

労働生産性の統計物理学

青山秀明 (京都大学 大学院理学研究科)*¹

藤原義久 (ATR/京都大学), 池田裕一 (日立製作所), 家富洋 (新潟大学)

相馬亘 (日本大学), 吉川洋 (東京大学)

1 序

経済や社会は多数の個人や企業などのエージェントが多数集まってできている。それらは互いに複雑に相互作用を行って、その全体が構成されている。このような対象が、統計物理学の対象とする多体系に類似していることは物理を多少とも知っている者にとっては明らかだろう。実際、本邦での有名な例としては、1952年に初版が出た久保亮五著「統計力学」[1]の以下のような節がある。

多数の個人の集団としての一つの社会があるとしよう。この中では経済的な活動が絶えず行われ、通貨は各個人の間に交換されている。.... (統計的整理を行った結果は) 巨視的な立場からの把握であって、... この巨視的な社会状態がどう変化するかということが、関心事なのである。これは統計力学においてわれわれの当面する問題と本質的に同じ意味を持っている。 (2.1 節「一つのたとえ話」)

また久保は、以下のようにも述べている。

気体の状態をいい表わす最も自然な方法は、たとえば、社会の状態を、農業労働者が何人、工業労働者が何人、公務員が何人、経営者が何人、という数字で表すのと同じように、一つの分子としての量子状態 (n_x, n_y, n_z) のおのおのにある分子がいくつ、という表現である。

(3.3 節「フェルミ-ディラック、およびボーズ-アインシュタインの統計」)

しかし一方で、Newton 力学に源流を持つと言われる経済学の「均衡理論」の流れは、統計的な見方を無視してきた。^{*2} 本稿では、まさに統計物理学を経済学に適用して新たな地平を開くべく、我々が行ってきた労働生産性 (以下、単に「生産性」と記す) の研究を最前線まで簡単に紹介する。

2 青木・吉川理論

生産性に統計物理学を適用する最初の試みは青木・吉川 [2, 3] によってなされた。まずこの出発点を簡単に紹介する。

ある企業を取りあげる。その (平均) 生産性 c はその企業がある年に生み出す付加価値 Y をその企業の労働者数 L で割ったものである。^{*3}

$$c := \frac{Y}{L} \quad (1)$$

いま、企業が全部で K 社あるとしよう。 k 番目の企業の実生産性を c_k 、その企業で働く労働者数

^{*1} Email: hideaki.aoyama@scphys.kyoto-u.ac.jp

^{*2} この点については、本研究会での吉川洋氏の招待講演に詳しく述べられている。

^{*3} なお、付加価値の正確な定義や計算方法はここでは省略するが、「売上高営業収益」が意味的にそれにほぼ相当すると考えてもよい。実際、最後に紹介する研究ではそれを代理変数として使っている。

を n_k とすると、それらには以下の二つの拘束条件がある：

$$(i) \text{ 全労働者数 } N : \sum_{k=1}^K n_k = N. \quad (2)$$

$$(ii) \text{ 全需要 } \tilde{D} : \sum_{k=1}^K n_k c_k = \tilde{D}. \quad (3)$$

これらの条件は、ある多体系において、 c_i が i 番目のエネルギー準位、 n_i がその準位にある粒子の数、 N が全粒子数、 $\tilde{D}$ が全エネルギーに対応することを示している。したがって、これらの条件の元で entropy を最大化をすると、Boltzmann 分布が得られる。すなわち、企業 k にいる労働者の平均数は、

$$p_k := \frac{\langle n_k \rangle}{N} = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta c_k}, \quad (4)$$

と与えられる。ここで、 $Z(\beta)$ は通常の分配関数 $Z(\beta) := \sum_{k=1}^K e^{-\beta c_k}$ であり、逆温度 β は平均需要 D の関数として、 $D := \tilde{D}/N = -d \ln Z(\beta)/d\beta$ と決定されている。

青木・吉川は c_k の分布を密で一様と仮定して、温度 $T = 1/\beta$ と需要 $\tilde{D}$ の比例関係を示した。

3 超統計理論

生産性がこのように統計物理学の枠内で扱えるとなると、実証的研究と更なる理論の発展が一段と望まれるようになった。それが実を結んだのが青山他の論文 [4, 5] である。その成果を簡潔にまとめると以下ようになる。

現象論

1. 実際の生産性を、業種単位、企業単位、労働者単位で調べた。その結果、生産性が高いところではべき分布 (Pareto 分布)、

$$p(c) \propto c^{-\mu-1} \quad (5)$$

が実現していることが分かった。

2. 労働者→企業→業種と、集約度が上がるにつれて Pareto 指数 μ が下がる。業種ではわずかに 1 より大きい値である。

超統計理論

1. 労働者のべき分布は、超統計理論 (Superstatistics) による Boltzmann 分布の重ね合わせとして理解できる。
2. これにより、需要の変動法則により、企業と労働者の Pareto 指数の関係が付き、現象論的結果が説明される。

また、経済学の均衡理論は限界生産性 (Marginal productivity), $c_m := \partial Y / \partial L$ が一定であるとする。しかし、論文 [4] では、緩い仮定のもとで、式 (1) で定義される平均生産性 c がべき分布すると、限界生産性 c_m もべき分布することを示した。したがって、平均生産性のべき分布の発見により、均衡理論が成立していないことが示されたと言ってよい。

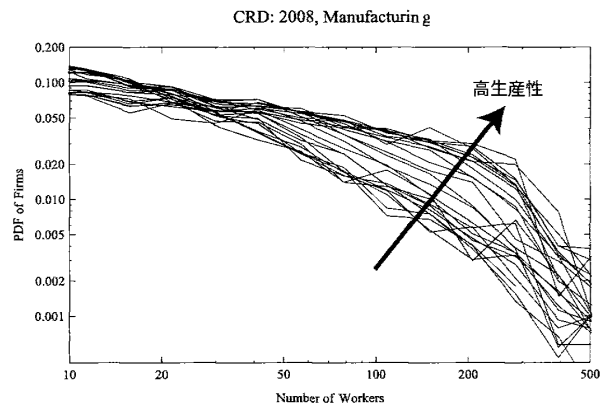


図 1: 製造業における生産性の各区分における労働者数分布 (2008 年, CRD データ).

4 Bose-Einstein 分布と負の温度

文献 [4] では上場企業のデータ (日経 NEEDS) を使ったものであり, 企業数はせいぜい 3 千社程度である. しかし中小企業信用リスクデータベース (CRD) には中小企業が 100 万社, 労働者が 1700 万人程度カバーされていて, 詳細な統計分布の解析が可能である [6].

そこで, 生産性をいくつかの区間に分けて, それぞれの区間に属する企業の労働者数の分布を見てみるとその結果は図 1 となる. (これは製造業についてであるが, 非製造業も定性的には同じ型の分布になる.) ここで, 労働者数が大きい方で増大しているのは, 生産性が**大きい**区間である. これは青木・吉川理論, および超統計生産性理論に, 一見, 反する. なぜなら, それらによれば, 労働者数の分布は Boltzmann 因子, もしくはその重ね合わせによって決まるので, 生産性が高くなると労働者数は減るはずだからだ. これは物理の言葉で, 高いエネルギー準位に存在する粒子が少ない, と言い換えると分かりやすいだろう.

しかし, こう言い換えると何が起きているかが容易に想像できる. それは負の温度が実現しているであろうということだ. つまり, 通常の Boltzmann 因子 $e^{-\beta c}$ は, 正の温度では確かに c の減少関数だが, 負の温度では増加関数に転じる.

具体的には, 次の Bose-Einstein 統計によるエネルギー E の平均粒子数を考えよう.

$$\bar{n}(E) = \frac{1}{e^{(E-\nu)/kT} - 1}. \quad (6)$$

いままで述べてきたように E は c に対応する. また化学ポテンシャル ν は全粒子数を決める. ここで温度 T が負であれば, 平均粒子数は $E < \nu$ の範囲で増加関数となる. これを実際の労働者数分布にあてはめたのが図 2 である. これを見れば分かるように, 負の温度の Bose-Einstein 統計は実際の平均労働者数を比較的良好に記述する.

5 議論

本節で述べた結果は非常に示唆的である. これからの課題を挙げると以下のようなになる.

理由 なぜ, 負の温度が実現しているのだろうか? これには総需要の大きさが関係していると考え

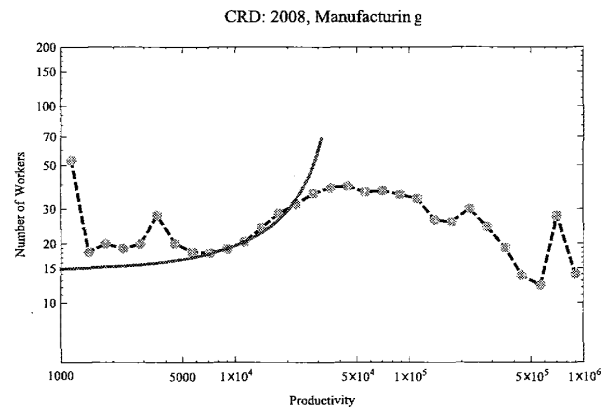


図 2: 平均労働者数の生産性依存性(破線)と, Bose-Einstein 統計(実線)との比較(2008 年, CRD データ)。

られる。温度が正であるとき, その温度が高いほど, 全エネルギー, すなわち総需要が大きい。温度が正の無限大では粒子は各エネルギー準位に同じ確率で分布して, 全エネルギーは無限大となる。しかし経済系では, 企業の生産性の分布に上限があるために, 温度が正の無限大になっても総需要は無限大とはならない。もし現実の総需要がその上限値を上回れば, 温度は負の値にならざるを得ない。

整合性 生産性が非常に大きいところでは, 正の温度の重ね合わせの超統計が見事に現象を記述した。一方, 負の温度分布は中程度の生産性領域で実現している。これらを共に統一的に説明する理論はどのようなものだろうか。

失業者問題 化学ポテンシャルは実際に企業で働いている労働者, つまり就業者の数を決める。したがって, 相平衡の議論を適用して, 就業相と失業相の化学ポテンシャルを定義して, それらの増減によって失業率などを議論する道が開ける。この理論の発展もこれからの課題である。

参考文献

- [1] 久保亮五, 統計力学 (共立出版株式会社, 東京, 2006 年 9 月 新装版第 4 刷発行)。
- [2] H. Yoshikawa, *The Japanese Economic Review* **54**, 1 (2003)。
- [3] M. Aoki and H. Yoshikawa, *Reconstructing Macroeconomics – A Perspective from Statistical Physics and Combinatorial Stochastic Processes* (Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2007)。
- [4] H. Aoyama, H. Yoshikawa, H. Iyetomi, and Y. Fujiwara, (2008), RIETI Discussion Paper Series 08-E-035。
- [5] H. Aoyama, H. Yoshikawa, H. Iyetomi, and Y. Fujiwara, *Progress of Theoretical Physics Supplement* **179**, 80 (2008)。
- [6] H. Aoyama *et al.*, *Economics: The Open-Access, Open-Assessment E-Journal* **3**, (2009)。