

3重点をもつ4次曲面の分類について

筑波大 数学大学院 高橋 正

3重点をもつ4次曲面を、その曲面上に現われる特異点によって分類を行う。

1. 分類の方法

分類の方法として Arnold の結果を使う。特に擬斉次多項式に対する認識原理 (recognition principle) を、しばしば用いる。

いま P を4次曲面 V 上の特異点とすると、我々は線型変換により、 P を $\mathbb{P}^3$ における点 $[0, 0, 0, 1]$ に移すことができる。その時、この4次曲面を表わす式は、

$$F = f_2(X, Y, Z)W^2 + f_3(X, Y, Z)W + f_4(X, Y, Z)$$

となる。

ただし、 $f_i(X, Y, Z)$ は次数 i の同次式を表わす。

そして3重点をもつという条件により $f_3(X, Y, Z) = 0$ となり、
 $F = 0$ は

$$F = f_3(X, Y, Z)W + f_4(X, Y, Z)$$

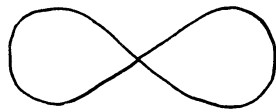
となる。

その時 $f_3(X, Y, Z)$ が線型変換によって移り得なければ
 $F=0$ の P における特異点が異なることにより、 $f_3(X, Y, Z) = 0$
 の分類によつて $F=0$ の分類を行うことができる。

$f_3(X, Y, Z)$ は、線型変換により、下記のように分類され、
 それぞれの標準型は以下のようなになる。

f_3 の標準型

Nodal curve



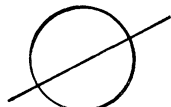
$$XYZ + Y^3 + Z^3 = 0$$

Cuspidal curve



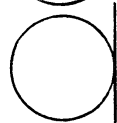
$$X^3 - Y^2Z = 0$$

Conic and chord



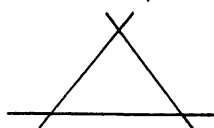
$$Z(XY + Z^2) = 0$$

Conic and tangent



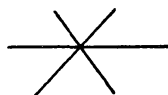
$$Z(XZ + Y^2) = 0$$

Three general line



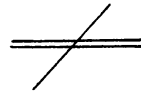
$$XYZ = 0$$

Three concurrent line



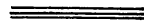
$$Y^3 + Z^3 = 0$$

Multiple and single line



$$YZ^2 = 0$$

Triple line



$$Z^3 = 0$$

Non-singular elliptic curve



$$X^3 + Y^3 + Z^3 + 3\lambda XYZ = 0$$

$$(\lambda^3 \neq -1)$$

上記のような各々の場合を、それぞれ $NC, CC, QP, QT, TG, TC, MS, TP, NS$ として各々の場合について順に示してゆく。

以下において我々は、3重点をもつ4次曲面は孤立特異点のみを持ち、既約であると仮定する。

また、特異点の記号については、最後に記号と式の表を付け加える。

2. 分類

Case NC

Lemma 1.
$$F = (XYZ + Y^3 + Z^3)W + f_4(X, Y, Z),$$

$$G = (XYZ + Y^3 + Z^3)W + g_4(X, Y, Z),$$

とする。

ただし、 $f_4(X, Y, Z), g_4(X, Y, Z)$ を4次の X, Y, Z の同次式とし、

$$\begin{aligned}
f_4(X, Y, Z) = & c_0 X^4 + c_1 X^3 Y + c_2 X^3 Z + c_3 X^2 Y^2 + c_4 X^2 Y Z + c_5 X^2 Z^2 \\
& + c_6 X Y^3 + c_7 X Y^2 Z + c_8 X Y Z^2 + c_9 X Z^3 + c_{10} Y^4 + c_{11} Y^3 Z \\
& + c_{12} Y^2 Z^2 + c_{13} Y Z^3 + c_{14} Z^4
\end{aligned}$$

とする。

(a) $F=0$ と $G=0$ が“線型同値ならば、かつそのときに限り、 $f_4(-\theta^3-\phi^3, \theta^2\phi, \theta\phi^2)$ と $g_4(-\theta^3-\phi^3, \theta^2\phi, \theta\phi^2)$ は 12 次の多項式として P を固定して線型同値である。

(b) $F=0$ の P 以外の特異点は、 $f_3 = XYZ + Y^3 + Z^3 = 0$ と $f_4(X, Y, Z) = 0$ との P^2 における $[1, 0, 0]$ 以外の重複点に対応する。

(c) $f_3 = 0$ と $f_4 = 0$ の P^2 における $[1, 0, 0]$ 以外の k -重点は、 P^3 における $F=0$ の A_{k-1} 特異点に対応する。

(d) もし、 $f_4(1, 0, 0) \neq 0$ ならば P は $T_{3,3,4}$ 特異点であり、 k を *Nodal curve* の $[1, 0, 0]$ における 2 つの分岐のうちの一方向に対する接触位数とするとき、もう一方の分岐への接触位数が 1 ならば、 P は $T_{3,3,4+k}$ 特異点となる。

また、2 つの分岐に対して $f_4(X, Y, Z)$ が、両方とも 2 以上の接触をすれば、 P は孤立特異点ではなくなる。

(e) P^3 における点 $[1, 0, 0, 0]$ は、特異点ではない。

証明 (以後の Lemma についても) 略。

例. 次の式は、 P において各々下記の特異点を持つ。

例 1. $T_{3,3,11}$

$$F = X^3Y - X^2Z^2 - XY^2Z + Y^3Z + (XYZ + Y^3 + Z^3)W.$$

例 2. $T_{3,3,12}$

$$F = X^3Y + X^2Z^2 + Y^4 + YZ^3 + (XYZ + Y^3 + Z^3)W.$$

例 3. $T_{3,3,13}$

$$F = X^3Y + X^2Y^2 + X^2Z^2 + XYZ^2 + 2Y^4 - Y^3Z + YZ^3 \\ + (XYZ + Y^3 + Z^3)W.$$

例 4. $T_{3,3,14}$

$$F = X^3Y + X^2Y^2 + X^2Z^2 + XYZ^2 + 2Y^4 - Y^3Z + YZ^3 \\ + (XYZ + Y^3 + Z^3)W.$$

例 5. $T_{3,3,15}$

$$F = X^3Y + X^2Z^2 + 2Y^4 + YZ^3 + (XYZ + Y^3 + Z^3)W.$$

例 6. $T_{3,3,11}$

$$F = X^3Y - 4X^2Y^2 + X^2Z^2 + 6XY^3 + 2XY^2Z - 4XYZ^2 + 5Y^3Z + 6Y^2Z^2 \\ + 3YZ^3 + (XYZ + Y^3 + Z^3)W.$$

例 7. $T_{3,3,11}$

$$F = X^3Y - 2X^2Y^2 + X^2Z^2 - 2XY^2Z - 2XYZ^2 + 2Y^4 + 3Y^3Z - YZ^3 \\ + (XYZ + Y^3 + Z^3)W.$$

例 8. $T_{3,3,11}$

$$F = X^3Y + X^2Z^2 - 2XY^3 + 2Y^4 - Y^3Z - 2Y^2Z^2 + YZ^3 \\ + (XYZ + Y^3 + Z^3)W.$$

例 9. $T_{3,3,11}$

$$F = X^3Y - 2X^2Y^2 + X^2Z^2 + XY^3 - 2XYZ^2 + Y^3Z + Y^2Z^2 + YZ^3 \\ + (XYZ + Y^3 + Z^3)W.$$

例 10. $T_{3,3,11}$

$$F = X^3Y - 3X^2Y^2 + X^2Z^2 + 3XY^3 - 3XYZ^2 + Y^4 + 3Y^3Z + 3Y^2Z^2 \\ + YZ^3 + (XYZ + Y^3 + Z^3)W.$$

例 11. $T_{3,3,12}$

$$F = X^3Y + X^2Y^2 + X^2Z^2 - XY^3 + XYZ^2 + Y^4 - Y^3Z - Y^2Z^2 + YZ^3 \\ + (XYZ + Y^3 + Z^3)W.$$

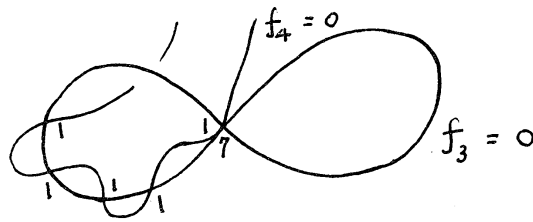
例12. $T_{3,3,13}$

$$F = X^3Y + X^2Y^2 + X^2Z^2 - XY^3 + XYZ^2 + Y^4 - Y^3Z - Y^2Z^2 + YZ^3 \\ + (XYZ + Y^3 + Z^3)W.$$

以上の12個の例は、下記のような性質をもつ。

例番号	$[1, 0, 0]$ 以外での $f_3 = 0$ と $f_4 = 0$ の接触の状態
例 1.	1^4
例 2.	1^3
例 3.	1^2
例 4.	1
例 5.	0
例 6.	4
例 7.	1.3
例 8.	2.2
例 9.	$1^2.2$
例 10.	3
例 11.	1.2
例 12.	2

分割の記号は、たとえば 1^4 のときは、 $[1, 0, 0]$ において $f_3 = 0$ と $f_4 = 0$ が一つの分岐に対して 1 位に接触し、もう一つの分岐に対して 7 位の接触をし、 $[1, 0, 0]$ 以外に異なった 4 点においてそれぞれ 1 位に接触していることを示す。



Case CC

Lemma 2. $F = (X^3 - Y^2Z)W + f_4(X, Y, Z),$
 $G = (X^3 - Y^2Z)W + g_4(X, Y, Z),$

とする。

(a) $F = 0$ と $G = 0$ が線型同値ならばそのときに限り $f_4(\theta^2\phi, \theta^3, \phi^3)$ と $g_4(\theta^2\phi, \theta^3, \phi^3)$ は 12 次の多項式として線型同値である。

(b) $F = 0$ の P 以外の特異点は、 $f_3 = 0$ と $f_4 = 0$ の $[0, 0, 1]$ 以外の重複点と対応する。

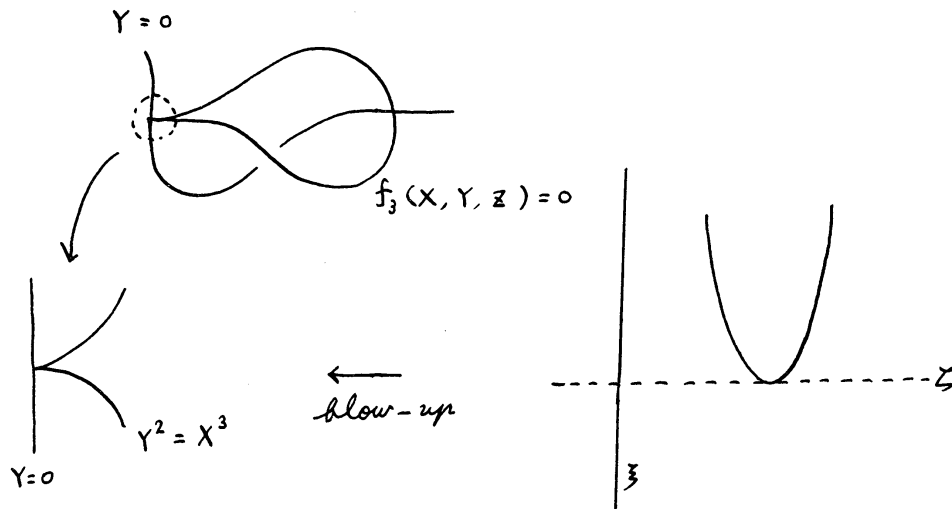
(c) $f_3 = 0$ と $f_4 = 0$ の $[0, 0, 1]$ 以外の g -重点は、 $\mathbb{P}^3$ における $F = 0$ の A_{k-1} 特異点に対応する。

(d) もし、 $f_4(0, 0, 1) \neq 0$ 、すなわち $C_{14} = 0$ ならば P は Q_{10} 特異点であり、 $C_{14} = 0$ 、 $C_9 \neq 0$ すなわち $[0, 0, 1]$ において $f_3 = 0$ と $f_4 = 0$ が 2 位の接触をするならば、 P は Q_{11} 特異点であり、 $C_{14} = C_9 = 0$ 、 $C_{13} \neq 0$ すなわち $[0, 0, 1]$ において $f_3 = 0$ と $f_4 = 0$ が 3 位の接触をするならば、 P は Q_{12} 特異点である。

(e) $\mathbb{P}^3$ における点 $[0, 0, 1, 0]$ は、特異点ではない。

証明略

$F = 0$ の点 $[0, 0, 1, 0]$ は 特異点ではない。なぜなら $f_4 = 0$ が $[0, 0, 1]$ において、 $f_3 = 0$ に 多重の接触をしても、1 回の *blow-up* で $f_3 = 0$ と $f_4 = 0$ は 離れて しまうからである。



この結果は、上の Lemma 2. に対応している。

Case QP

Lemma 3. $F = z(xy + z^2)w + f_4(x, y, z)$ とする。

(a) $F = 0$ の P 以外の特異点は、 $[1, 0, 0]$ と $[0, 1, 0]$ 以外の $f_3 = 0$ と $f_4 = 0$ の重複点に対応する。

(b) $f_3 = 0$ と $f_4 = 0$ の $[1, 0, 0]$ と $[0, 1, 0]$ 以外の k -重点は、 $F = 0$ の A_{k-1} 特異点に対応する

(c) $f_4(1, 0, 0) \neq 0$ かつ $f_4(0, 1, 0) \neq 0$ ならば、

P は $T_{3,4,4}$ 特異点である。

そして、 $[1, 0, 0]$ における $z=0$ と $f_4=0$ の接触位数を k_0 ,
 $xy+z^2=0$ と $f_4=0$ の接触位数を J_0 とし、 $[0, 1, 0]$ におけ
 る $z=0$ と $f_4=0$ の接触位数を K_1 , $xy+z^2=0$ と $f_4=0$ の接
 触位数を J_1 とすると、 P は $T_3, 4+k, 4+r$ 特異点である。

ただし、 $k = \text{Max.}(k_0, J_0)$, $r = \text{Max.}(K_1, J_1)$

であり、 k_0 と J_0 のどちらか一方は1であり、両方が0である
 ことはなく、 K_1 と J_1 のどちらか一方は1であり、両方が0で
 はない。

もし、 k_0 と J_0 の両方が2以上または K_1 と J_1 の両方が2以上
 ならば、 P は孤立特異点ではない。

Case QT

Lemma 4. $F = z(xz + y^2)w + f_4(x, y, z)$ とする。

(a) $F=0$ の P 以外の特異点は $f_3=0$ と $f_4=0$ の $[1, 0, 0]$
 以外の重複点に対応する。

(b) $f_3=0$ と $f_4=0$ の $[1, 0, 0]$ 以外の k -重点は、 $F=0$
 の A_{k-1} 特異点に対応する。

- (c) $f_4 = 0$ と $Z = 0$ の $[1, 0, 0]$ での接触位数を J ,
 $f_4 = 0$ と $XZ + Y^2 = 0$ の $[1, 0, 0]$ での接触位数を L ,
 とするとき.

P は次の条件によって決まる。

J	L	P の type
0	0	s_{11}
1	1	s_{12}
2	2	s_{14}
3	2	s'_{13+2}
4	2	s'_{13+3}
2	3	s_{13+2}
2	4	s_{13+3}
2	5	s_{13+4}
2	6	s_{13+5}

2	7	S_{13+6}
2	8	S_{13+7}

もし、 J と L がともに 3 以上ならば、 P は孤立特異点ではない。

Case TG

Lemma 5. $F = XYZW + f_4(X, Y, Z)$ とする。

(a) $F=0$ の P 以外の特異点は $f_3=0$ と $f_4=0$ の $[1, 0, 0]$ と $[0, 1, 0]$ と $[0, 0, 1]$ 以外の重複点に対応する。

(b) $f_3=0$ と $f_4=0$ の $[1, 0, 0]$ と $[0, 1, 0]$ と $[0, 0, 1]$ 以外の h -重点は $F=0$ の A_{h-1} 特異点に対応する。

(c) $f_4=0$ と $Y=0$ の $[1, 0, 0]$ での接触位数を $K(Y)$,
 $f_4=0$ と $Z=0$ の $[1, 0, 0]$ での接触位数を $K(Z)$,
 $f_4=0$ と $X=0$ の $[0, 1, 0]$ での接触位数を $L(X)$,

$f_4=0$ と $Z=0$ の $[0, 1, 0]$ での接触位数を $L(Z)$,

$f_4=0$ と $X=0$ の $[0, 0, 1]$ での接触位数を $M(X)$,

$f_4=0$ と $Y=0$ の $[0, 0, 1]$ での接触位数を $M(Y)$

とすると、

P は $T_{4+K, 4+L, 4+M}$ 特異点である。

さらに、 $K = \max. (K(Y), K(Z))$, $L = \max. (L(X), L(Z))$,

$M = \max. (M(X), M(Y))$ であり、

かつ、 $\min. (K(Y), K(Z)) = 0$ または 1 , $\min. (L(X), L(Z))$

$= 0$ または 1 , $\min. (M(X), M(Y)) = 0$ または 1 , である。

もし、 $K(Y)$ と $K(Z)$ の両方が "2 以上" であるかまたは、

$L(X)$ と $L(Z)$ の両方が "2 以上" であるかまたは、

$M(X)$ と $M(Y)$ の両方が "2 以上" であるならば、

P は孤立特異点ではない。

例、次の式は P において $T_{7,7,7}$ 特異点をもつ。

$$F = X^3Y + Y^3Z + XZ^3 + XYZW.$$

Case TC

Lemma 6.

(a) $F=0$ の P 以外の特異点は $f_3=0$ と $f_4=0$ の $[1, 0, 0]$ 以外の重複点に対応する。

(b) $f_3=0$ と $f_4=0$ の $[1, 0, 0]$ 以外での k -重点は $F=0$ の A_{k-1} 特異点に対応する。

(c) $\omega^3 = -1$ とし、

$f_4=0$ と $Y+Z=0$ の $[1, 0, 0]$ での接触位数を K ,
 $f_4=0$ と $Y+\omega Z=0$ の $[1, 0, 0]$ での接触位数を L ,
 $f_4=0$ と $Y+\omega^2 Z=0$ の $[1, 0, 0]$ での接触位数を M ,
 とするとき、

P は次のような条件によって決まる。

K	L	M	P の type
0	0	0	U_{12}
1	1	1	U_{14}
2	1	1	U_{13+2}

1	1	2	U_{13+2}
1	2	1	U_{13+2}
3	1	1	U_{13+3}
1	1	3	U_{13+3}
1	3	1	U_{13+3}
4	1	1	U_{13+4}
1	1	4	U_{13+4}
1	4	1	U_{13+4}

もし、 K, L, M のいずれかが二つが2以上ならば、 P は孤立特異点ではない。

Case MS

Lemma 7. $F = YZ^2W + f_4(X, Y, Z)$ とする。

(a) $F=0$ の P 以外の特異点は、 $f_3=0$ と $f_4=0$ の $[1,0,0]$ 以外の重複点に対応する。

(b) $f_3=0$ と $f_4=0$ の $[1,0,0]$ 以外の k -重点は、 $F=0$ の A_{k-1} 特異点に対応する。

(c) $f_4=0$ と $Z=0$ の $[1,0,0]$ での接触位数を K ,
 $f_4=0$ と $-Y=0$ の $[1,0,0]$ での接触位数を J ,
 $f_4=0$ と $Z=0$ の $[1,0,0]$ 以外での接触の分割を $Par.$
とすると、

P は次の条件によって決まる。

K	J	$Par.$	P の type
0	0	4	$1^V_{18}^*$
0	0	1.3	1^V_{17}
0	0	2.2	1^V_{15+1+1}
0	0	$1^2.2$	1^V_{15+1}
0	0	1^4	V_{15}

1	1	3	1^V_{17+1}
1	1	1.2	2^V_{15+1+1}
1	1	1^3	2^V_{15+1}
1	2	3	1^V_{17+2}
1	3	3	1^V_{17+3}
1	4	3	1^V_{17+4}
1	2	1.2	2^V_{15+2+1}
1	3	1.2	2^V_{15+3+1}
1	4	1.2	2^V_{15+4+1}
1	2	1^3	2^V_{15+2}
1	3	1^3	2^V_{15+3}
1	4	1^3	2^V_{15+4}
2	1	1^2	2^V_{17}

2	1	2	2^V_{17+1}
3	1	1	2^{V*}_{18}
4	1	0	3^{V*}_{19}

もし、 K, J が両方とも 2 以上ならば、 P は孤立特異点ではない。

Case TP

Lemma 8. $F = Z^3W + f_4(X, Y, Z)$ とする。

(a) $F = 0$ は P 以外に特異点をもたない。

(b) $f_4(X, Y, Z) = 0$ と $Z = 0$ の接触の分割を $Par.$ とすると、

P は、次の条件によって決まる。

$Par.$	P の type
4	V'_{21}

2.2	$2V''_{20}$
1.3	V'_{20}
$1^2.2$	V''_{19}
1^4	V'_{18}

Case NS

Lemma 9. $F = (X^3 + Y^3 + Z^3 + 3\lambda XYZ)W + f_4(X, Y, Z)$
 $(\lambda^3 \neq -1)$ とする。

そのとき、 P 以外の点 Q において、 $F=0$ は非特異である
 か、または A_4 特異点を持つ。

ただし、 $F=0$ は Q を通り、 $1 \leq h \leq 11$

このとき、 P は $f_4(X, Y, Z)=0$ の状態によらず、 $\tilde{E}_6$ 特異点
 である。

例. 次の式は $[0, 0, 0, 1]$ において $\widetilde{E}_6$ 特異点を持ち、
 $[1, -1, 0, 0]$ において A_{11} 特異点を持つ。

$$F = (6X^3 + 6Y^3 + 6Z^3 + 18XYZ)W - 3X^4 - 5X^3Z + 6X^2Y^2 - 24X^2YZ \\
+ 6X^2Z^2 - 24XY^2Z + 9XYZ^2 - 8XZ^3 - 3Y^4 - 5Y^3Z + 6Y^2Z^2 \\
- 8YZ^3.$$

特異点記号と式の表	
$T_{p,q,r}$	$X^p + Y^q + Z^r + aXYZ = 0$ (a : const.)
Q_{10}	$XZ^2 + Y^3 = X^4$
Q_{11}	$XZ^2 + Y^3 = X^3Y$
Q_{12}	$XZ^2 + Y^3 = X^5$
S_{11}	$Z(XZ + Y^2) = X^4$

S_{12}	$z(xz + y^2) = x^3y$
S_{14}	$z(xz + y^2) = x^5$
S_{13+n} ($n \geq 2$)	$z(xz - 2y^2) = x^2y^2 + (y^2 + x^3)x^{n+1}$
S'_{13+n} ($n \geq 2$)	$z(xz - 2y^2) = 2x^2y^2 + x^5 + x^a y^b$ ($2a + 3b = n + 9$)
U_{12}	$y^3 + z^3 = x^4$
U_{14}	$y^3 + z^3 = x^3y$
U_{13+n} ($n \geq 2$)	$y^3 + z^3 = x^3(y + z) + x^a y^b$ ($2a + 3b = n + 8$)
V_{15}	$yz^2 = x^4 + y^4$
1^V_{15+n} ($n \geq 1$)	$yz^2 = x^4 + x^2y^2 + y^{n+4}$
2^V_{15+n} ($n \geq 1$)	$yz^2 = y^4 + x^3y + x^a z^b$ ($2a + 3b = n + 8$)
1^V_{17}	$yz^2 = x^4 + x^3y + y^5$
2^V_{17}	$yz^2 = y^4 + x^2y^2 + x^3z$

1^V_{15+m+n} ($m, n \geq 1$)	$(X + Y)Z^2 = X^2Y^2 + X^{n+4} + Y^{m+4}$
2^V_{15+m+n} ($m, n \geq 1$)	$YZ^2 = X^3Y + X^2Y^2 + Y^{n+4} + X^aZ^b$ ($2a + 3b = m + 8$)
1^{V*}_{18}	$YZ^2 = X^4 + Y^5$
2^{V*}_{18}	$YZ^2 = XY^3 + X^3Z$
3^{V*}_{19}	$YZ^2 = Y^4 + X^3Z$
1^V_{17+n}	$YZ^2 = X^3Y + X^aZ^b + Y^5$ ($2a + 3b = n + 8$)
2^V_{17+n}	$YZ^2 = X^2Y^2 + Y^{n+4} + X^3Z$
1^V_{18+n}	$YZ^2 = X^3Y + X^aZ^b + XY^4$ ($2a + 3b = n + 8$)
V'_{18}	$Z^3 = Y^4 + X^4$
V''_{19}	$Z^3 = Y^4 + X^2Y^2 + X^3Z$
V'_{20}	$Z^3 = XY^3 + X^3Z$
V'_{21}	$Z^3 = Y^4 + X^3Z$

$2V''_{20}$	$z^3 = x^2y^2 + x^3z + y^3z$
A_n	$x^2 + y^2 + z^{n+1} = 0$

以上の内容の詳細については *preprint* (9) を御参照下さい。

参考文献

- (1) C.M. Jessop M.A. " Quartic surface with singular points"
Cambridge at the univ. press (1916)
- (2) V.I. Arnol'd " Normal forms for functions near degenerate
critical points, the Weyl groups A_k , D_k and E_k and Lagran-
gian singularities" Funk. anal. Appl. 6 (1972)
- (3) V.I. Arnol'd " Normal forms of functions near degenerate
critical points" Russian Math. Surveys 29(2) (1974)
11-49
- (4) J.W.Bruce and C.T.C.Wall "On the classification of cubic
surfaces " J.London Math. Soc. (2) 19 (1979)245-256
- (5) H.B.Laufer "On minimally elliptic singularities"
Amer. J.Math. 99 (1977) 1257-1295
- (6) Y.Umezu " On Nomal Projective surfaces with $\omega_X \cong \mathcal{O}_X$ "
Preprint (1980)

- (7) U.Karras " Deformations of cusp singularities"
Proc. symp. In pure Math. A.M.S. 30 (1977) 34-44
- (8) 多変数複素解析入門, 樋口, 吉永, 渡辺
森北数学ライブラリー51, 1980, 森北出版
- (9) T.Takahashi " On the classification of the Quartic surfaces
with a triple point" Preprint (1982)