

ケプラー運動における等エネルギー面のトポロジー

京都産業大学理学部 吉田 淳 三

§ 1. 序

Newton の中心力に従って運動する質量 m の質点の運動は, x を質点 m の位置ベクトル, y をその運動量, また K を定数として

$$m \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{K}{|x|^3} x \quad (1.1)$$

で与えられる. $x=0$ は特異点で, (1.1) の右辺は $x \neq 0$ なる任意の (x, y) に対して定義される. この定義域を $X = (R^3 - \{0\}) \times R^3$ で表わし, Kepler 運動の phase space と呼ぶ.

この小論では phase space X の topological structure の解明を目差し, 即ち, Kaplan (1942) のプログラムに従って phase space X が相異なる等エネルギー面によって如何に埋めつくされるか, また個々の等エネルギー面は相異なる等エネルギー・等角運動量面によって如何に埋めつくされるか, 更にまた各等エネルギー・等角運動量面が個々の軌道によって如何に埋めつくされるかを考察することを目差し, これまでに得られた結果につき報告する.

この問題は Moser (1970), Stiefel-Scheifele (1971), Easton

(1971), Souriau (1974) et al. によって論じられ, 特に Moser (1970) は系のエネルギーが負の場合に Kepler 運動を n 次元空間に一般化して次の結果を示している. 尚 Moser の結果は Belbruno (1977) によってエネルギーが 0 又は正の場合に拡張されている.

Theo. 1 (Moser) エネルギーが負の場合, energy surface $H(x, y) = E$ は n 次元球面 S^n 上の unit tangent bundle から 1 点 'north pole' を抜いたものに同相であり, Kepler 運動はこの punctured sphere 上の geodesic flow に写される.

特に $n=2$ の場合, S^2 上の unit tangent bundle は 3 次元実射影空間 P^3 に同相である.

Theo. 2 (Moser) Energy surface 上の Kepler flow の orbit space は $S^2 \times S^2$ に同相. 特に $n=2$ の場合は S^2 に同相.

Moser et al. の研究では orbit space から energy surface を再構成する問題には取り扱われていない. 我々は Kustaanheimo-Stiefel (1965) の結果を利用し, Kustaanheimo-Stiefel の parametric space における Kepler flow の topology を考察し, その結果を KS-変換で phase space X 上に引き戻すことにより上記 Moser et al. の議論の隙を埋めようとするものである. 我々は energy surface $H(x, y) = E$ は衝突点に相当する適当な集合を附加して compact 化を行なった後, $S^2 \times S^2$

を base とし S' を fibre とする fibre bundle と同相であろうと予想している.

§2. Kustaanheimo-Stiefel の変換.

この節および次節では以下の議論に直接役立つ Kustaanheimo-Stiefel の変換の諸性質 — Stiefel-Scheifele (1971) に explicit あるいは implicit に述べられているものや、それらを我々の目的に合わせて少し変更したものなど — を lemmata として証明なしに掲げる.

Kustaanheimo-Stiefel の変換 (以下 KS-map と略称) は次のように定義される (Kustaanheimo-Stiefel (1965)).

Def. 1 KS-map $T_1: R^4 \rightarrow R^3; u \mapsto x = \begin{bmatrix} u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2 \\ 2(u_1 u_2 - u_3 u_4) \\ 2(u_1 u_3 + u_2 u_4) \end{bmatrix}$

この map は $L(u) = \begin{bmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{bmatrix}$ とし, R^3 の元は常に $\mathbf{0}$

4-成分 0 を持つものとするれば, $x = L(u)u$ と書ける. また

$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, $i = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$, $j = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$, $k = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ とし
て $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$ から 4-vectors: iu, ju, ku を作る $L(u) = (u, iu, ju, ku)$ と書ける.

Lemma 1. ($L(u)$ の直交性) $L^T(u)L(u) = L(u)L^T(u) = |u|^2 \varepsilon, |x| = |u|^2$

$L(iu) = L(u)i, L(ju) = L(u)j, L(ku) = -L(u)k.$

Lemma 2. $T_1: u \mapsto x = L(u)u$ は R^4 から R^3 への C^∞ -surjection

で, $S_{\sqrt{r}}^3 = \{u \in \mathbb{R}^4 \mid |u| = \sqrt{r}\}$, $S_r^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = r\}$ とすると $T_1(S_{\sqrt{r}}^3) = S_r^2$.

Lemma 3. (同値類) $L(u)u = L(\bar{u})\bar{u} = x \Leftrightarrow \exists \varphi: \bar{u} = R(\varphi)u$.

$$R(\varphi) = \cos \varphi \cdot E - \sin \varphi \cdot K.$$

Def. 2. $\forall u \in \mathbb{R}^4 (u \neq 0) \mapsto \exists!$ $\mathcal{L}_u \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in \mathbb{R}^4 \mid L(u)v = L(v)u\}$.

Lemma 4. $v \in \mathcal{L}_u \Leftrightarrow \langle v, ku \rangle = 0$. $\mathcal{L}_u$ は u, iu, ju で張られる.

Lemma 5. $v \in \mathcal{L}_u \Leftrightarrow L(u)v$ の 4-成分 $= 0$.

Lemma 6. $v \in \mathcal{L}_u \Leftrightarrow |u|^2 L(v)v - 2\langle u, v \rangle L(u)v + |v|^2 L(u)u = 0$.

Def. 3. $\forall u \in \mathbb{R}^4 (u \neq 0) \mapsto \exists!$ $T_u: \mathcal{L}_u \rightarrow \mathbb{R}^3$ を次のように定める. $T_u: \mathcal{L}_u \rightarrow \mathbb{R}^3; v \mapsto y = \frac{2}{|u|^2} L(u)v$.

Lemma 7. T_u は $\mathcal{L}_u$ から $\mathbb{R}^3$ への C^∞ -diffeomorphism で,
 $T_u^{-1}: y \mapsto v = \frac{1}{2} L^{-1}(u)y$.

Lemma 8. $L(u)u = L(\bar{u})\bar{u}$, $\exists v \in \mathcal{L}_u, \bar{v} \in \mathcal{L}_{\bar{u}}$ で $T_u(v) = T_{\bar{u}}(\bar{v})$
 $\Leftrightarrow \exists \varphi; \bar{u} = R(\varphi)u, \bar{v} = R(\varphi)v$.

§3. Parametric space $\mathcal{P}$ 上の Kepler flow と積分;
 等エネルギー面上の Kepler flow.

Phase space X 上の Kepler 運動 (1.1) は, 簡単のため
 $m=k=1$ とし, また独立変数 t を

$$dt = |x| d\Delta \quad (x \neq 0)$$

によって Δ に変換すると

$$\frac{dx}{d\lambda} = |x|y, \quad \frac{dy}{d\lambda} = -\frac{x}{|x|^2} \quad (3.1)$$

となる. エネルギー-積分および角運動量積分はそれぞれ

$$\frac{1}{2}|y|^2 - \frac{1}{|x|} = E, \quad x \times y = C$$

である.

Def. 1 $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ の subset $P = \{(u, v) \mid u \in (\mathbb{R}^4 - \{0\}), v \in L_u\}$

を Kustaanheimo-Stiefel の parametric space と呼ぶ.

Def. 2 (拡張された KS-map) C^∞ -surjection $T: P \rightarrow X$;

$$(u, v) \mapsto (x, y) \text{ を}$$

$$x = T_1(u) = L(u)u, \quad y = T_u(v) = \frac{2}{|u|^2} L(u)v$$

で定義する.

Prop. 1 P 上の微分方程式系:

$$\frac{du}{d\lambda} = v, \quad \frac{dv}{d\lambda} = \frac{1}{|u|^2} \left[|v|^2 - \frac{1}{2} \right] u \quad (3.2)$$

は C^∞ -surjection T によって phase space X 上の Kepler 運動

(3.1) にうつる.

Prop. 2 Parametric space P 上の微分方程式 (3.2) は次のよ

うな積分をもつ.

$$1^\circ \quad L(u)v - L(v)u = 0, \quad (3.3)$$

$$L(u)iv - L(v)iu = C_1, \quad (3.4)$$

$$L(u)jv - L(v)ju = C_2, \quad (3.5)$$

$$L(u)kv - L(v)ku = C_3. \quad (3.6)$$

C_1, C_2, C_3 は定ベクトルで, 特に (3.6) は角運動量積分に相当する.

$$2^\circ \quad \frac{2}{|u|^2} [|v|^2 - \frac{1}{2}] = c. \quad (c \text{ は定数}) \quad (3.7)$$

積分 2° を考慮すると parametric space P 上の微分方程式系 (3.2) は等エネルギー面:

$$P_c^* = \{ (u, v) \mid |u| \neq 0, v \in \mathcal{L}_u, \frac{2}{|u|^2} [|v|^2 - \frac{1}{2}] = c \} \quad (3.8)$$

毎に微分方程式系:

$$\frac{du}{d\lambda} = v, \quad \frac{dv}{d\lambda} = \frac{c}{2} u \quad (3.9)$$

に帰着する. この方程式系の右辺は $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ で特異点を持たぬ形であるから, その定義域を (3.8) から条件 $|u| \neq 0$ をおとして

$$P_c = \{ (u, v) \mid v \in \mathcal{L}_u, 2|v|^2 - c|u|^2 = 1 \} \quad (3.10)$$

に拡大する. P_c は P_c^* に集合 $S = \{ (u, v) \mid u=0, |v|^2 = \frac{1}{2} \}$ を付け加えたものである.

Def. 3. 微分方程式 (3.9) で定義される P_c 上の flow を等エネルギー面上の Kepler flow と呼ぶ.

等エネルギー面 P_c^* 上で $u \rightarrow 0$ となる方程式 (3.2) の解曲線は, P_c^* を P_c に拡大し方程式 (3.9) を用いることにより $u=0$ を越えてこれを一次的に接続することが可能になる. この操作が Kustaanheimo-Stiefel の regularization であり, 従来, Sundman, Levi-Civita et al. による 2 体衝突の解析的接続に相当する. しかし今考察を特定の P_c から parametric space P 内のすべての P_c に広げると事情は楽観を許さぬことが判る. 実際上記の拡張を行うとき, すべての等エネルギー面 P_c は集合 S (衝突点に相

当)を共有する. 従って $P' = P \cup S$ 上で方程式 (3.2) の正則化は依然としてなされていない. 一般に 2 体衝突の正則化が可能であるのは衝突の前後でエネルギーが不変に保たれるという仮定 — 運動方程式はこの点については何の指示も与えてくれない — の下においてのみのことである.

§4. 等エネルギー面 P_E のトポロジ.

以下エネルギー定数 E が負であるような等エネルギー面上に議論を限定する. $E = -2\omega^2$ とおくと P_E は

$$P_E = \{(u, v) \mid v \in \mathcal{L}_u, 2|v|^2 + 2\omega^2|u|^2 = 1\} \quad (4.1)$$

と書ける. P_E 上の Kepler flow (3.9) の一般解は $A = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ -\omega^2 \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$,

初期値を u_0, v_0 として

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = e^{sA} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega s \cdot \varepsilon & \frac{1}{\omega} \sin \omega s \cdot \varepsilon \\ -\omega \sin \omega s \cdot \varepsilon & \cos \omega s \cdot \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

で与えられる.

Prop. 1. $P_E \stackrel{\text{diffeo}}{\cong} S^3 \times S^3$.

⊙ $S^3 \times S^3$ に同相な集合 $\{(\xi, \eta) \mid \xi, \eta \in \mathbb{R}^4, |\xi|^2 = |\eta|^2 = 1/(2\omega^2)\}$ を考える. 記述を簡単にするためこの集合自身も $S^3 \times S^3$ で表わす. $\forall (\xi, \eta) \in S^3 \times S^3$ に対して

$$u = \frac{1}{2}K(\xi - \eta), \quad v = \frac{\omega}{2}(\xi + \eta) \quad (4.3)$$

$$\text{とおくと } L(u)v = \frac{\omega}{4}\{L(K\xi) - L(K\eta)\}(\xi + \eta) = \frac{\omega}{4}\{L(\eta)K\xi - L(\xi)K\eta\},$$

$$\text{同様に } L(v)u = \frac{\omega}{4}\{L(\eta)K\xi - L(\xi)K\eta\}.$$

$$\text{故に} \quad v \in \mathcal{L}_u. \quad (4.4)$$

$$\text{また} \quad 2|v|^2 + 2\omega^2|u|^2 = \frac{\omega^2}{2}\{| \xi + \eta |^2 + | \xi - \eta |^2\} = 1. \quad (4.5)$$

(4.4), (4.5) は変換 (4.3) が $S^3 \times S^3$ から $P_{\mathbb{R}}$ の中への C^∞ -map であることを示す. 次に (4.3) を逆にといて

$$\xi = -ku + \frac{v}{\omega}, \quad \eta = ku + \frac{v}{\omega}. \quad (4.6)$$

$(u, v) \in P_{\mathbb{R}}$ なら $\langle ku, v \rangle = 0$ (§2, Lemma 4) であるから (4.6)

より

$$|\xi|^2 = |\eta|^2 = |u|^2 + \frac{1}{\omega^2}|v|^2 = \frac{1}{2\omega^2}.$$

これは (4.6) が $P_{\mathbb{R}}$ から $S^3 \times S^3$ への C^∞ -map であることを示す. 前の結果と合せて $P_{\mathbb{R}} \stackrel{\text{diffeo.}}{\cong} S^3 \times S^3$. q.e.d.

parametric space における平面運動

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^4$ を $|\alpha| = |\beta| = 1$, $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$, $\beta \in \mathcal{L}_\alpha$ であるような任意の定ベクトルとする. §2, Lemma 4 より $\beta = \beta_1 i\alpha + \beta_2 j\alpha$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$ と書ける. α, β で張られる $\mathbb{R}^4$ 内の平面を $\pi_{\alpha, \beta}$ で表す.

Lemma 1. KS -map T_1 は $\pi_{\alpha, \beta}$ から $a = L(\alpha)\alpha$, $b = L(\alpha)\beta$ で張られる平面 $\pi_{a, b} \subset X$ の上への全射を引き起こす. [Stiefel-Scheffele: §43, Theo. 5]

Lemma 2. $u, v \in \pi_{\alpha, \beta} \Rightarrow v \in \mathcal{L}_u$. [Ibid. §43, Theo. 1]

さて $P_{\mathbb{R}}$ 上の flow (3.9) の一般解 (4.2) の形および Lemma 2 より運動が $\pi_{\alpha, \beta}$ 上に限定されるためには初期値 $u_0, v_0 \in \pi_{\alpha, \beta}$ であることが必要十分である. 従ってエネルギー $E = -2\omega^2$

の $\pi_{\alpha, \beta}$ 上の平面運動の全体は

$$P_{\mathbb{R}}^0 = P_{\mathbb{R}} \cap \pi_{\alpha, \beta} = \{(u, v) \mid u, v \in \pi_{\alpha, \beta}, 2|v|^2 + 2\omega^2|u|^2 = 1\}$$

で表わされる.

Prop. 2. $P_{\mathbb{R}}^0 \xrightarrow{\text{diffeo.}} S^3$

⊙ 仮定 $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$, $\beta \in \mathcal{L}_{\alpha}$ より $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle K\alpha, K\beta \rangle = 0$, $\langle \alpha, K\beta \rangle = \langle K\alpha, \beta \rangle = 0$. また $\langle \alpha, K\alpha \rangle = \langle \beta, K\beta \rangle = 0$ であるから, $\alpha, \beta, K\alpha, K\beta$ は正規直交基底にとれる. 従って任意の $u, v \in P_{\mathbb{R}}^0$ に対

して $u = a_1\alpha + b_1\beta$, $v = a_2\alpha + b_2\beta$, $2(a_1^2 + b_1^2) + 2\omega^2(a_2^2 + b_2^2) = 1$

を満たす a_1, b_1, a_2, b_2 が一意に定まる. この場合前命題証明

中で定義した変換 (4.6) によって定まる ξ, η は独立ではない.

$\eta = \omega\xi$ が成り立つ. $E \in \mathcal{L}$ は $(\alpha, \beta, K\alpha, K\beta) \rightarrow (\alpha, \beta, -K\alpha, -K\beta)$ なる linear map. 従って変換:

$$\tilde{\xi} = -Ku + \frac{v}{\omega} \quad (4.7)$$

を考えれば十分である. さてこの変換は Prop. 1 証明中に示し

E と同様にして $P_{\mathbb{R}}^0$ から S^3 への C^∞ -map である. 逆に S^3 の任意

の元: $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_1\alpha + \tilde{\xi}_2\beta + \tilde{\xi}_3K\alpha + \tilde{\xi}_4K\beta$ に対して $u = -\tilde{\xi}_3\alpha - \tilde{\xi}_4\beta$,

$v = \omega(\tilde{\xi}_1\alpha + \tilde{\xi}_2\beta)$ とおけば S^3 から $P_{\mathbb{R}}^0$ への C^∞ -map が定まる.

q.e.d.

$P_{\mathbb{R}}$ における Kepler flow の orbit space

$P_{\mathbb{R}}$ 上の Kepler flow (3.9) の一般解 (4.2) は, S^1 と同相な fixed point free な位相変換群 $\{e^{i\Delta A} \mid \Delta \in \mathbb{R}, \Delta = \Delta' \pmod{2\pi}\}$ が $P_{\mathbb{R}}$ に左から作用しているとみなせる. 従って同一解曲線上の点を identify

して得られる orbit space は一般に $P_{\mathbb{R}}/S^1$ に, また平面運動の場合は $P_{\mathbb{R}}/S^1$ に同相であるが後者の場合特に次のことが成り

立っ.

Prop 3. $\mathbb{P}^0/S' \sim S^2$

(*) $\mathbb{P}^0$ 上の flow (3.9) は diffeomorphism (4.7) によって S^3 上の flow:

$$\frac{d\tilde{z}}{d\lambda} = -\omega k \tilde{z} \quad (4.8)$$

を引きおこす. 実さ $\frac{d\tilde{z}}{d\lambda} = -k \frac{du}{d\lambda} + \frac{1}{\omega} \frac{dv}{d\lambda} = -\omega k \left(\frac{v}{\omega} - ku \right) = -\omega k \tilde{z}$.

方程式 (4.8) の解は $\tilde{z}_0$ を初期値として

$$\tilde{z} = e^{-\omega \lambda k} \tilde{z}_0 = R(\omega \lambda) \tilde{z}_0. \quad (4.9)$$

$e^{-\omega \lambda k}$ は S^3 に左から作用する fixed point free な位相変換群で S^1 に同相, 従って同一解曲線上の点を identify して得られる

orbit space は S^3/S' である. 然るにこの identification は KS-map

T_1 による $S^3 = \{\tilde{z} \in \mathbb{R}^4 \mid |\tilde{z}| = 1/\sqrt{2\omega^2}\}$ から $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1/(2\omega^2)\}$ の

上への C^∞ -surjection による同値関係に等しいから $S^3/S' \sim S^2$.

結局命題を証明するためには $\mathbb{P}^0/S' \sim S^3/S'$ を示せばよい. 即ち

diffeomorphism (4.7) によって $\mathbb{P}^0$ の flow curve (4.2) が S^3 上の flow

curve (4.9) に対応すること示せばよい. $\tilde{z}_0 = -ku_0 + \frac{v_0}{\omega}$ とする.

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= R(\omega \lambda) \tilde{z}_0 = (\cos \omega \lambda \cdot \varepsilon - \sin \omega \lambda \cdot k) \left(-ku_0 + \frac{v_0}{\omega} \right) \\ &= -k (\cos \omega \lambda u_0 + \frac{1}{\omega} \sin \omega \lambda v_0) + \frac{1}{\omega} (-\omega \sin \omega \lambda u_0 + \cos \omega \lambda v_0) \\ &= -ku + \frac{1}{\omega} v. \end{aligned}$$

即ち, $\mathbb{P}^0$ から S^3 への diffeomorphism (4.7) を φ で表わすと

$$e^{-\omega \lambda k} \circ \varphi = \varphi \circ e^{\lambda A}$$

が示された. q.e.d.

等エネルギー・等角運動量面

エネルギー $E = -2\omega^2$, 角運動量 g の等エネルギー・等角運動量面は P_E の subset:

$$P_{E,g} = \{(u, v) \mid v \in \mathcal{L}_u, 2|v|^2 + 2\omega^2|u|^2 = 1, L(u)kv - L(v)ku = g\}$$

で表わされる.

Lemma 3. $P_{E,g} = \{(\xi, \eta) \mid \xi, \eta \in \mathbb{R}^4, |\xi|^2 = |\eta|^2 = \frac{1}{2\omega^2}, L(\xi)\xi - L(\eta)\eta = \frac{2}{\omega}g\}$.

⊙ P_E から $S^3 \times S^3$ への diffeomorphism (4.3), (4.6) により

$$g = L(u)kv - L(v)ku = \frac{\omega}{4} [(L(k\xi) - L(k\eta))k(\xi + \eta) - (L(\xi) + L(\eta))kk(\xi - \eta)] = \frac{\omega}{2} [L(\xi)\xi - L(\eta)\eta] \quad \text{g.e.d.}$$

Lemma 4. $\frac{1}{2\omega} \geq |g| \iff P_{E,g} \neq \emptyset$.

⊙ $|L(\xi)\xi| = |L(\eta)\eta| = \frac{1}{2\omega^2}$ であるから

$$P_{E,g} \neq \emptyset \Rightarrow \left| \frac{2}{\omega}g \right| \leq \frac{1}{\omega^2}, \quad \text{i.e., } |g| \leq \frac{1}{2\omega}.$$

逆は $|g| \leq \frac{1}{2\omega}$ なら $\frac{|g|}{\omega} \leq \frac{1}{2\omega^2}$ であるから

$$\langle a, g/|g| \rangle = |g|/\omega, \quad |a| = 1/(2\omega^2)$$

よって $a \in \mathbb{R}^3$ がとれる. $b = a - \frac{2}{\omega}g$ とおくと

$$|b|^2 = |a|^2 - \frac{4}{\omega} \langle a, g \rangle + \frac{4}{\omega^2} |g|^2 = |a|^2 = \frac{1}{2\omega^2}.$$

$L(\xi)\xi = a, L(\eta)\eta = b$ となるような (ξ, η) は $P_{E,g}$ の点である.

g.e.d.

Prop. 4 $|g| \neq \frac{1}{2\omega}, \neq 0$ とき $P_{E,g}$ は $S^1 \times S^1 \times S^1$ に diffeomorphic, また $|g| = \frac{1}{2\omega}$ なら $P_{E,g}$ は $S^1 \times S^1$ に diffeomorphic.

⊙ $|g| \neq 0$ であるから単位ベクトル $a \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}^4$ を選ん

で $\frac{2}{\omega}\delta = \Omega a$ ($\Omega \in \mathbb{R}$ と $\Omega = |\frac{2}{\omega}\delta|$), $L(\alpha)\alpha = a$ とする.

$\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = i\alpha$, $\alpha_3 = j\alpha$, $\alpha_4 = -k\alpha$, $a_1 = a = L(\alpha_1)\alpha_1$, $a_2 = L(\alpha_1)\alpha_2$, $a_3 = L(\alpha_1)\alpha_3$ とおくと $\{\alpha_i\}$ ($i=1, 2, 3, 4$), $\{a_i\}$ ($i=1, 2, 3$) はそれぞれ $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底である. 以下の座標系に依拠して議論を進める. ここで $\xi = \sum \xi_i \alpha_i$ とすると $L(\xi)\xi = \sum \xi_i \xi_j L(\alpha_i)\alpha_j$
 $= (\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 + \xi_4^2)a_1 + 2(\xi_1\xi_2 - \xi_3\xi_4)a_2 + 2(\xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_4)a_3$.

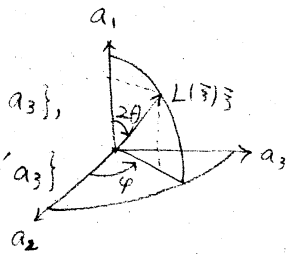
(i) $|\xi| \neq 0$, $\neq \frac{1}{2\omega}$ の場合.

$|L(\xi)\xi| = |L(\eta)\eta| = \frac{1}{2\omega^2}$ であるから パラメータ $\theta, \theta'; \varphi, \varphi'$ を導入して

$$L(\xi)\xi = \frac{1}{2\omega^2} \{ \cos 2\theta a_1 + \sin 2\theta \cos \varphi a_2 + \sin 2\theta \sin \varphi a_3 \},$$

$$L(\eta)\eta = \frac{1}{2\omega^2} \{ \cos 2\theta' a_1 + \sin 2\theta' \cos \varphi' a_2 + \sin 2\theta' \sin \varphi' a_3 \}$$

と表わせる (右図参照).



$$L(\xi)\xi - L(\eta)\eta = \frac{2}{\omega}\delta = \Omega a_1$$

であることは $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$, $\varphi' = \varphi$ から $\cos 2\theta = -\cos 2\theta' = \omega^2 \Omega$

であることが必要十分. 今の場合, 仮定によりさらに $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$

である. このような 4-vectors ξ, η の全体, 即ち $P_{\Omega, \xi}$ は

Stiefel-Scheifelle のアルゴリズム [Stiefel-Scheifelle (1971),

p. 32] により φ, ψ, ψ' をパラメータとして

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2\omega^2}} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi \\ \sin \theta \cos(\varphi - \psi) \\ \sin \theta \sin(\varphi - \psi) \\ \cos \theta \sin \psi \end{pmatrix}, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2\omega^2}} \begin{pmatrix} \sin \theta' \cos(\varphi - \psi') \\ \cos \theta \cos \psi' \\ \cos \theta \sin \psi' \\ \sin \theta \sin(\varphi - \psi') \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

で与えられる. この式により C^∞ -bijection:

$$S^1 \times S^1 \times S^1 \longrightarrow P_{\Omega, \xi} : (\varphi, \psi, \psi') \longmapsto (\xi, \eta)$$

が定義される。逆写像が C^∞ -map であることは (4.10) より,

例えば $\xi_1 > 0, \xi_2 < 0, \eta_3 > 0$ なる領域の $P_{\mathbb{R},g}$ の点 1 に対して

$$\psi = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2\omega^2}}{\cos\theta}\xi_4\right), \quad \varphi = \pi - \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2\omega^2}}{\sin\theta}\xi_3\right) + \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2\omega^2}}{\cos\theta}\xi_4\right),$$

$$\psi' = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2\omega^2}}{\cos\theta}\eta_2\right), \quad (\text{mod } 2\pi),$$

また $\xi_1 < 0, \eta_3 < 0, \eta_4 < 0$ なる領域内の $P_{\mathbb{R},g}$ の点 1 に対しては

$$\psi = \pi - \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2\omega^2}}{\cos\theta}\xi_4\right), \quad \psi' = -\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2\omega^2}}{\cos\theta}\eta_2\right),$$

$$\varphi = -\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2\omega^2}}{\sin\theta}\eta_1\right) - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2\omega^2}}{\cos\theta}\eta_2\right), \quad (\text{mod } 2\pi)$$

etc. の表示が常に得られることから明らか.

(ii) $|g| = \frac{1}{2\omega}$ の場合.

(4.10) で $\theta = 0$ とおき,

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2\omega^2}} \begin{pmatrix} \cos\psi \\ 0 \\ 0 \\ \sin\psi \end{pmatrix}, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2\omega^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\psi' \\ \sin\psi' \\ 0 \end{pmatrix}.$$

この式は (4.10) と同様に diffeomorphism: $S^1 \times S^1 \rightarrow P_{\mathbb{R},g}$,

$(|g| = \frac{1}{2\omega})$ を定める. $q.e.d.$

References

1. Easton, R.; Regularization of Vector Fields by Surgery. J. Differential Equations, 10 (1971), 92-99.
2. Kaplan, W.; Topology of the Two-Body Problem. Amer. Math. Monthly, 49 (1942), 316-323.
3. Kustaanheimo, P. and Stiefel, E.; Perturbation Theory of Kepler Motion Based on Spinor Regularization. J. Reine Angew. Math. 218 (1965), 204-219.
4. Moser, J.; Regularization of Kepler's Problem and the Averaging Method on a Manifold. Comm. Pure Appl. Math. 23 (1970), 609-636.

5. Souriau, J.M.; Sur la Variété de Képler. Symposia Mathematica Vol. 14, 343-360, Academic Press, London 1974.
6. Stiefel, E.L. and Scheifele, G.; Linear and Regular Celestial Mechanics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York 1971, Chap. II, III, XI.
7. Belbruno, E.A.; Two-Body Motion under the Inverse Square Central Force and Equivalent Geodesic Flows. Celest. Mech., 15 (1977), 467-476.