

CR invariants of weight five in the Bergman kernel

平地健吾 (阪大理) 小松 玄 (阪大理) 中沢則之 (東北大理)

(K. Hirachi, G. Komatsu, and N. Nakazawa)

1. 序

複素領域 Ω に付随する Bergman 核 K^B は, Ω 上の L^2 正則関数のなす Hilbert 空間における完全正規直交系 $\{h_j\}_j$ を用いて $K^B(z) = \sum |h_j(z)|^2$ によって定義される. C^∞ 級の境界を持つ有界強擬凸領域 $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ に対して, Bergman 核の漸近展開に関する不変式論を考える.

Ω の定義関数 $r \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $r > 0$, をひとつ指定すれば, Bergman 核の特異性は

$$(1.1) \quad \frac{\pi^2}{2} K^B(z) = \frac{\varphi^B(z)}{r(z)^3} + \psi^B(z) \log r(z) \quad \text{near } \partial\Omega$$

という形に書かれる (Fefferman [F1]). 但しここで φ^B, ψ^B は境界まで込めて C^∞ 級であって, $\varphi^B|_{\partial\Omega} = J[r]|_{\partial\Omega} > 0$ が成り立つ. $J[r]$ は Levi の行列式であって

$$J[r] = \det \begin{pmatrix} r & \partial r / \partial \bar{z}_k \\ \partial r / \partial z_j & \partial^2 r / \partial z_j \partial \bar{z}_k \end{pmatrix}$$

によって定義される. 関数 φ^B, ψ^B は定義関数 r の選び方に依存する. また, $\varphi^B \bmod O(r^3)$ と $\psi^B \bmod O(r^\infty)$ は, 任意に指定された境界点の近傍で局所的にきまる. 特に

$$J[r^F] = 1 + O(r^3)$$

をみたす定義関数 $r = r^F$ (Fefferman [F2] によって構成された) を採用すれば $\varphi^B = 1 + O(r^3)$ が成り立つ (Graham [G1]). さらに, $\psi^B \bmod O(r^2)$ の仕組は [G1] と [HKN1] によって完全にわかっている. 本稿では $\psi^B \bmod O(r^3)$ の仕組について解説する (詳細は [HKN2] に発表予定). ここまでが, 定義関数 r^F を用いてできる議論の限界である.

2. 複素 Monge-Ampère 境界値問題

Fefferman によって構成された $r^F \in C^\infty(\overline{\Omega})$ は複素 Monge-Ampère 境界値問題

$$(2.1) \quad \begin{aligned} J[u] &= 1 \text{ in } \Omega, \quad u > 0 \text{ in } \Omega, \\ u &= 0 \text{ on } \partial\Omega \end{aligned}$$

の C^∞ 近似解である. この境界値問題は一意的な解 $u = u^{MA}$ を持つことが知られている (Cheng-Yau [CY]). しかしながら, 解は境界まで込めて有限階の微分可能性しか持たない:

$$u^{MA} \in C^\infty(\Omega) \cap C^{4-\varepsilon}(\overline{\Omega}) \text{ for any } \varepsilon > 0.$$

Ω の定義関数 $r \in C^\infty(\overline{\Omega})$ をひとつ指定すると, 次の漸近展開が成り立つ (Lee-Melrose [LM]) :

$$u^{MA}(z) \sim r(z) \sum_{k=0}^{\infty} \eta_j(z) \{r(z)^3 \log r(z)\}^k, \quad \eta_j \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Graham [G2] は, 境界値問題 (2.1) に対応する初期値問題を考えて, C^∞ 近似解 r^F をもとにした

$$u^G(z) \sim r^F(z) \sum_{k=0}^{\infty} \eta_j^G(z) \{r^F(z)^3 \log r^F(z)\}^k, \quad \eta_j^G \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

という形の漸近解 u^G を構成した. すなわち, u^G は “初期値” $a \in C^\infty(\partial\Omega)$ を任意に与えたときにきまる, “初期値問題”

$$\begin{aligned} J[u^G] &= 1 + O(r^\infty) \text{ near } \partial\Omega, \\ \eta^G &= 1 + a r^3 + O(r^4) \quad (r = r^F) \end{aligned}$$

の解である. この u^G は, a を指定する毎に $\text{mod } O(r^\infty)$ の誤差を除いて一意である. u^G の展開の第一項 (境界まで滑らかな部分) を r^G とおく. すなわち

$$(2.2) \quad r^G = r^F \eta_0^G.$$

u^G, r^G, η_j^G 等について論ずる際に, 領域 Ω 全体 (あるいは境界 $\partial\Omega$ 全体) を考える必要はない: 指定された境界点の近傍で局所的な議論が可能である.

3. 変換則と CR 不変量

双正則写像 $\Phi: \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ が任意に与えられたとき、領域 $\Omega, \tilde{\Omega}$ に付随する Bergman 核 $K_{\Omega}^B, K_{\tilde{\Omega}}^B$ は

$$K_{\Omega}^B(z) = |\det \Phi'(z)|^2 K_{\tilde{\Omega}}^B(\Phi(z))$$

という変換則をみたす。また、領域 $\Omega, \tilde{\Omega}$ の各々の上で考えた境界値問題の解 $u_{\Omega}^{MA}, u_{\tilde{\Omega}}^{MA}$ は

$$u_{\Omega}^{MA}(z) = |\det \Phi'(z)|^{-2/3} u_{\tilde{\Omega}}^{MA}(\Phi(z))$$

をみたす。一般に、領域汎関数 $F = F_{\Omega}$ に対して関係式

$$(3.1) \quad F_{\Omega}(z) = |\det \Phi'(z)|^{2w/3} F_{\tilde{\Omega}}(\Phi(z)),$$

が成り立つとき、 F はウエイト w の変換則をみたすという。よって K^B, u^{MA} はそれぞれウエイト $3, -1$ の変換則をみたす。

変換則 (3.1) を、指定された境界点の近傍に局所化して考える。（このときにも $F_{\Omega}, F_{\tilde{\Omega}}$ 等という記号を用いよう。）さらに、境界からの距離のベキのオーダーの誤差を許すことにする；関係式

$$F_{\Omega}(z) = |\det \Phi'(z)|^{2w/3} F_{\tilde{\Omega}}(\Phi(z)) \mod O(r^m)$$

が成り立つとき、 F は $O(r^m)$ の誤差でウエイト w の局所変換則をみたすという。境界値問題 (2.1) の C^{∞} 近似解 r^F は、 $O(r^4)$ の誤差でウエイト -1 の局所変換則をみたす。また、漸近解 u^G は $O(r^{\infty})$ の誤差でウエイト -1 の局所変換則をみたす。これらのことからわかるように、 u^G の漸近展開に現れる η_k^G は、 $O(r^3)$ の誤差でウエイト $3k$ の局所変換則をみたす。

次に、境界汎関数とでも呼ぶべき境界上の関数 $F = F_{\partial\Omega}$ に対する変換則

$$(3.2) \quad F_{\Omega}(z) = |\det \Phi'(z)|^{2w/3} F_{\tilde{\Omega}}(\Phi(z)) \text{ on } \partial\Omega$$

を考えよう。さらにこれを指定された境界点の近傍に局所化すれば、CR 不変量の定義にいたる。正確に述べよう。

CR 不変量の定義. Moser の標準形の係数の多項式がウエイトの CR 不変式であるとは、それが変換則 (3.2) を局所的にみたすこと.

Moser の標準形について少し復習しよう. 説明を簡略化するために、領域の境界は実解析的であると仮定する. C^∞ のカテゴリで考えるときには、すべてを形式的巾級数の範囲で考えればよい.

Ω の境界点をひとつ指定して、その点の近傍で正則な座標変換を行い、境界 $\partial\Omega$ の表示が簡単になるようにしたい. 新しい座標を

$$z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad z_2 = u + i v,$$

と書き、指定された境界点を原点に対応させる. このとき、 Ω を局所的に

$$2u > |z_1|^2 + F(z_1, \bar{z}_1, v)$$

という形に表すことができる. ここで F は次の形の Taylor 展開を持つ:

$$\begin{aligned} F(z_1, \bar{z}_1, v) &= \sum_{p, q \geq 2} A_{p\bar{q}}(v) z_1^p \bar{z}_1^q, \\ A_{p\bar{q}}(v) &= \sum_{l \geq 0} A_{p\bar{q}}^l v^l. \end{aligned}$$

ただし係数 $A_{p\bar{q}}^l$ は p, q に関してエルミート対称である. さらにここで正規化条件

$$A_2 \bar{2}(v) = A_3 \bar{2}(v) = A_3 \bar{3}(v) = 0$$

を付け加えたときの境界 $\partial\Omega$ の局所表示 (または関数 F) が Moser の標準形である.

Moser の標準形は常に存在するが、たいていの場合には一意的不是である. (一意的であるのは、領域 Ω が球と局所的に双正則な場合に限る.) しかしながら、CR 不変量を $A_{p\bar{q}}^l$ の多項式として書いたときの表示は、標準形の選び方に依存しない.

ウエイト w の CR 不変量の全体の成す実ベクトル空間を I_w^{CR} と書こう. 明らかに $I_0^{CR} = \mathbb{R}$ である. $1 \leq w \leq 5$ に対する I_w^{CR} は次の形をしている.

補題 1 ([G1], [HKN2]). $I_1^{CR} = I_2^{CR} = \{0\}$, $\dim I_3^{CR} = \dim I_4^{CR} = 1$, $\dim I_5^{CR} = 2$ が成り立つ. I_3^{CR}, I_4^{CR} はそれぞれ $A_{44}^0, |A_{24}^0|^2$ によって張られる. また、 I_5^{CR} の元は次の形を

している：

$$F(a, b, c, d) = a \operatorname{Im} \left(A_{24}^0 \overline{A_{42}^1} \right) + b \operatorname{Re} \left(A_{24}^0 \overline{A_{53}^0} \right) + c \left| A_{34}^0 \right|^2 + d \left| A_{25}^0 \right|^2.$$

$$\text{但しここで } c = \frac{9}{2}a + \frac{9}{4}b, d = \frac{5}{2}a + \frac{3}{4}b.$$

上の補題 1 において, $w < 5$ に関する結果は Graham [G1] による. ([G1] に述べてある I_5^{CR} に関する主張は正しくない. それは単純な計算間違いによるもので, 修正するのは容易である.)

4. Bergman 核に含まれるウエイト ≤ 4 の CR 不変量 ([G1] と [HKN1] の復習)

Graham [G1] は,

$$(4.1) \quad \eta_1^G = 4 A_{44}^0 + O(r)$$

を示し, このことを用いて次の結果を得た.

Graham の定理 ([G1]). $r = r^F$ に対して (1.1) を考えたとき

$$(4.2) \quad \varphi^B = 1 + O(r^3)$$

$$(4.3) \quad \psi^B = -3\eta_1^G + k^B \left| A_{24}^0 \right|^2 r + O(r^2)$$

が成り立つ. 但し k^B は領域 Ω の選び方に依らない普遍定数である.

普遍定数 k^B の値は, [HKN1; Remark 1] において決定されている: $k^B = \frac{24}{5}$.
これで, $\psi^B \bmod O(r^2)$ の仕組が完全にわかった. この方法を精密にして $\psi^B \bmod O(r^3)$ を調べようとするとき, 具体的に必要な作業は次の二つである.

作業 1. $O(r^2)$ の誤差でウエイト 4 の局所変換則をみたす W_4 で, 境界値が $k^B \left| A_{24}^0 \right|^2$ となるものを求めること.

作業 2. $\psi^B + 3\eta_1^G - W_4$ の境界値がウエイト 5 の CR 不変量であることを示し, その形を決めること.

作業 1, 2 を実行すればよいことを説明するためには, (4.2) と (4.3) の証明を試みることが早道である.

Graham の定理の証明. Hörmander の古典的な結果 [H; Theorem 3.5.1] より $\varphi^B = 1 + O(r)$ がわかる. (以下と同様な議論からでも導くことができる.) そこで, 境界上の関数 P_1 を用いて

$$\varphi^B = 1 + P_1 r + O(r^2), \quad r = r^F$$

と書く. さて, Bergman 核 K^B はウエイト 3 の変換則をみたし, $r = r^F$ は $O(r^4)$ の誤差でウエイト -1 の局所変換則をみたすから, φ^B は $O(r^3)$ の誤差でウエイト 0 の局所変換則をみたす. よって, P_1 はウエイト 1 の CR 不変量と同じ変換則をみたす. 表示式 (1.1) の導き方 (例えば Boutet de Monvel-Sjöstrand [BS] によるもの) を忠実にたどればわかるように, P_1 は Moser の標準形の係数の多項式として書かれる. よって $P_1 \in I_1^{CR}$ であるから, 補題 1 より $P_1 = 0$ を得る. 従って

$$\varphi^B = 1 + P_2 r^2 + O(r^3)$$

をみたす境界上の関数 P_2 が存在するが, 上と同様な議論によって $P_2 = 0$ が得られる. (P_2 も Moser の標準形の係数の多項式の形に書き表される. 以下の解析においても同様の事実を用いるが, 詳しくは注意しない.) こうして (4.2) が示された.

(4.3) を証明するために, ψ^B が $O(r^\infty)$ の誤差でウエイト 3 の局所変換則をみたすことに注意する. このことから以前と同様の議論が使えて, ψ^B の境界値がウエイト 3 の CR 不変量であることがわかる. よって補題 1 と (4.1) より

$$\psi^B = k_3^B \eta_1^G + O(r), \quad k_3^B \text{ は普遍定数,}$$

を得る. 普遍定数の値は, ψ^B を近似計算することにより決定できる: $k_3^B = -3$. さて, $\psi^B + 3\eta_1^G$ は $O(r^2)$ の誤差でウエイト 3 の局所変換則をみたす. そこで境界上の関数 P_4 を用いて

$$\psi^B + 3\eta_1^G = P_4 r + O(r^2)$$

と書くと, P_4 はウエイト 4 の CR 不変量である. (実際, P_4 は Moser の標準形の係数の多項式である. このことは, ψ^B, η_1^G, r^F を Moser の標準形に現れる座標で書き

てみればわかる cf. [HKN1]) . よって補題 1 より (4.3) が得られる. 証明終

上の証明をみれば, 作業 1, 2 の意味がはっきりとわかる. 本質的なのは作業 1 の方で, 作業 2 の方は (実行の難易を別とすれば) 単に技術的な問題である. また, 境界値問題 (2.1) の C^∞ 近似解を基礎にしてできる議論がここまでであることもわかった. (この先に進もうとすれば, 誤差を含んだ変換則が意味を失う.)

次節においてみるように, W_4 はウエイト 4 の Weyl 不変量である (二通りの選び方がある). Weyl 不変量は, 領域 Ω の次元が高い場合に, φ^B の不変式論において本質的な役割を果たした (Fefferman [F3]) .

5. ウエイト 4 の Weyl 不変量

領域 Ω の指定された境界点の近傍を小さく取り, それを Ω に制限したものを V と書く. $C^* = C \setminus \{0\}$ とおくと, $C^* \times V$ 上の Lorentz-Kähler 計量 g が, Kähler 形式

$$\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}(|z_0|^{2/3} r^G(z)), \quad (z_0, z) \in C^* \times V,$$

によってきまる (r^G は (2.2) で定義している). 計量 g の曲率テンソル R に対して,

$$\omega = \text{trace}(\nabla^p \bar{\nabla}^q R \otimes \cdots \otimes \nabla^r \bar{\nabla}^s R)$$

という形のスカラー関数 $\omega \in C^\infty(C^* \times V)$ が g の Weyl 不変量である. 但しここで trace は, スカラーになるまで計量 g に関して縮約を続けることを表す. このとき ω は

$$\omega(z_0, z) = |z_0|^{-2w/3} W(z).$$

という形をしているが, 関数 W のことも Weyl 不変式と呼び, w をそのウエイトという. ウエイト $w \leq 5$ のときには, $W = W_\Omega$ は $O(r^{6-w})$ の誤差でウエイトの局所変換則をみたす. よって $W = W_\Omega$ は $O(r^{6-w})$ の誤差で意味をもつ. ウエイト w の Weyl 不変量全体の成す実ベクトル空間を I_w^W と書こう. 明らかに $I_0^W = \mathbf{R}$ であるが, $1 \leq w \leq 5$ に対する I_w^W は次の形をしている.

補題 2 ([HKN2]) . $I_1^W = I_2^W = \{0\}$, $\dim I_3^W = 1$, $\dim I_4^W = \dim I_5^W = 2$ が成り立つ.

I_3^W の元は $\Delta^2 S$ の定数倍である. ここで S はスカラー曲率, Δ は計量 g に関するラプラシアンである. I_4^W は $|\nabla \bar{\nabla} R|^2$ と $|\nabla^2 R|^2$ によって張られ, I_5^W は $|\nabla^3 R|^2$ と $|\nabla^2 \bar{\nabla} R|^2$ によって張られる.

また, ウェイト $w = 3, 4, 5$ のときには, Weyl 不変量 W の境界値は, W と同じウェイトを持つ CR 不変量である. 実際,

補題 3. 境界上で $\Delta^2 S = (4!)^2 A_{44}^0$

$$\frac{1}{3} |\nabla \bar{\nabla} R|^2 = \frac{1}{7} |\nabla^2 R|^2 = 2^8 |A_{24}^0|^2$$

$$|\nabla^3 R|^2 = -4(5!)^2 F(-5, 18, 18, 1)$$

$$|\nabla^2 \bar{\nabla} R|^2 = -4(5!)^2 F(-\frac{37}{15}, 10, \frac{57}{5}, \frac{4}{3})$$

が成り立つ. 但し $F(a, b, c, d)$ は補題 1 において定義されている.

こうして, 作業 1 の答がわかった. また作業 2 を実行することも可能であり, 次の定理を得る.

定理 ([HKN2]) . $r = r^F$ に対して (1.1) を考えたとき,

$$\psi^B = -3\eta_1^G + \frac{1}{160} |\nabla \bar{\nabla} R|^2 r + \left(a |\nabla^3 R|^2 + b |\nabla^2 \bar{\nabla} R|^2 \right) r^2 + O(r^3)$$

が成り立つ. 但しここで a, b は領域の形に依らない普遍定数である. (それらの値を決定することもできる). ここではウェイト 3 の CR 不変量の内部への拡張として η_1^G を採用したが, Weyl 不変量 $\Delta^2 S$ を用いても同様な展開がえられる.

参考文献

- [BS] L. Boutet de Monvel and J. Sjöstrand, *Sur la singularité de noyaux des Bergman et de Szegő*, Soc. Math. de France, Astérisque **34-35** (1976) 123–164.
- [CY] S.-Y. Cheng and S.-T. Yau, *On the existence of a complete Kähler metric on non-compact complex manifolds and the regularity of Fefferman's equation*, Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980) 507–544.
- [CM] S. S. Chern and J. K. Moser, *Real hypersurfaces in complex manifolds*, Acta Math. **133** (1974) 219–271.
- [F1] C. Fefferman, *The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudo-convex domains*, Invent. Math. **26** (1974) 1–65.
- [F2] C. Fefferman, *Monge-Ampère equations, the Bergman kernel, and geometry of pseudoconvex domains*, Ann. of Math. (2) **103** (1976) 395–416, *Correction*, ibid. **104** (1976) 393–394.
- [F3] C. Fefferman, *Parabolic invariant theory in complex analysis*, Adv. in Math. **31** (1979) 131–262.
- [G1] R. Graham, *Scalar boundary invariants and the Bergman kernel* in "Complex Analysis II" (C. A. Berenstein, ed.), Lect. Notes in Math. 1276, 108–135, Springer, 1987.
- [G2] R. Graham, *Higher asymptotics of the complex Monge-Ampère equation*, Compositio Math. **64** (1987) 133–155.
- [H] L. Hörmander, *L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator*, Acta Math. **133** (1965) 86–152.
- [HKN1] K. Hirachi, G. Komatsu and N. Nakazawa, *Two methods of determining local invariants in the Szegő kernel*, "Complex Geometry" (G. Komatsu, et al. ed.), Lect. Notes in Pure and Appl. Math. 143, 77–96, Dekker, 1992.
- [HKN2] K. Hirachi, G. Komatsu and N. Nakazawa, in preparation.
- [LM] J. Lee and R. Melrose, *Boundary behaviour of the complex Monge-Ampère equation*, Acta Math. **148** (1982) 159–192.