

特性汎函数方程式の解法

Tatarski の仕事を中心に

京大 数研 川 原 琢 治

§ 1. 序

特性汎函数方程式 (Hopf 方程式) が乱れの場の統計的に完全な記述を与えることは良く知られている。この方程式が解けて、初期条件を含む形の解が得られたとすると、一様な乱れの問題は解決したと言える。しかし、この汎函数微積分方程式を厳密に解くことは、汎函数空間での積分の一般論がまだ確立されていない (汎函数方程式の解の存在及び一意性の問題さえも十分研究されているとは言えない) という事情などのため非常に困難である。しかしながら、通常の微分方程式を解く場合と同様な近似解法、または、量子場理論の方程式と特性汎函数方程式とのアナロジーを利用して、量子場理論の分野で開発されている手法を用いる解法などが考えられてきた。

この稿では、特性汎函数方程式の種々の近似解法を列挙し、最後に、量子場理論に於ける摂動のテクニックを応用して特性汎函数方程式の Reynolds 数によらない形式解を得た Tatarski の仕事¹⁾を紹介する。

§ 2. 特性汎函数方程式

非圧縮粘性流体に於ける乱れを、Navier-Stokes 方程式及び連続の方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} + \nu \Delta \mathbf{u} ,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 , \quad (\text{A})$$

に従う速度場 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ の偶然運動と定義したとき、この乱れの場の統計的に完全な記述は、その場 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ の分布函数に対する知識によって与えられる。 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ の分布函数を $P[\mathbf{u}(\mathbf{x})]$ としたとき、 $P[\mathbf{u}(\mathbf{x})]$ の時間的变化を支配する方程式を $\mathbf{u}$ に対する運動方程式 (A) と確率保存則とを用いて導いたものが、分布汎函数方程式と呼ばれているものである。あるいは分布函数 $P[\mathbf{u}(\mathbf{x})]$ の

Fourier 変換である特性汎函数 $\Phi[\mathbf{y}(\mathbf{x})]$ に対する同様な方程式は特性汎函数方程式と呼ばれる。

物理空間での方程式 (A) の代りに Fourier 変換された Navier-Stokes 方程式について考える方が便利ことが多い。

$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ の Fourier 変換を $\mathbf{v}(\mathbf{k}, t)$ とすると

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int \mathbf{v}(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{k}.$$

このとき (A) 式の Fourier 変換は、圧力項を消去して、

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(\mathbf{k}, t) = -\nu k^2 \mathbf{v}(\mathbf{k}) - i \int \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \left\{ \mathbf{v}(\mathbf{k}') - \frac{\mathbf{k}}{k^2} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{k}')) \right\} d\mathbf{k}',$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{k}) = 0, \quad (\text{B})$$

となる。

$\mathbf{v}(\mathbf{k})$ に対する分布汎函数を $P[\mathbf{v}(\mathbf{k})]$ とすると、その Fourier 変換によって特性汎函数 $\psi[\mathbf{z}(\mathbf{k})]$ が定義される。

$$\psi[\mathbf{z}(\mathbf{k})] = \overline{\exp i(\mathbf{z} \cdot \mathbf{v})} = \int \exp i(\mathbf{z} \cdot \mathbf{v}) P[\mathbf{v}(\mathbf{k})] d\mathbf{v}(\mathbf{k}).$$

$$(\mathbf{z} \cdot \mathbf{v}) = \int \mathbf{z}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{z}(-\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad \begin{aligned} \mathbf{z}(\mathbf{k}) &= \mathbf{z}^*(-\mathbf{k}) \\ \mathbf{v}(\mathbf{k}) &= \mathbf{v}^*(-\mathbf{k}) \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} * : \text{複素} \\ \text{共役} \end{array} \right)$$

$\psi[\mathbf{z}(\mathbf{k})]$ の時間変化を記述する特性汎函数方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\nu \int k^2 z_\alpha(\mathbf{k}) D_\alpha(\mathbf{k}) \psi d\mathbf{k} \\ &\quad + \iint \tilde{z}_\alpha(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'') k_\beta'' D_\beta(\mathbf{k}') D_\alpha(\mathbf{k}'') \psi d\mathbf{k}' d\mathbf{k}'', \end{aligned} \quad (\text{C})$$

$$\text{ここに } D_\alpha(\mathbf{k}) = \frac{\delta}{\delta z_\alpha(\mathbf{k}) d\mathbf{k}}, \quad \tilde{z}_\alpha(\mathbf{k}) = \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) z_\beta(\mathbf{k}).$$

$\psi[\mathbf{z}(\mathbf{k})]$ が特性函数であるためには次の条件

$$\begin{aligned} |\psi[\mathbf{z}(\mathbf{k}), t]| &\leq 1, \quad \psi[0, t] = 1 \\ \psi^*[\mathbf{z}(\mathbf{k}), t] &= \psi[-\mathbf{z}(\mathbf{k}), t] \end{aligned} \quad (\text{D})$$

をみたす必要がある。^{2~4)}

このような ψ が求まれば、それを汎函数微分することにより任意の次数の積平均値を求めることができる。

§ 3. 特性汎函数方程式の極限の場合の解

弱い乱れ及び非粘性の極限の場合には、次のような解が求められている。

(i) 弱い乱れの極限^{2,3,4)}

慣性項を無視した特性汎函数方程式

$$\frac{\partial \psi[\tilde{\mathbf{z}}]}{\partial t} + \nu \int k^2 \tilde{z}_\alpha(\mathbf{k}) \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{z}_\alpha(\mathbf{k})} d\mathbf{k} = 0$$

に対しては、一様正規分布の特性汎函数

$$\psi[\tilde{\mathbf{z}}] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int a_{ij}(\mathbf{k}, -\mathbf{k}) \tilde{z}_i(\mathbf{k}) \tilde{z}_j(-\mathbf{k}) \exp[-2\nu k^2 t] d\mathbf{k} \right\}$$

が解になっている。

汎函数微分により、エネルギー・スペクトルは

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) &= \Phi_{ij}(\mathbf{k}, 0) \exp[-2\nu k^2 t], \\ \Phi_{ij}(\mathbf{k}, 0) &= \left(\delta_{il} - \frac{k_i k_l}{k^2} \right) \left(\delta_{jm} - \frac{k_j k_m}{k^2} \right) a_{lm}(\mathbf{k}, -\mathbf{k}) \end{aligned}$$

となり、積平均値理論による弱い乱れのエネルギー・スペクトルと一致する。

(ii) 非粘性の極限^{($\nu=0$)^{2,3,5)}}

この場合には、乱れのエネルギーの粘性による消散は存在しないので、乱れが統計的平衡状態にあることが可能と考えられ、位相分布は時間的に定常、すなわち $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$ とできる。このとき等方的正規分布 $\psi[\tilde{\mathbf{z}}] = \exp \left\{ -\frac{a}{2} \int |\tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} \right\}$ が特性汎函数方程式の定常解になっている。

エネルギー・スペクトル密度は $\Phi(k) = a$ であり、波数空間でのエネルギー等分配を表わす。

§ 4. 特性汎函数方程式の近似解法

(1) 汎函数ベキ級数展開¹⁷⁾

特性汎函数を次の形の汎函数ベキ級数に展開する。

$$\psi = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n$$

ただし、 ψ_n は n 次の同次ベキ汎函数、

$$\psi_n[\mathbf{z}(\mathbf{k}), t] = \int \cdots \int z_{\alpha_1}(\mathbf{k}_1) \cdots z_{\alpha_n}(\mathbf{k}_n) \psi_{\alpha_1 \cdots \alpha_n}(\mathbf{k}_1, \cdots, \mathbf{k}_n; t) d\mathbf{k}_1 \cdots d\mathbf{k}_n$$

である。ここで、 $\psi = \exp i(\mathbf{z} \cdot \mathbf{v}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} (\mathbf{z} \cdot \mathbf{v})^n$ であることを考慮すれば、

$$\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n; t) = \frac{i^n}{n!} v_{\alpha_1}(\mathbf{k}_1, t) \dots v_{\alpha_n}(\mathbf{k}_n, t)$$
 となる。すなわち、 $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ は速度場の n 次の積平均値の Fourier 変換に対応する。この展開を特性汎函数方程式に代入し、 z について同次のべきの係数を等置すると積平均値 ψ に対する方程式を得、積平均値理論に帰着する。この方程式系では n 次の積平均値に対する方程式に $n+1$ 次の積平均値が現われ閉じない。展開の無限項をとれば厳密であるが実際に取り扱うことは困難である。有限項では特性函数の性質 (D) をみたさない。(注 $\psi[\mathbf{z}(\mathbf{k}), t]$ に対する § 4. の解法は $\Phi[\mathbf{y}(\mathbf{x}), t]$ に対しても同様に適用できる。)

(2) キュムラント展開¹⁷⁾

対数特性汎函数をべき級数に展開する。すなわち、

$$\ln \psi = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n,$$

$$\psi_n[\mathbf{z}(\mathbf{k}), t] = \int \dots \int z_{\alpha_1}(\mathbf{k}_1) \dots z_{\alpha_n}(\mathbf{k}_n) \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n; t) d\mathbf{k}_1, \dots, d\mathbf{k}_n,$$

このとき、 $\varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n; t)$ は n 次のキュムラントに対応する。この展開により得られる φ に対する方程式系はキュムラント方程式系である。有限項までで特性函数の性質を満たし得ない事情は(1)の場合と同様である。

(3) 汎函数 Gram-Charlier 展開¹⁷⁾

確率分布函数に対する Gram-Charlier 級数展開とのアナロジーにより、 $\psi = e^{\psi_1 + \psi_2 + \dots}$ ($1 + \sum_{n=3}^{\infty} \psi_n$) の形の展開が考えられる。ここで ψ_n は(1), (2)の場合と同様な n 次の同次べき汎函数である。これは正規函数の微分による展開である。正規分布の場合には ψ_3 以下は 0 であり、 $\sum_{n=3}^{\infty} \psi_n$ は正規分布からのズレを表わす部分と考えられる。現象が正規に近い場合には有効であると思われる。

(4) Reynolds 数展開

特性汎函数方程式を無次元化すると、2 次の汎函数微分を含む項の係数に Reynolds 数 Re が現われる。

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \quad (\psi_n \text{ は } Re \text{ に関して } n \text{ 次の項})$$

と展開し、方程式に代入すると、 Re について n

次の汎函数 ψ_n に対する方程式には, Re について $n-1$ 次の汎函数 ψ_{n-1} が現われる。したがって, 原理的には ψ_0 , すなわち, § 3. の弱い乱れの極限の場合の解, から順次解くことができる。この解法については, 外力を導入した定常乱流に対する Monin の仕事⁶⁾がある。

(5) 独立変数展開

解法(1), (2), (3)は従属変数である ψ を独立変数 z のべきに展開する方法であるが, 独立変数 $\mathbf{z}(\mathbf{k})$ 自身を直交函数で展開する解法も試みられている。直交函数系として Hermite 多項式を取る解法(桑原)⁷⁾がある。

(6) Edwards の解法

Edwards⁸⁾ は次のような仮定を用いて, 外力のもとでの定常乱流に対する特性汎函数方程式の近似解を得た。

- ① 乱流拡散・乱流粘性という概念を導入し, ψ に対する方程式の各項の大きさを, あるパラメターに関して 0, 1, 2 次であると仮定する。
- ② ψ をこのパラメターのべきの級数 $\psi = \psi_0 + \psi_1 + \dots$ に展開する。
- ③ 速度場の 2 次モーメントが第 0 近似 ψ_0 から完全に決定できる。したがって $\psi_1 + \psi_2 + \dots$ は 2 次モーメントに寄与しない。
- ④ ψ_n を ψ_0 に関する Hermite 多項式に展開して解く。これらの仮定の妥当性および, このような展開の低次の項のみをとることによる近似の良さについては, まだ明らかにされていない。

Edwards が取り扱った近似の範囲内では Kolmogorov のスペクトルは得られなかった。

第 2 の仕事⁹⁾において Edwards は, 2 次の平均値を支配する方程式と Boltzman 方程式との類似性を論じ, 乱流では collision time が連続であるから, ある時刻 t での乱れの場合 $v(k)$ に関する確率密度よりも, 全歴史 $v(k, t)$ に関する確率密度が重要になることを指摘している。

Edwards の方法とは異なる摂動の取り扱いとして, Herring¹⁰⁾による自己無矛盾場の方法がある。これは, ある mode に対する他の mode の影響が外力の形になるような近似法である。

(7) Wiener-Hermite 展開¹¹⁾

確率過程 (乱れの場合 $\mathbf{v}(\mathbf{k}, t)$) 自身を Wiener-Hermite 汎函数で展開し, 展開係数に対する方程式を取り扱う。正規に近い過程に対し有効であると考えられている。

(8) Wyld の摂動展開^{12,13)}

外力のある定常乱流において, 非線型項が無いときの解のべきによる摂動展開を行い, その摂動を系統的に構成する際に, 量子力学で用いられる Feynman ダイアグラムの方法を用いている。その結果は3個の函数に対する3個の無限級数連立積分方程式になり, 項を適当に無視することにより Kraichnan¹⁴⁾ の直接相互作用方程式に帰着する。

(9) 汎函数積分による解法

Reynolds 数によらない閉じた形の一般解を得るためには汎函数積分を実行する必要がある。Rosen¹⁵⁾ および Tatarski¹⁾ により試みられている。Rosen は propagation kernel の形の解の積分表示を Feynman の path integral の方法¹⁶⁾ により得た。Tatarski は量子場理論における摂動のテクニックを応用し, 特性汎函数方程式の解の汎函数 Fourier 積分表示を得た。これらの仕事は汎函数積分を1回実行し形式解を得たという点で同等である。残された汎函数積分が実行できれば意味のある結果が得られるのであるが, この積分の実行は今のところは不可能である。Tatarski の仕事については次節で報告する。

§ 5. Tatarski の仕事

Navier-Stokes 方程式と連続の方程式の Fourier 変換

$$\frac{\partial v_i(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = Q_i[\mathbf{v}(\mathbf{k}, t); \mathbf{k}] - \nu k^2 v_i(\mathbf{k}, t)$$

$$k_i v_i(\mathbf{k}, t) = 0, \quad (1)$$

を考える。ここに $Q_i[v(\mathbf{k}, t); \mathbf{k}] = B_{l, ij}(\mathbf{k}) \int v_l(\mathbf{k}, t) v_j(\mathbf{k}-\mathbf{k}, t) d^3 k$

$$B_{l, ij}(\mathbf{k}) = -i k_l (\delta_{ij} - k_i k_j / k^2).$$

連続の式 $k_i v_i(\mathbf{k}, t) = 0$ を用いると速度場成分は2成分に減る。しかし解が複雑になるので, 3成

分は独立であるとし、連続の条件 $k_i v_i = 0$ は初期状態にだけ課す。(初期に $k_i v_i = 0$ であれば、すべての t に対してみたされることは(1)式に k_i をスカラー積することにより $\frac{\partial}{\partial t}(k_i v_i) = -\nu k^2 (k_i v_i)$ を得、したがって、 $k_i v_i(\mathbf{k}, 0) = 0$ ならば $k_i v_i(\mathbf{k}, t) = 0$ 。)

次の形の新しい函数 $g_i(\mathbf{k}, t) = 0$ を導入する

$$v_i(\mathbf{k}, t) = \exp(-\nu k^2 t) g_i(\mathbf{k}, t), \quad g_i^*(-\mathbf{k}, t) = g_i(\mathbf{k}, t). \quad (2)$$

このとき(1)式は変形されて

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g_i(\mathbf{k}, t)}{\partial t} &= \exp(\nu k^2 t) Q_i [\exp(-\nu k^2 t) g(\mathbf{k}, t); \mathbf{k}] \\ \text{初期条件} \quad g_i(\mathbf{k}, 0) &= v_i^0(\mathbf{k}), \quad k_i v_i^0(\mathbf{k}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$v_i^0(\mathbf{k})$ を random field としたとき、初期特性汎函数を次のように定義する、

$$\Phi_0[\mathbf{z}(\mathbf{k})] = \langle Z[\mathbf{z}(\mathbf{k}); \mathbf{v}^0(\mathbf{k})] \rangle_{\mathbf{v}^0}, \quad (4)$$

ただし、 $Z[\mathbf{z}(\mathbf{k}); \mathbf{v}^0(\mathbf{k})] = \exp \left\{ 2\pi i \int z_j(\mathbf{k}) v_j^0(\mathbf{k}) d^3 k \right\}$,

$$z_i^*(-\mathbf{k}) = z_i(\mathbf{k}).$$

(2), (3)式の random な初期条件に対する解 $v_i(\mathbf{k}, t)$ もまた random field であり、その特性汎函数も同様に定義できる。

$$\Phi_t[\mathbf{z}(\mathbf{k})] = \langle Z[\mathbf{z}(\mathbf{k}); \mathbf{v}(\mathbf{k}, t)] \rangle_{\mathbf{v}^0}, \quad (5)$$

$$\psi_t[\mathbf{z}(\mathbf{k})] = \langle Z[\mathbf{z}(\mathbf{k}); \mathbf{g}(\mathbf{k}, t)] \rangle_{\mathbf{v}^0}, \quad (6)$$

ここで $\Phi_t[\mathbf{z}(\mathbf{k})] = \psi_t[\mathbf{z}(\mathbf{k}) \exp(-\nu k^2 t)]$ 。

(5), (6)の平均 $\langle \rangle_{\mathbf{v}^0}$ は $\mathbf{v}(\mathbf{k}, t)$, $\mathbf{g}(\mathbf{k}, t)$ が $\mathbf{v}^0(\mathbf{k})$ で表わされ、それについて平均をとるという意味である。

(6)を時間微分し、(3)を代入し、平均と k に関する積分とを交換し、時間に依存する作用素および函数

$$\left. \begin{aligned} D_i(\mathbf{k}, t) &= \exp(-\nu k^2 t) D_i(\mathbf{k}), \quad D_i(\mathbf{k}) = \delta / \delta z_i(\mathbf{k}) \\ z_i(\mathbf{k}, t) &= \exp(\nu k^2 t) z_i(\mathbf{k}) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

を導入すると

$$\left. \begin{aligned} 2\pi i \frac{\partial \psi_t}{\partial t} &= \int d^3 k z_i(\mathbf{k}, t) Q_i[\mathbf{D}(\mathbf{k}, t); \mathbf{k}] \psi_t[\mathbf{z}(\mathbf{k})] \\ \text{初期条件} \quad \psi_0[\mathbf{z}(\mathbf{k})] &= \Phi_0[\mathbf{z}(\mathbf{k})] \\ k_i D_i(\mathbf{k}) \Phi_0[\mathbf{z}(\mathbf{k})] &= 0 \quad (\leftarrow k_i v_i^0(\mathbf{k}) = 0) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$(8) \text{式は} \left. \begin{aligned} 2\pi i \frac{\partial \psi_t}{\partial t} &= H(t) \psi_t \\ H(t) &= \int d^3 k_1 \int d^3 k_2 B_{l, ij}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) z_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, t) D_l(\mathbf{k}_1, t) D_j(\mathbf{k}_2, t) \end{aligned} \right\} (9)$$

と書くことができる。このとき(9)式は相互作用表示のベクトル・ボーズ場に対する Schrödinger 方程式と対応させることができる。量子場理論の言葉では、 $z_i(\mathbf{k})$ 、 $D_i(\mathbf{k})$ はそれぞれ運動量 k をもつボーズ粒子の生成・消滅作用素。 $H(t)$ および ψ_t は相互作用表示のハミルトニアンおよび状態ベクトルに対応する。またポアソン括弧を $[A, B] \equiv AB - BA$ とすると交換関係

$$\left. \begin{aligned} [D_i(\mathbf{k}), z_j(\mathbf{k}')] &= \delta_{ij} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ [D_i(\mathbf{k}, t), z_j(\mathbf{k}', t')] &= \exp[-\nu k^2(t - t')] \delta_{ij} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \end{aligned} \right\} (10)$$

が成立する。以上のように場の理論との形式的な対応はあるが、乱流の場合にはハミルトニアンに対称性がないこと、2個のボーズ粒子の融合の過程のみを記述するという点では場の理論と異なる。

我々の目的は(9)式の形式解を求めることであるが、その前に特別な初期条件に対する(9)式の厳密解に触れる。

iterationにより(9)式の一般解は

$$\begin{aligned} \psi_t[\mathbf{z}(\mathbf{k})] &= S(t) \Phi_0[\mathbf{z}(\mathbf{k})] \\ &= \left\{ 1 + \dots + \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_0^{\tau_{m-1}} d\tau_m H(\tau_1) \dots H(\tau_m) + \dots \right\} \\ &\quad \Phi_0[\mathbf{z}(\mathbf{k})] \end{aligned} \quad (11)$$

と表わせる。いま初期の特性汎函数として n 次の汎函数

$$\begin{aligned} \Phi_0[\mathbf{z}(\mathbf{k})] &= \theta_n[\mathbf{z}(\mathbf{k})] \\ &= \int \dots \int f_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) z_{i_1}(\mathbf{k}_1) \dots z_{i_n}(\mathbf{k}_n) d^3 k_1 \dots d^3 k_n \end{aligned} \quad (12)$$

をとる。 $H(t)$ を θ_n に作用させるとその次数を1さげることには注意すれば、(11)の $S(t)$ において $n+1$ 次以下のすべての項は θ_n に作用させると0になることがわかる。したがって、初期条件が(12)のときには、(11)式の n 項までが厳密解を表わすことになる。ところが、 θ_n は特性函数であるための条件 $|\Phi_0| \leq 1$ をみたさない。また、このような θ_n の異なる n の一次結合もこの性質を持たない。 Φ_0 は無限べき級数にのみ展開可能で、実際には無限項を扱うことはできない。

(9)式の解を continual integral によって表示したい。そのために次の作用素を導入する。

$$S(t) = T(K) = T \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_0^t H(\tau) d\tau \right\} \quad (13)$$

T は chronological operator と呼ばれ、(13)式の $\exp$ を展開したとき、もっとも最近の時刻に関する $H(\tau)$ の項が左にくるように $H(\tau)$ を整列する operator である。すなわち、(13)の $\exp$ を展開したとき(11)になるようにする operator である。(13)は normal form と呼ばれる(14)の形に変換できる。operator の normal form とは、すべての生成 operator $z_i(\mathbf{k}, t)$ が左に、消滅 operator $D_i(\mathbf{k}, t)$ が右にくるような形を言う。

$$S(t) = N \{ (\exp \Delta) \cdot K \} \quad (14)$$

$$\Delta = \int d^3 k \int_0^t d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \exp \left[-\nu k^2 (\tau_2 - \tau_1) \right] \frac{\delta}{\delta z_i(\mathbf{k}, \tau_1)} \frac{\delta}{\delta D_i(\mathbf{k}, \tau_2)} \quad (15)$$

(14)式の Φ_0 に operator (14) を作用させ S を平均記号の中に入れると

$$\psi_t[\mathbf{z}(\mathbf{k})] = \langle N \{ (\exp \Delta) \cdot K \} \cdot Z[\mathbf{z}(\mathbf{k}); \mathbf{v}^0(\mathbf{k})] \rangle_{\mathbf{v}^0} \quad (16)$$

(14)式では、operator $D_i(\mathbf{k}, t)$ はすべて $z_i(\mathbf{k}, t)$ の右側にあるので Z のみに作用し、次の規則によって個有値と置き換えられる。

$$\left. \begin{aligned} D_i(\mathbf{k}, t) &\rightarrow 2\pi i \tilde{v}_i(\mathbf{k}, t), \quad \tilde{v}_i(\mathbf{k}, t) = \exp[-\nu k^2 t] v_i^0(\mathbf{k}) \\ \frac{\delta}{\delta D_i(\mathbf{k}, t)} &\rightarrow \frac{1}{2\pi i} \frac{\delta}{\delta \tilde{v}_i(\mathbf{k}, t)} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

(17)のような置き換えを実行したものに $\sim$ をつけて表わすと、

$$\begin{aligned} H &\rightarrow \tilde{H}, \quad \tilde{H}[\mathbf{z}(\mathbf{k}, t); \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, t)] = -4\pi^2 \int d^3 k z_i(\mathbf{k}, t) Q_i[\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, t); \mathbf{k}], \\ \Delta &\rightarrow \tilde{\Delta}, \quad \tilde{\Delta} = \frac{1}{2\pi i} \int d^3 k \int_0^t d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \exp[-\nu k^2 (\tau_2 - \tau_1)] \frac{\delta}{\delta z_i(\mathbf{k}, \tau_1)} \frac{\delta}{\delta \tilde{v}_i(\mathbf{k}, \tau_2)} \\ \tilde{K}_t[\mathbf{z}(\mathbf{k}, \tau); \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \tau)] &= \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_0^t \tilde{H}[\mathbf{z}(\mathbf{k}, t'); \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, t')] dt' \right\} \end{aligned}$$

と置けば、

$$\begin{aligned} \psi_t[\mathbf{z}(\mathbf{k})] &= \langle \{ (\exp \tilde{\Delta}) \tilde{K}_t[\mathbf{z}(\mathbf{k}, \tau); \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \tau)] \} Z[\mathbf{z}(\mathbf{k}); \mathbf{v}^0(\mathbf{k})] \rangle_{\mathbf{v}^0} \\ &= \langle \tilde{S}_t[\mathbf{z}(\mathbf{k}, \tau); \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \tau)] Z[\mathbf{z}(\mathbf{k}); \mathbf{v}^0(\mathbf{k})] \rangle_{\mathbf{v}^0} \end{aligned} \quad (18)$$

$\tilde{\Delta}$ を作用できるような形に $\tilde{K}_t$ を書き表わす。そのためには $\tilde{K}_t$ を $\tilde{v}_i(\mathbf{k}, \tau)$ の continual integral で表わす。continual integral の定義は次のようになされる。

汎関数 $F[f(x)]$, $(a \leq x \leq b)$ の continual integral は

$$\int F[f(\xi)] \mathcal{D}f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \cdots \int F(f_1, \dots, f_n) (\sqrt{\Delta x} df_1) \cdots (\sqrt{\Delta x} df_n) \quad (19)$$

と定義する。ただし、 $\Delta x = (b-a)/n$, $Df(\xi) = \prod_{\xi} d\xi \sqrt{df(\xi)}$, $F(f_1, \dots, f_n)$ は $F[f(\xi)]$ の、値 $f_1, \dots, f_n$ をとる階段函数上での値とする。また δ -汎函数が次のように定義される。

$$\delta_{\infty}[\varphi(\xi)] = \int \exp[2\pi i \int f(\xi) \varphi(\xi) d\xi] \mathcal{D}\varphi(\xi) \quad (20)$$

$$\int F[\varphi(\xi)] \delta_{\infty}[\varphi(\xi) - f(\xi)] \mathcal{D}\varphi(\xi) = F[f(\xi)] \quad (21)$$

(20), (21)式より

$$F[f(\xi)] = \int \mathcal{D}\varphi(\xi) \int D\psi(\xi) F[\varphi(\xi)] \exp\{2\pi i \int \psi(\xi) [\varphi(\xi) - f(\xi)] d\xi\} \quad (22)$$

以上の定義で、3つの拡張をする。① $a \rightarrow -\infty$, $b \rightarrow +\infty$ ② f, φ, ψ (real function) の Fourier 変換により f, φ, ψ (complex function) に拡張。このとき(22)式の $\exp$ 内の $\int \psi(\xi) [\varphi(\xi) - f(\xi)] d\xi$ は real に保つ。③ 多変数への拡張, $Df(\mathbf{k}, \tau) = \prod_{\mathbf{k}, \tau} \sqrt{d^3 k d\tau} df(\mathbf{k}, \tau)$ 。

このような拡張により $\widetilde{K}_t$ は $\widetilde{v}_i(\mathbf{k}, \tau)$ の continual integral の形で表わせる。

$$\begin{aligned} & \widetilde{K}_t[\mathbf{z}(\mathbf{k}, \tau); \widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \tau)] \\ &= \int \mathcal{D}^3 a(\mathbf{k}, \tau) \int \mathcal{D}^3 A(\mathbf{k}, \tau) \widetilde{K}_t[\mathbf{z}(\mathbf{k}, \tau); \mathbf{a}(\mathbf{k}, \tau)] \\ & \quad \times \exp\{2\pi i \int d^3 k \int_0^t d\tau A_i(\mathbf{k}, \tau) [\widetilde{v}_i(\mathbf{k}, \tau) - a_i(\mathbf{k}, \tau)]\} \end{aligned} \quad (23)$$

ここに、 $\mathbf{a}^*(-\mathbf{k}, \tau) = \mathbf{a}(\mathbf{k}, \tau)$, $\mathbf{A}^*(-\mathbf{k}, \tau) = \mathbf{A}(\mathbf{k}, \tau)$

(23)式においては、 z_i, v_i は $\exp$ に1次で入っている。したがって作用素 $\widetilde{\Delta}$ の $\widetilde{K}_t$ への作用は容易に計算できて、(23)の積分に次式がかかる。

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta} &\rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_0^t \widetilde{H}[\mathbf{L}(\mathbf{A}(\mathbf{k}, \tau); t'); \mathbf{a}(\mathbf{k}, t')] dt' \\ L_i[\mathbf{A}(\mathbf{k}, \tau); t'] &= \int_0^{t'} \exp[-\nu k^2(\tau - t')] A_i(\mathbf{k}, \tau) d\tau \end{aligned}$$

$\widetilde{\Delta}$ を作用して出てくる因子は z_i, v_i によらないので $\widetilde{\Delta}$ を何回作用させても同じで、結局

$$\begin{aligned} \exp \widetilde{\Delta} &\rightarrow \exp\left\{\frac{1}{2\pi i} \int_0^t \widetilde{H}[\mathbf{L}(\mathbf{A}(\mathbf{k}, \tau); t'); \mathbf{a}(\mathbf{k}, t')] dt'\right\} \\ &= \widetilde{K}_t[\mathbf{L}(\mathbf{A}(\mathbf{k}, \tau'); \tau); \mathbf{a}(\mathbf{k}, \tau)] \end{aligned} \quad (24)$$

(24)を代入して

$$\begin{aligned} & \widetilde{S}_t[\mathbf{z}(\mathbf{k}, \tau); \widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \tau)] \\ &= \int \mathcal{D}^3 a(\mathbf{k}, \tau) \int \mathcal{D}^3 A(\mathbf{k}, \tau) \widetilde{K}_t[\mathbf{z}(\mathbf{k}, \tau) + \mathbf{L}(\mathbf{A}(\mathbf{k}, \tau'); \tau); \mathbf{a}(\mathbf{k}, \tau)] \end{aligned}$$

$$\times \exp \left\{ 2\pi i \int d^3 k \int_0^t d\tau A_i(\mathbf{k}, \tau) [\tilde{v}_i(\mathbf{k}, \tau) - a_i(\mathbf{k}, \tau)] \right\} \quad (25)$$

(25)式は $\mathbf{a}(\mathbf{k}, \tau)$ に関して, Feynman の方法で積分できる。(25)式で $\mathbf{a}(\mathbf{k}, \tau)$ に関する積分の部分を取り出してそれを G_t とすると

$$G_t[\mathbf{z}(\mathbf{k}, \tau); \mathbf{A}(\mathbf{k}, \tau)] = \int \mathcal{D}^3 a(\mathbf{k}, \tau) \tilde{K}_t[\mathbf{z}(\mathbf{k}, \tau) + \mathbf{L}[\mathbf{A}(\mathbf{k}, \tau'), \tau]; \mathbf{a}(\mathbf{k}, \tau)] \times \exp \left\{ -2\pi i \int d^3 k \int_0^t d\tau A_i(\mathbf{k}, \tau) a_i(\mathbf{k}, \tau) \right\} \quad (26)$$

(26)の被積分関数は $a_i(\mathbf{k}, \tau)$ に関して2次 ($\tilde{K}_t$ の部分) と1次を含む指数関数である。 $a_i(\mathbf{k}, \tau) = a_i^0(\mathbf{k}, \tau) + u_i(\mathbf{k}, \tau)$, および $\mathcal{D}^3 a(\mathbf{k}, \tau) = D^3 u(\mathbf{k}, \tau)$ によって積分変数 $u_i(\mathbf{k}, \tau)$ を導入し, 指数関数が $u_i(\mathbf{k}, \tau)$ に関して1次の項を含まないように $a_i^0(\mathbf{k}, \tau)$ を選ぶと convolution type の線型積分方程式になり, Fourier 変換により解くことができる。(この計算は $\int \exp[iF(\mathbf{a})] d\mathbf{a}$, ($\mathbf{a}$: 函数) の形の汎函数積分が, $F(\mathbf{a})$ が $\mathbf{a}$ に関して2次のときに実行できて $\int \exp[iF_0(\mathbf{a})]$, (ただし f は規格化定数, $F_0(\mathbf{a})$ は汎函数 $F(\mathbf{a})$ の停留値) に等しくなることを利用する。)

$\mathbf{a}(\mathbf{k}, \tau)$ に関して積分すると(26)式は

$$G_t[\mathbf{z}(\mathbf{k}, \tau); \mathbf{A}(\mathbf{k}, \tau)] = M[\mathbf{z}(\mathbf{k}, \tau) + \mathbf{L}[\mathbf{A}(\mathbf{k}, \tau'); \tau]; \mathbf{A}(\mathbf{k}, \tau)] \quad (27)$$

ここに,

$$M[\mathbf{f}(\mathbf{k}, \tau); \mathbf{A}(\mathbf{k}, \tau)] = Q_0 \exp \left\{ -\frac{\delta_4(0)}{2} \int d^3 x \int_0^t dt' \ln T[\mathbf{f}(\mathbf{x}, t'); \mathbf{x}] - i\pi \int d^3 k_1 \int d^3 k_2 \int_0^t dt' I_{ij}[\mathbf{f}(\mathbf{k}, t'), \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2] A_i(\mathbf{k}_1, t') A_j(\mathbf{k}_2, t') \right\},$$

$$I_{ij}[\mathbf{f}(\mathbf{k}, t'); \mathbf{k}] = \frac{1}{16\pi^3} \int (\exp i \mathbf{k} \mathbf{x}) \frac{\partial \ln T[\mathbf{f}(\mathbf{k}, t'); \mathbf{x}]}{\partial T_{ij}[\mathbf{f}(\mathbf{k}, t'); \mathbf{x}]} d^3 x,$$

$$T = \text{Det} \| T_{ij} \|, \quad T_{ij}[\mathbf{f}(\mathbf{k}, t'); \mathbf{x}] = \int (\exp i \mathbf{k} \mathbf{x}) \Gamma_{ij}[\mathbf{f}(\mathbf{k}, t')] d^3 k,$$

$$\Gamma_{ij}[\mathbf{f}(\mathbf{k}, t')] = \frac{1}{2} [B_{i,jl}(\mathbf{k}) + B_{j,il}(\mathbf{k})] f_l(\mathbf{k}, t').$$

以上の表示により

$$\psi_t[\mathbf{z}(\mathbf{k})] = \langle G_t[\mathbf{z}(\mathbf{k}, \tau); \mathbf{A}(\mathbf{k}, \tau)] \cdot \exp \left\{ 2\pi i \int d^3 k [z_i(\mathbf{k}) v_i^0(\mathbf{k}) + \int_0^t d\tau A_i(\mathbf{k}, \tau) \exp(-\nu k^2 \tau) v_i^0(\mathbf{k})] \right\} \mathcal{D}^3 A(\mathbf{k}, \tau) \rangle_{\mathbf{v}^0} \quad (28)$$

$$\mathbf{z}(\mathbf{k}) \rightarrow \exp(-\nu k^2 t) \mathbf{z}(\mathbf{k}), \quad \psi_t \rightarrow \Phi_t, \quad \mathbf{z}(\mathbf{k}, \tau) = \exp(\nu k^2 \tau) \mathbf{z}(\mathbf{k})$$

によって Φ_t に戻すと,

$$\begin{aligned} \Phi_t [\mathbf{z}(\mathbf{k})] &= \int G_t [\mathbf{z}(\mathbf{k}) \exp \{-\nu k^2 (t-\tau)\} ; \mathbf{A}(\mathbf{k}, \tau)] \\ &\times \exp \left\{ 2\pi i \int d^3 k v_i^0(\mathbf{k}) [z_i(\mathbf{k}) \exp(-\nu k^2 t) + \int_0^t \exp(-\nu k^2 t) A_i(\mathbf{k}, \tau) d\tau] \right\} \\ &\mathcal{D}^3 A(\mathbf{k}, \tau) > \mathbf{v}^0 \end{aligned} \quad (29)$$

Φ_0 の定義を用い, (29)式で $v_i^0(\mathbf{k})$ に関する平均を実行すると,

$$\begin{aligned} \Phi_t [\mathbf{z}(\mathbf{k})] &= \int G_t [\mathbf{z}(\mathbf{k}) \exp \{-\nu k^2 (t-\tau)\} ; \mathbf{A}(\mathbf{k}, \tau)] \\ &\times \Phi_0 [\mathbf{z}(\mathbf{k}) \exp(-\nu k^2 t) + \mathbf{L}[\mathbf{A}(\mathbf{k}, \tau); 0]] \mathcal{D}^3 A(\mathbf{k}, \tau) \end{aligned} \quad (30)$$

(30)式が, Tatarski による最終的な積分表示であり, 物理的な結果を得るためには $A_i(\mathbf{k}, \tau)$ に関する積分を実行する必要があるが, これは難問である。(30)式に関連して Tatarski が次のような議論をしていることを紹介してこの稿を閉じる。

いま初期特性汎函数として Gaussian の場合, すなわち,

$$\Phi_0 [\mathbf{z}(\mathbf{k})] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int W_{ij}(\mathbf{k}) z_i(\mathbf{k}) z_j(-\mathbf{k}) d^3 k \right\}$$

を考える。 $W_{ij}(\mathbf{k})$ は初期におけるエネルギー・スペクトル密度で, $t=0$ での代表的速度および長さを V_0 , L_0 とすると, $V_0^2 L_0^3$ に比例する。したがって $V_0 L_0 \rightarrow \infty$ ($R_0 \rightarrow \infty$) のときには汎函数 Φ_0 は $\mathbf{z}=0$ の近傍でのみ値を持つ。つまり $\mathbf{z}=0$ での δ -汎函数になる。したがって Φ_t の変化は Φ_0 よりもむしろ G_t に依存する。以上は Φ_0 が Gaussian の場合であるが, 一般に Gaussian 以外の Φ_0 に対しても, $Re \rightarrow \infty$ のときには, δ -汎函数的になるであろうから, 初期に $Re \rightarrow \infty$ のときには乱流の degeneration を支配する法則は初期の確率分布の形に依存しないであろうというのが Tatarski の結論である。

- 1) V.I. Tatarski : Soviet Phys. — JETP 15 (1962) 961.
- 2) 巽 友正 : “乱流” 槇書店 (1962) 140.
- 3) 池田紀人 : 数理研講究録 23 (1967) 1.
- 4) E. Hopf : J. Rat. Mech. Anal. 1 (1952) 87.
- 5) E. Hopf and E. W. Titt : J. Rat. Mech. Anal, 2 (1953) 587.
- 6) A. S. Monin : J. Appl. Math. and Mech. 28 (1964) 389.
- 7) 桑原真二 : 数理研講究録 23 (1967) 39, 47 (1968) 30.
- 8) S. F. Edwards : J. Fluid Mech. 18 (1964) 239.
- 9) S. F. Edwards : Intern. Conf. Plasma Physics, Trieste, (1965) 595.
- 10) J. R. Herring : Phys. Fluids, 8 (1965) 2219, 9 (1966) 2106.
- 11) T. Imamura, W. Meecham and A. Siegel : J. Math. Phys., 6 (1965) 595, 他 .
- 12) H. Wyld : Ann. Phys., 14 (1961) 143.
- 13) A. V. Shut'ko : Soviet Phys. Doklady, 9 (1965) 857.
- 14) R. Kraichnan : J. Fluid Mech., 5 (1959) 497.
- 15) G. Rosen : Phys. Fluids, 3 (1960) 519, 3 (1960) 525.
- 16) R. P. Feynman : Phys. Rev. 84 (1951) 108.
- 17) A. S. Monin and A. M. Yaglom : ‘Statistical Hydrodynamics’ vol. 2 (1967) Chapter 10.
- 18) M. J. Beran : Monographs in statistical physics, vol 9. ‘Statistical Continuum Theory’, Interscience, (1968) Chapter 10, Turbulence.