u') &:= \pi^{-M} \prod_{\lambda \in \Lambda} \psi_{\nu_\lambda}(|u_\lambda - u'_\lambda|^2), \\ \kappa_{\xi,\nu}(u, u') &:= \chi_{1/2}(t)^2 k_\nu(t^{-1} \cdot u, t^{-1} \cdot u') \quad (u, u' \in \mathfrak{g}(1/2)) \end{aligned}$$

と定める.

補題 4.4. Hilbert 空間 $\mathcal{L}_{\xi,\nu}$ は $\tilde{\kappa}_{\xi,\nu}(u, u') := e^{q_\epsilon(u, u')} \kappa_{\xi,\nu}(u, u')$ ($u, u' \in \mathfrak{g}(1/2)$) で定まる函数 $\tilde{\kappa}_{\xi,\nu} : \mathfrak{g}(1/2) \times \mathfrak{g}(1/2) \rightarrow \mathbb{C}$ を再生核としてもつ.

パラメータ $\varepsilon \in \{-1, 1\}^r$ と $\nu \in \mathbb{Z}_+^M$ に対して函数 $S_{\varepsilon, \nu} : D \times \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$S_{\varepsilon, \nu}((z, u), (z', u')) := \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{\dim \mathfrak{g}(1)}} \int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*} e^{\gamma(\frac{z-\bar{z}'}{i} - 2Q(u, u'), \xi)} \kappa_{\xi, \nu}(u, u') dm(\xi) \quad (4.5)$$

$$((z, u) \in D, (z', u') \in \Sigma)$$

によって定義する.

定理 4.5. 函数 $f \in L^2(\Sigma)$ と $\varepsilon \in \{-1, 1\}^r$, $\nu \in \mathbb{Z}_+^M$ および $p \in D$ について

$$F_{\varepsilon, \nu}(p) := \int_{\Sigma} S_{\varepsilon, \nu}(p, p') f(p') dm(u') dm(x') \quad (p' = (x' + iQ(u', u'), u'))$$

とする.

- (i) この積分は絶対収束し, $F_{\varepsilon, \nu}$ は Siegel 領域 D 上の C^∞ 函数である.
- (ii) 正則錐 Ω の元 y と $(z_0, u_0) \in \Sigma$ について $\tilde{F}_{\varepsilon, \nu}(z_0, u_0; y) := F_{\varepsilon, \nu}(z_0 + iy, u_0)$ とすると, Σ 上の函数 $\tilde{F}_{\varepsilon, \nu}(\cdot, \cdot; y)$ は $L^2_{\varepsilon, \nu}(\Sigma)$ に属する.
- (iii) 元 $y \in \Omega$ が 0 に近づくととき, $\tilde{F}_{\varepsilon, \nu}(\cdot, \cdot; y)$ は $L^2(\Sigma)$ の元として或る $f_{\varepsilon, \nu} \in L^2(\Sigma)$ に収束する (すなわち $\lim_{y \in \Omega, y \rightarrow 0} \|\tilde{F}_{\varepsilon, \nu}(\cdot, \cdot; y) - f_{\varepsilon, \nu}\| = 0$). このとき $f_{\varepsilon, \nu} \in L^2_{\varepsilon, \nu}(\Sigma)$ かつ $f = \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^r} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+^M} f_{\varepsilon, \nu}$.
- (iv) $f \in L^2_{\varepsilon, \nu}(\Sigma)$ の必要十分条件は $f = f_{\varepsilon, \nu}$.

すなわち $f_{\varepsilon, \nu}$ は既約分解 (4.4) による f の $L^2_{\varepsilon, \nu}(\Sigma)$ -成分であり, これは D 上の C^∞ 函数 $F_{\varepsilon, \nu}$ の L^2 -境界値として与えられる. さらに定義式 (4.5) と [2, Theorem 5.3] を比べて, 次の結果を得る.

定理 4.6. 函数 $S_{0, (1, \dots, 1)} : D \times \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ は Siegel 領域 D の Cauchy-Szegő 核である. よって函数空間 $L^2_{0, (1, \dots, 1)}(\Sigma)$ は D 上の Hardy 空間と一致する.

後半の事実は, 命題 4.1 (iii), (4.2) および 定理 4.3 (ii) と Korányi-Stein [7] の結果を比べることによっても得られる ([9] も参照). 言い換えれば, 定理 4.3 (ii) は Hardy 空間に関する Paley-Wiener の定理の拡張になっている.

References

- [1] P. Bernat et al., "Représentations des groupes de Lie résolubles," Dunod, Paris, 1972.
- [2] S. G. Gindikin, *Analysis in homogeneous domains*, Russian Math. Surveys 19 (1964), 1-89.
- [3] H. Ishi, *Harmonic analysis on the Shilov boundary of a homogeneous Siegel domain*, preprint.

- [4] H. Liu, *Wavelet transform and symmetric tube domains*, J. Lie Theory **8** (1998), 351–366.
- [5] H. Liu and L. Peng, *Admissible wavelets associated with the Heisenberg group*, Pacific J. Math. **180** (1997), 101–123.
- [6] A. A. Kirillov, *Représentations unitaire des groupes de Lie nilpotents*, Uspekhi Math. Nauk. **17** (1962), 57–110.
- [7] A. Korányi and E. M. Stein, *H^2 spaces of generalized half-planes*, Studia Math. **44** (1972), 379–388.
- [8] T. Nomura, *Harmonic analysis on a nilpotent Lie group and representations of a solvable Lie group on $\tilde{D}_k$ cohomology spaces*, Japan. J. Math. **13** (1987), 277–332.
- [9] R. D. Ogden and S. Vági, *Harmonic Analysis of a nilpotent group and function theory on Siegel domains of type II*, Adv. in Math. **33** (1979), 31–92.
- [10] I. I. Piatetskii-Shapiro, “Automorphic functions and the geometry of classical domains,” Gordon and Breach, New York, 1969.
- [11] H. Rossi and M. Vergne, *Representations of certain solvable Lie groups on Hilbert spaces of holomorphic functions and the application to the holomorphic discrete series of a semisimple Lie group*, J. Funct. Anal. **13** (1973), 324–389.
- [12] M. Vergne and H. Rossi, *Analytic continuation of the holomorphic discrete series of a semi-simple Lie group*, Acta Math. **136** (1976), 1–59.
- [13] E. B. Vinberg, S. G. Gindikin, and I. I. Piatetskii-Shapiro, *Classification and canonical realization of complex bounded homogeneous domains*, Trans. Moscow Math. Soc. **12** (1963), 404–437.