

不動点集合の次元について

阪大理 川久保 勝夫

§1. 序

Lie 群 G が多様体に作用している時, 不動点の色々な性質を調べることは, 変換群の研究のうちで 興味ある問題の一つと思われる。今回は不動点集合の次元について限って考察してみたい。

少しく歴史を振り返ってみよう。この種類の問題については Conner-Floyd [3] が involution の時 Euler characteristic との関係で 次元を評価したのが最初であると思われる。その後 Boardman [1] が, この結果を unoriented bordism との関係に拡張し, best possible に精密化した。semi-free S^1 -action に関しては多様体の index との関係に於て, 内田-川久保 [6] が不動点集合の次元を評価し, Ossa [8] は bordism との関係で評価した。

regular $\mathbb{Z}_p$ -action に関しては index との関係
及び oriented bordism との関係で、不動点集合の次元
を評価した [5]。一般の $\mathbb{Z}_p$ -action に関しては
tom-Dieck の U -cobordism で実行した [9]。

又 $(\mathbb{Z}_2)^k$ -action では U 及び $\mathcal{R}$ で可能である。やむ
を得ないことであると思うが、indecomposable な元
以外は、不動点の集合の次元が何以上という形にはなってい
ない。しかしこの結果は画期的で その方法は Conner-
Floyd の bordism theory と Atiyah-Bott-Segal
- Singer の localization を結びつけたものである。
この萌芽は Conner [2] に既に見られる。

ここからは oriented cobordism version を考えてみた
い。 $(\mathbb{Z}_2)^k$ -action に関しては今の満足ゆく結果が得ら
れないので省略する。 $\mathbb{Z}_p$ -action に関しては

Koerniowski が mimeographed [7] で Atiyah
- Bott の G -signature theorem の整数論的考察を
やっていたが 筆者には証明になっていたように思われな
い。そこで別証を添えてみた。

証明は 大ざっぱに言うと tom-Dieck の U を Ω
で証明しなおすという方針。 U より Ω の方が少しやさし
いが 結局 $\otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ または $\otimes \mathbb{Z}_p$ で考えるよいことが

分り, 又不動点集合の normal bundle の complex structure は U の場合と異なり, action により入れないので U の場合の半分より多く, 他は $\Omega_* \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ が U の半分であるということとか, うまく対応している等々。

定理を述べるために, 次の notation を導入しよう。

$$\{\Omega_0, \Omega_4, \Omega_8, \dots, \Omega_{4j}\} \quad \text{により}$$

生成される $\Omega_* \otimes \mathbb{Z}_p$ の subring を $\Omega(4j)$ と書く。

又不動点集合の次元 $\leq k$ であるような $\mathbb{Z}_{p^r}$ -action を許す多様体により生成される元全体により生成される

$\Omega_* \otimes \mathbb{Z}_p$ の subring を $F(\mathbb{Z}_{p^r}, k)$ と書く。

この時 次の定理が成り立つ。

$$\text{定理} \quad \begin{cases} F(\mathbb{Z}_{p^r}, 4k) = \Omega(4kp^r + 2p^r - 2) \\ F(\mathbb{Z}_{p^r}, 4k+2) = \Omega(4kp^r + 4p^r - 4). \end{cases}$$

系1 $[M]$: indecomposable in $\Omega_* \otimes \mathbb{Z}_p$ の時
 M 上の任意の $\mathbb{Z}_{p^r}$ -action に於て次の不等式が成立する。

$$\frac{\dim M + 2}{p^r} - 2 \leq \dim F$$

そこで F は 不動点集合のうち r -次元がいちばん大きいものを示す。

注意 1 Koenigowski [7] にも類似の定理があるが、上の系は *best possible* なので Koenigowski の評価は、誤りと思われる。

系 2, 任意の $X \in \mathcal{L}_m$ は 不動点の集合 の次元が $\leq \frac{m}{p^r}$ なる action を許す多様体を代表される。

§ 2. 証明のあすすじ.

$G = \mathbb{Z}_{p^r}$ とおく. $\gamma_k : F_k^{SO}(G) \rightarrow B_k^{SO}(G)$ と universal k -次元 real G -vector bundle とする.

$MSO_k(G)$ をその Thom space と表わそう. そして γ_k と pointed G -space とみる.

V : real G -module とし $V^c = V \cup \{\infty\}$ を 1-point compactification とする.

このような V 全体は direct system をなし, 次の

equivariant G -cobordism が定義される。

$$\Omega_G^n = \varinjlim [V^c, MSO_{\dim V + n}(G)]_G^0.$$

V : real n -dim G -vector space.

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & E_n^{SO}(G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ pt & \longrightarrow & B_n^{SO}(G) \end{array}$$

τ classifying map があり、自然に

$$\tau(V) : V^c \longrightarrow MSO_n(G)$$

τ induce する。 $\tau(V) \in \tilde{\Omega}_G^n(V^c)$ の Thom class と呼ぶ。 $s : S^0 \longrightarrow V^c$ を 原点を基点に行く写像をとり、 $e(V) = s^* \tau(V) \in \tilde{\Omega}_G^n(S^0) \cong \Omega_G^n$ を V の Euler class と呼ぶ。

$$S = \{ e(V) \mid V: \text{trivial summand を含まない} \} \\ \text{real } G\text{-module}$$

とすると Ω_G^* の multiplicative set となる。

S による Ω_G^* の localization は $S^{-1}\Omega_G^*$ と書く。

$\iota : \Omega_G^* \longrightarrow S^{-1}\Omega_G^*$ による自然な写像を表す。

$\sigma = \pm 1$ しよう。

次に *bundling map* と呼ばれるものを定義しよう。

先ず $EG \rightarrow BG$ を *universal principal G -bundle* とする。この時

$$\Omega_G^* \xrightarrow{\alpha} \Omega^*(BG)$$

を次の写像の *composition* より induce される写像として定義する。

$$\begin{aligned} & [V^c, \text{MSO}_{k+|M|}(G)]_G^0 \\ & \rightarrow [V^c \wedge EG^+, \text{MSO}_{k+|M|}(G) \wedge EG^+]_G^0 \\ & \rightarrow [V^c \wedge EG^+/G, \text{MSO}_{k+|M|}(G) \wedge EG^+/G]^0 \\ & \rightarrow [V^c \wedge EG^+/G, \text{MSO}(k+|M|)]^0 \\ & \rightarrow \Omega^{k+|M|}((V^c \wedge EG^+)/G) \\ & \rightarrow \Omega^k(BG) \end{aligned}$$

この α という写像は Ω_G^* という計算しにくいものを普通のコホモロジーの *cobordism* に関係づけたという大きな意味がある。

$\Omega^*(BG)$ の Euler class を定義しよう。

まず V : real G -module 考へ. universal principal G -bundle $EG \rightarrow BG$ に associate した次の bundle を考へる。

$$\begin{array}{ccc} V \times EG/G & \longrightarrow & E^{so}(|V|) \\ \downarrow & & \downarrow \\ BG & \longrightarrow & BSO(|V|) \end{array}$$

上の diagram は classifying map を示す。

この写像は自然に $f: V^c \wedge EG^+/G \rightarrow MSO(M)$

を induce する。 $s: BG \rightarrow V^c \wedge EG^+/G$ を

zero cross section を表わす時。

$$e(V) \stackrel{\text{def}}{=} [fs] \in \Omega^M(BG)$$

上で定義した e は Euler class を preserve する。

前と同様

$$S = \{e(V) \mid V: \text{trivial summand を含む real } G\text{-module}\}$$

とあくと $\Omega^*(BG)$ の multiplicative set となる。

S による $\Omega^*(BG)$ の localization は $S^{-1}\Omega^*(BG)$ と書き $\wedge: \Omega^*(BG) \rightarrow S^{-1}\Omega^*(BG)$ をその自然な写像と

表わすことにする。 α が Euler class を preserve
 するということから、次の diagram が出来る、

$$\begin{array}{ccc} \Omega_G^* & \xrightarrow{\alpha} & \Omega^*(BG) \\ \downarrow \wedge & & \downarrow \wedge \\ S^1 \Omega_G^* & \xrightarrow{S^1 \alpha} & S^1 \Omega^*(BG) \end{array}$$

又 $1 \text{ pt} \longrightarrow BG$ 存在写像により $\Omega^*(BG) \xrightarrow{\pi} \Omega^*$
 Ω^* が induce され、又 $\Omega^* \xrightarrow{D} \Omega_{-*}$ 存在自然変換
 像もある。以上は S^1 の spectrum より定義された
 cobordism であり、幾何学的な cobordism は勿論
 ある。これを $\mathcal{G}\Omega_*^G$ と書くことにすると、Pontryagin
 Thom construction により

$$\iota: \mathcal{G}\Omega_*^G \longrightarrow \Omega_*^G$$

を得るが、一般には ι は同型ではない。

又 G -action に対し、その不動点集合と normal
 bundle (表現空間の 2) を対応させることにより

$$F: \mathcal{G}\Omega_*^G \longrightarrow \bigoplus \Omega_*^G(\pi B U(m_i))$$

と置く。

補題 1. 次 n 字像の結合

$$q: \Omega_n^G \xrightarrow{i} \Omega_n^G \xrightarrow{\alpha} \Omega^{-n}(BG) \xrightarrow{\pi} \Omega^{-n} \xrightarrow{D} \Omega_n$$

は G -action $(M^n, G) \curvearrowright [M] \in \Omega_n$ を $\# \pm$ の字像である。

補題 2. $D\pi \Lambda^{-1}(0) = p \Omega_n$

補題 3. II: $S^{-1}\Omega_*^G \cong \Omega_*(\prod_j BU) \otimes \mathbb{Z}[V_j, V_j^{-1}]$

ここで $1 \leq j \leq (p^r-1)/2$ として V_j は complex 1 次元の vector space として $\mathbb{Z}_{p^r}$ -action は generator $\exp 2\pi i/p^r$ 及び $\exp 2\pi j i/p^r$ 倍で作用するものを示す。

次 $\oplus \Omega_*(\pi BU(n_j)) \xrightarrow{\omega} \Omega_*(\prod_j BU) \otimes \mathbb{Z}[V_j, V_j^{-1}]$ を定義しよう。

$$b: \pi BU(n_j) \rightarrow \pi BU$$

を stabilize map を表わすとき

$$\omega(y) \stackrel{\text{def}}{=} b_*(y) \otimes \pi(V_j^{-n_j}).$$

次 $\nu: BU \rightarrow BU$ を H-space inverse map

を表わし, その積を $\pi = \pi \circ$ とおく.

補題 4. 次の diagram は可換である

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G}\Omega_*^G & \xrightarrow{i} & \Omega_*^G \\
 \downarrow F & & \downarrow \lambda \\
 & & S^{-1}\Omega_*^G \\
 & & \cong \\
 \oplus \Omega_*(\pi B U_n) \xrightarrow{(\pi \otimes 1) \cdot \omega} & \Omega_*(\pi B U) \otimes \mathbb{Z}[V_j, V_j^{-1}]
 \end{array}$$

前に出た束 τ diagram の $-ip$ を $\otimes \mathbb{Z}_p$ に書くと次のようになる

$$\begin{array}{ccccc}
 \Omega_*^G \otimes \mathbb{Z}_p & \xrightarrow{\alpha \otimes 1} & \Omega^*(BG) \otimes \mathbb{Z}_p & \xrightarrow{\pi \otimes 1} & \Omega^* \otimes \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\cong} \Omega \otimes \mathbb{Z}_p \\
 \downarrow \lambda \otimes 1 & & \downarrow \lambda \otimes 1 & & \\
 S^{-1}\Omega_*^G \otimes \mathbb{Z}_p & \xrightarrow{S^{-1}\alpha \otimes 1} & S^{-1}\Omega^*(BG) \otimes \mathbb{Z}_p & & \\
 \cong \downarrow \cong \otimes 1 & & & & \\
 \Omega_*(\pi B U) \otimes \mathbb{Z}_p [V_j, V_j^{-1}] & & & &
 \end{array}$$

補題 2 より次を得る

補題 5 $(D \otimes 1) \cdot (\pi \otimes 1) \cdot (\lambda \otimes 1)^{-1} \cdot (S^{-1}\alpha \otimes 1)$ は

Image $(\lambda \otimes 1)$ 上 τ well-defined ring homomorphism.

こゝ 2 次 の 記 号 を 導 入 す

$$F_k = \left\{ \bigoplus_{i \in k} \Omega_i(\prod_j BU) \otimes \mathbb{Z}_p[V_j^{-1}] \mid \text{生成される subring} \right\}$$

$$D_k = F_k \cap \text{Image} \{ (\mathbb{Z} \otimes 1) \cdot (\lambda \otimes 1) \}$$

2.2 定理の

$$F(\mathbb{Z}_{p^r}, 4k) = \Omega(4kp^r + 2p^r - 2)$$

を証明しよう。

$$F(\mathbb{Z}_{p^r}, 4k) \supset \Omega(4kp^r + 2p^r - 2)$$

は実際に構成可能はよく, tom-Dieck [9] の例に倣えばよい。逆の方が問題がある。

F_{4k} は $k p^r + \frac{p^r-1}{2}$ 個の不定元の $\mathbb{Z}_p$ 上 polynomial ring となる。

今 G -action (M, G) で $[M] \in F(\mathbb{Z}_{p^r}, 4k) - \Omega(4kp^r + 2p^r - 2)$ と仮定しよう。明らかに

$$(n \otimes 1) \cdot w \cdot F[M, G] \in D_{4k}$$

となる。

一方上の包含関係を示す時に作, 大例は 次の性質をうまく可能である。 $\mathbb{Z}_{p^r}$ - 多様体 $(M_i, \mathbb{Z}_{p^r})$ で

$$(i) \quad \dim M_i = 4i$$

$$(ii) \quad (m_* \otimes 1) \cdot w \cdot F[M_i, Z_{pr}] \in D_{4k}$$

(iii) $[M_i]$ は $\Omega_* \otimes Z_p$ の生成元である。

D_{4k} は F_{4k} の一部であるから Z_p 上の超越次数は
 高々 $kpr + (pr-1)/2$ である。上で作った例により

D_{4k} には既に

$$(m_* \otimes 1) \cdot w \cdot F[M_i, Z_{pr}] \quad i=1, 2, \dots, kpr + (pr-1)/2$$

という $kpr + (pr-1)/2$ 個の代数的に独立な元が存在する。
 この集合に $(m_* \otimes 1) \cdot w \cdot F(M, Z_{pr})$ を加えると代数的
 に独立でなくなる。よって補題 1 及び 4 より

$$[M], [M_i] \quad i=1, 2, \dots, kpr + (pr-1)/2$$

は代数的に独立でない。 $\Omega_* \otimes Z_p$ は各 $4i$ 次元に生成
 元をもつ polynomial ring であるから、最初の仮定は
 上の集合が代数的に独立であることを示しているから、矛盾
 がある。よって

$$F(Z_{pr}, 4k) \subset \Omega(4kpr + 2pr - 2)$$

が示された。

他の等式

$$F(Z_{pr}, 4k+2) = \Omega(4kpr + 4pr - 4)$$

も同様である。

又 系 1 は定理よりすぐ出ると 系 2 は定理を帰納的に

使うことにより証明される。

注意2 Conner - Floyd [4] は $\mathbb{Z}_p$ が M に不動点なしに作用した時 $p \mid [M]$ in SL_* を示した。よって 不動点集合の次元を調べるのに $\otimes \mathbb{Z}_p$ が来るのが自然である。

注意3 内田 [10] は $SU(m)$ action 等 non abelian group action では 不動点なしに動く場合が多いことを示し abelian group では この種の問題では全く違った様相を呈することを示した。

注意4 定理は $k=-1$ とおくことにより Conner - Floyd [4] の結果を含んでいる。

参考文献

- [1] Boardman, J. M.: On manifolds with involution,
Bull. A. M. S. 73 (1967), 136-138.
- [2] Conner P. E.: Seminar on Periodic Maps,
Springer-Verlag 46 (1967).
- [3] Conner P. E. and Floyd E. E.: Differentiable
periodic maps. Springer (1964)
- [4] _____: Maps of odd
period, Ann of Math. 84 (1966) 132-156.
- [5] Kawakubo K.: The index of Z_p -actions
(mimeographed).
- [6] Kawakubo K. and Uchida; The index of a
semi-free S^1 -action, J. Math. Soc. Japan
23 (1971), 351-355.
- [7] Kosniowski C. What the fixed points say
about a Z/p manifold, (mimeographed).
- [8] Ossa E. Cobordismen theorie von Fixpunktfreien
und semi-freien S^1 -manigfaltigkeiten. Thesis
Bonn (1969).

[9] Tammo tom Dieck ; Periodische Abbildungen
unitären Mannigfaltigkeiten, *Math. Z.* 126, 275-
295 (1972).

[10] Uchida F. 不動点をもたない $SU(m)$ 作用を許す
弱複素多様体について. (these proceedings).