

フーリエ級数の概収束に関係した関数空間について

東北大 理 佐藤 秀一 (Shuichi Sato)

§1. $T = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $f \in L^1(T)$ に対して f のフーリエ級数の部分和を

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$$

とする. ここで

$$\hat{f}(k) = \int_T f(t) e^{-2\pi i k t} dt \quad (k \in \mathbb{Z})$$

である. $f \in L^p(T)$ ($1 < p \leq \infty$) ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(x) = f(x)$ a.e. が Carleson-Hunt の結果として知られている.

しかし, $f \in L^1(T)$ で $S_n(f)(x)$ がすべての点で発散するものが存在することが Kolmogorov によって示されている. L^1 に

近い関数空間でフーリエ級数の概収束するクラスとして

P. Sjölin の $L \log^+ L \log^+ \log^+ L$ が知られている. ここでは,

フーリエ級数の概収束する L^1 に近い関数空間として, M. H.

Taibleson と G. Weiss の C_g クラスと R. Fefferman の $L^1(E)$

クラスについて述べる. さらに多変数への拡張についても

ふれる。

§2. C_q クラス. まず $1 < q \leq \infty$ に対して関数空間 B_q を定義する.

定義1 (LSJ). $b \in L^q(T)$ とする. $b \in B_q$ とは区間 $I \subset T$ が存在して

$$(1) \quad \text{supp}(b) \subset I$$

$$(2) \quad \|b\|_q \leq |I|^{\frac{1}{q}-1} \quad (q \neq \infty)$$

$$\|b\|_\infty \leq |I|^{-1} \quad (q = \infty)$$

が成立することである.

次に関数空間 C_q を定義する. 複素数列 $\{m_k\}_{k=1}^\infty$ に対して $N(\{m_k\}) = \sum_{k=1}^\infty |m_k| \left(1 + \log \frac{\sum_{l=1}^\infty |m_l|}{|m_k|}\right)$ とおく.

定義2 (LSJ). $f \in L(T)$ とする. $f \in C_q$ ($1 < q \leq \infty$) とは, 複素数列 $\{m_k\}_{k=1}^\infty$ で $N(\{m_k\}) < \infty$ なるものと $b_k \in B_q$ ($k=1, 2, 3, \dots$) が存在して

$$f = \sum_{k=1}^\infty m_k b_k$$

とかけることである.

注意1. 定義からすぐわかるように $q_1 \geq q_2$ ならば

$C_{q_1} \subset C_{q_2}$ である.

注意2. 任意の $f \in L^1(T)$ はたとえ $f = \sum_k C_k b_k$, $b_k \in B_\infty$, $\sum |C_k| < \infty$ の形にかけらる. C_∞ は条件

$\sum |c_k| < \infty$ を $N(\{c_k\}) < \infty$ と少し強くしたものである.

$S^*(f)(x) = \sup_k |S_k(f)(x)|$ とする. Taibleson-Weiss [5] は次を示した.

定理 1 ([5]). 正定数 C が存在して, すべての $\lambda > 0$, $f \in C_g$ ($1 < g \leq \infty$), $f = \sum m_k b_k$ に対して

$$|\{x \in T : S^*(f)(x) > \lambda\}| \leq C \frac{N(\{m_k\})}{\lambda}$$

が成立する.

定理 1 からすぐに次のようになる.

系 1. $f \in C_g$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(x) = f(x)$ a.e.

系 1 の精密さを見るために次の定理を述べておく.

定理 2 (J. P. Kahane). $N(\{m_k\}) = \infty$ ならば 列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset T$ で

$$\sup_n |S_n(\sum_1^{\infty} m_k \delta_{x_k})(x)| = \infty \quad \text{a.e.}$$

となるものが存在する. ここで $\mu = \sum m_k \delta_{x_k}$ として,

$$S_n(\mu)(x) = \sum_{l=-n}^n \int_T e^{-2\pi i l t} d\mu(t) e^{2\pi i l x} \quad \text{である.}$$

§3. R. Fefferman の entropy.

定義 3 [1]. Lebesgue 測度を $|T| = \frac{1}{e}$ と正規化する.

$S \subset T$ に対し

$$E(S) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \log \frac{1}{|I_k|} : S \subset \bigcup_k I_k, I_k \subset T \text{ は閉区} \right\}$$

間},

とする. T 上の可測関数 f に対して

$$J(f) = \int_0^\infty E(\{x \in T: |f(x)| > \lambda\}) d\lambda$$

とし, $L^1(E) = \{f: J(f) < \infty\}$ とする.

R. Fefferman によつて

(1) $c > 0$ が存在して

$$J(f) \leq c \left(\int_T \int_T \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} dx dy + \|f\|_1 \right)$$

が成立する,

(2) $f \in L^1(E)$ ならば $f \in L \log^+ L$

が示されている.

定理 3 ([4], [5]). $f \in L^1(E)$ ならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(x) = f(x) \quad \text{a.e.}$$

§4. 多変数の場合. $Q_d = \{x \in \mathbb{R}^d: -\frac{1}{2} \leq x_i \leq \frac{1}{2}, i=1, 2, \dots, d\}$

とする. $f \in L^1(Q_d)$ に対して $\hat{f}(n) = \int_{Q_d} f(x) e^{-2\pi i n x} dx$

$n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$, $n \cdot x = \sum_{i=1}^d n_i x_i$ とし,

critical index における多変数 Fourier 級数 $\sum \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$

の Bochner-Riesz 平均を

$$S_R^{\frac{d-1}{2}}(f)(x) = \sum_{|n| \leq R} \left(1 - \frac{|n|^2}{R^2}\right)^{\frac{d-1}{2}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

とする. $|n| = (\sum_{i=1}^d n_i^2)^{\frac{1}{2}}$.

Q_d 上の関数 f に対して $J(f)$ を T におけると同様にし

て定義する. かつ $S \subset \mathbb{Q}_d$ に対し

$$E(S) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \log \frac{1}{|I_k|} : S \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, I_k \subset \mathbb{Q}_d \text{ is closed cube} \right\}$$

とし ($f \in L^1$ Lebesgue 測度を $|\mathbb{Q}_d| = \frac{1}{e}$ と正規化する),

$$J(f) = \int_0^{\infty} E(\{x \in \mathbb{Q}_d : |f(x)| > \lambda\}) d\lambda$$

とする.

定理 4 ([2], [4]). $J(f) < \infty$ ならば

$$\lim_{R \rightarrow \infty} S_R^{\frac{d-1}{2}}(f)(x) = f(x) \quad \text{a.e.}$$

注意 3. $L(E) = \{f : J(f) < \infty\}$, とすると

$L(E) \subset H^1$ である. $f \in H^1$ で $S_R^{\frac{d-1}{2}}(f)(x)$ がほとんどすべての点で発散するものが存在することから [3] で示された.

文献

- [1] R. Fefferman, A theory of entropy in Fourier analysis, *Advances in Math.* 30 (1978), 171-201.
- [2] S. Z. Lu, M. Taibleson, and G. Weiss, On the almost-everywhere convergence of Bochner-Riesz means of multiple Fourier series, *Lecture Notes in Math.* 908 (1982), Springer, 311-318.

- [3] E. M. Stein, An H^1 function with non-summable Fourier expansion, Lecture Notes in Math. 992 (1983), Springer, 193-200.
- [4] S. Sato, Entropy and almost everywhere convergence of Fourier series, Tôhoku Math. J. 33 (1981), 593-597.
- [5] M. Taibleson and G. Weiss, Certain function spaces connected with almost everywhere convergence of Fourier series, Proceedings of the Conference on Harmonic Analysis, in Honor of Antoni Zygmund, Wadsworth, Vol I (1982), 95-113.