

Non-trivial Surjective Endomorphism を 持つ 3次元代数多様体の構造

藤本圭男 (岐阜大) (with. 佐藤栄一)

§0. 非特異射影代数多様体 X から自分自身への morphism $f: X \rightarrow X$ を endomorphism (以下 end と略記), 更に f が非定値写像かつ同型写像でない時, f は non-trivial (非自明) な end と呼ぶ。全射な end $f: X \rightarrow X$ は, 有限射となり, かつ $K(X) \geq 0$ ならば有限エタール射, 更に X が一般型ならば, f は同型写像となる。3次元非特異射影代数多様体 X で $K(X) \geq 0$ かつ non-trivial surjective end を許すものの構造を調べる事が目的である。動機の一つとして, 次の Van de Ven, Lazarsfeld の問題がある。

問題 G を半単純代数群 ($/\mathbb{C}$), $P \subset G$ を maximal parabolic subgroup として, $X := G/P$ とおく。(この時, X は Fano 多様体で $\text{Pic } X \cong \mathbb{Z}$) $f: X \rightarrow Y$ を smooth variety Y の上への, 同型でない有限射とすると, $Y \simeq \mathbb{P}^n$ か? ($n = \dim X$)

この問題は今だ open であり, いくつかの特別の場合に肯定的に解かれている。($X \simeq \mathbb{P}^n$ の場合は, Lazarsfeld, $X \simeq$ 非特異 2 次超曲面 ($n \geq 3$) の場合は, Cho & Sato,

Paranjape, X が既約なコンパクト Hermite 対称空間の場合は Tsai, X が simple なアーベル多様体で f が分岐する場合は Debarre に依る。) 又, $X := G/p$ が $\mathbb{P}^m$ と同型でない限り, 非自明な surjective end を持たない事も Paranjape により示されている。上のいずれの定理の証明も extremal rational curve の挙動の精密な解析を要する。同じ end に関する問題とはいえ, 考えている多様体の小平次元が $-\infty$ と非負の場合とでは, 様相は大いに異なる。以下, 小平次元が非負の場合を主に扱う。

Question X は n 次元非特異射影代数多様体で, $0 \leq K(X) < \dim X$ かつ, 非自明な surjective end $f: X \rightarrow X$ を持つと仮定する。この時, X の適当な finite étale covering $\widehat{X} \rightarrow X$ がとれて, $\widehat{X}$ は非特異射影代数多様体 W ($0 \leq \dim W < \dim X$) の上の smooth な Abelian scheme の構造を持つか?

次の結果を得た。

結果 $\dim X = 1$ の場合, 自明

$\dim X = 2$ " Yes

$\dim X = 3$, $K(X) = 0, 2$ の場合, Yes

更に n 時, $\widehat{X} \simeq W \times A$ ($0 \leq \dim W < \dim X$

A は正次元の Abelian Variety), $K(W) = K(X)$

と直積に分解する。

注意 上で surjective endomorphism $f: X \rightarrow X$ を, generically finite な rational map $f: X \dashrightarrow X$ の条件を弱める事はできない。実際, 二の様な例は, Kummer 曲面, global section を持つ勝手な楕円曲面など, いくつでも構成できるからである。

主定理 X を, $K(X) \geq 0$ なる 3 次元非特異射影代数多様体で, 非自明な surjective endomorphism $f: X \rightarrow X$ を持つと仮定する。すると, X の極小モデルは非特異で, X の構造は次のいずれか。

Case 1) $K(X) = 2$ の時, X は高々, 商特異点のみを許す正規曲面 T 上の楕円ファイバー空間 $\varphi: X \rightarrow T$ となり, f は底空間 T の自己同型を引きおこし, $\varphi: X \rightarrow T$ を保つ。更に ① X は T 上の Seifert ファイバー空間 i.e. φ は equi-dimensional で, 特異ファイバーは高々, mI_0 -型重複ファイバーだけ, 二の外側で主ファイバー束。 K_X は numerically φ -trivial。

② X の適当な有限 étale covering $\tilde{X}$ は非特異一般型曲面 $\tilde{T}$ と非特異楕円曲線 E との直積に同型。

Case 2) $K(X)=1$ の時, X の極小モデル X' は非特異で、

Iitaka fibration $\pi := \pi_{|mK_{X'}|} : X' \longrightarrow C$ の一般ファイバーは Abel 曲面又は超楕円曲面のいずれか。後者の場合、次の可換図式が成り立つ。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & C \\ & \searrow g & \nearrow h \\ & T & \end{array}$$

ここで、 $g: X \rightarrow T$ は高々、商特異点のみを持つ正規曲面 T 上の Seifert 楕円ファイバー空間、 $h: T \rightarrow C$ は $\mathbb{P}^1$ or elliptic fiber 空間かつ $\varphi := h \circ g$ の一般ファイバーは超楕円曲面。

f は上の図式を保ち、 T (resp. C) の end (resp. 自己同型) を引き起こす。更に X の適当な有限 étale covering $\hat{X}$ は、

$K(\hat{\pi})=1$ なる非特異代数曲面 $\hat{\pi}$ と楕円曲線 E との直積に同型。

Case 3) $K(X)=0$ の場合 X の適当な有限 étale covering $\hat{X}$ は Abelian 3-fold 又は非特異曲面 $\hat{\pi}$ (Abel 曲面 or K3 曲面と birational) と楕円曲線 E との直積に同型。

更に後者の場合、 X は $\hat{\pi}$ の有限群 G による商空間 $\hat{\pi}/G$ の上の Seifert 楕円ファイバー空間になり、 f はそれと両立して、底空間 $\hat{\pi}/G$ の同型を引き起こす、

注 Case 1) と 3) において、end $f: X \rightarrow X$ は $\hat{X}$ 上の end $\hat{f}: \hat{X} \rightarrow \hat{X}$ に持ち上がり、 $\hat{X} \simeq \hat{\pi} \times E$ の時には、

$\hat{f}$ は第1成分への射影 $\hat{X} = \hat{T} \times E \rightarrow \hat{T}$ と可換であり、 $\hat{T}$ の同型を引きおこす。

§1 次に証明のアイデアの outline を述べる。

S が $K(S) \geq 0$ なる非特異代数曲面で、non-trivial surjective end $f: S \rightarrow S$ を持つならば、 S は自動的に極小となる。実際、 S 上に (-1) -曲線 e が存在し、

S 上の有限エーデル covering の ∞ 上昇列 $S \xleftarrow{+} S \xleftarrow{+} S \xleftarrow{+} \dots$

により e の逆像を逐次、取る事で、 S 上に disjoint な ∞ 個の (-1) -曲線が存在し、 $\rho(S) = \infty$ となって矛盾する。

しかし、非自明な surjective end $f: X \rightarrow X$ を持つ $K(X) \geq 0$ なる非特異3次元代数多様体 X は必ずしも極小でない。自明な例として、 $X = \hat{S} \times E$ (但し $\hat{S}$ は $K \geq 0$ なる non-minimal な曲面、 E は elliptic curve) の時、 X は非自明な end $\varphi: X := \bigcup_{m \geq 2} \hat{S} \times E \longrightarrow \bigcup_{m \geq 2} X$
 $(\alpha, [3]) \longrightarrow (\alpha, [m3])$

を持つ。では、 K_X が not nef の時、森理論 [M] における5通りの extremal divisorial contraction で起こり得る可能性を調べ上げる事が問題となる。結論として、 $\overline{NE}(X)$ の任意の extremal ray R は type (E1) かつ、 R に associate した収縮写像 $\text{Contr}: X \rightarrow X'$ は、

non-singular projective 3-fold X' の上の 非特異楕円曲線 を中心とする blowing-up (の逆) となる。

これは以下の事実より従う。

命題 1 $f: Y \rightarrow X$ を smooth projective n -fold の間の finite, étale covering で、 $\rho(X) = \rho(Y)$ (Picard 数は等しい) と仮定する。すると、 $f^*: N_1(X) \xrightarrow{\sim} N_1(Y)$

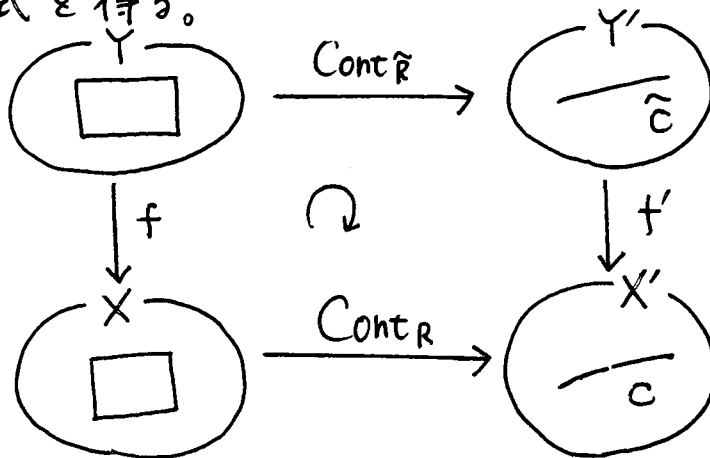
$$\begin{array}{ccc} f_*: N_1(Y) & \xrightarrow{\sim} & N_1(X) \\ \cup & & \cup \\ \overline{NE}(Y) & \xrightarrow{\sim} & \overline{NE}(X) \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \cup & & \cup \\ \overline{NE}(X) & \xrightarrow{\sim} & \overline{NE}(Y) \end{array}$$

つまり、 f^* と f_* により、 X と Y の Kleiman-Mori Cone は 1 対 1 に対応する。更に、 K_X が not nef ($\Leftrightarrow K_Y \sim f^*K_X$ が not nef) と仮定すると、同型 f^* と f_* により、

$\{\overline{NE}(X) \text{ の extremal rays}\}$ と $\{\overline{NE}(Y) \text{ の extremal rays}\}$ とは 1 対 1 に対応する。

命題 2 X, Y を $K(X) = K(Y) \geq 0$, $\rho(X) = \rho(Y)$ なる smooth projective 3-fold, $f: Y \rightarrow X$ を同型でない finite étale covering とする。もし、 K_X が not nef ($\Leftrightarrow K_Y \sim f^*K_X$ が not nef) ならば、 $\overline{NE}(X)$ (resp. $\overline{NE}(Y)$) の任意の extremal ray R (resp. $\hat{R}$) は type (E_1) i.e. 収縮写像 $\text{Cont } R: X \rightarrow X'$ (resp. $\text{Cont } \hat{R}: Y \rightarrow Y'$) は、

non-singular projective 3-fold X' (resp. Y') 上の smooth curve C (resp. $\widehat{C}$) を中心とする blowing-up の逆。
 $C \not\subset \mathbb{P}^1$, $\widehat{C} \not\subset \mathbb{P}^1$ であり、もし $f^*R = \widehat{R}$ ならば、下の可換図式を得る。



但し、 $f': Y' \rightarrow X'$ も同型でない finite étale covering で、

★ $f'^{-1}(C) = \widehat{C}$ (既約!) を満たす。

注 これは、錐定理 (Cone Theorem) と Mori [M] による extremal ray の分類結果からの直接の帰結である。

命題 1 には他にも応用がある。一例として、

命題 3 有理楕円曲面 ($\mathbb{P}^2$ の 9 点 blowing-up) S, T の間に surjective morphism $f: S \rightarrow T$ が在れば、 f は同型写像となる。特に、有理楕円曲面は非自明な surjective end を持ち得ない。

さて、元の設定に戻る。non-trivial surjective end
 $f: X \rightarrow X$ を持つ。 $K(X) \geq 0$ なる non-sing projective 3-fold
 X に対して、もし K_X が not nef であれば、endomorphism を
 込みにした MMP を適用する。 $\overline{NE}(X)$ の extremal rays
 は全て $\text{type}(E_i)$ 故、有限個しか存在しない。又、命題 1 より
 f_* は、これらの間の置換を引きおこすので、必要があれば、
 f を f の適当な iteration map $f^{(n)} := f \circ \dots \circ f$ (n 回合成)
 で置き換える事により、 f_* は $\{\text{extremal rays on } \overline{NE}(X)\}$ に
 恒等的に作用するとしてよい。命題 2 より、任意の extremal
 ray R に対して、次を得る。

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\text{Contr}} & X_1 \\
 \downarrow f & \searrow \text{Contr} & \downarrow f_1 \\
 X & \xrightarrow{\text{Contr}} & X_1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 f_1: X_1 \rightarrow X_1 \text{ は再び} \\
 \text{非自明な surjective end.} \\
 \rho(X_1) = \rho(X) - 1
 \end{array}$$

K_{X_1} が not nef であれば、 f_1 (及び f) を適当な iteration map
 で置きかえて、再び同様の作業をくり返す。すると、
 $\rho(X) > \rho(X_1) > \dots$ より、この作業は有限 m 回で Stop し、
 X の極小モデル X_m を得る。 extremal ray が全て
 $\text{type}(E_i)$ という特殊条件のお蔭で、MMP が smooth 3-fold
 のカテゴリ内では機能し、flip 等の困難も起こらず、話が
 簡単になる。結局、次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_m \\
 \downarrow f & & \downarrow f_1 & & & & \downarrow f_m \\
 X & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_m
 \end{array}$$

但し、縦の太線 $\downarrow$ は smooth projective 3-fold の上の non-trivial surjective end, 横線 $X_{i-1} \rightarrow X_i$ は X_i 上の楕円曲線 E_i を中心とする blowing-up (の逆)。
 X の極小モデル X_m 上の非自明な end $f_m: X_m \rightarrow X_m$ と $f: X \rightarrow X$ の minimal reduction と呼ぶ。

これより先は 2 段階に別れる。

Step 1 (minimal reduction $f_m: X_m \rightarrow X_m$ の分類)

宮岡・川又による 3 次元 Abundance 定理より、 K_{X_m} は semi-ample。おいて X_m の Iitaka fibration

$\Phi := \Phi_{|mK_{X_m}|}: X_m \rightarrow \Phi(X_m) \subset \mathbb{P}^{\dim |mK_{X_m}|}$ の構造を

$K(X_m)$ に応じて個別に解析する。

$K(X_m) = 2$ では 中山による standard fibration theorem [N1, 2], $K(X_m) = 1$ では 藤木 [F] の relative generic quotient theorem, $K(X_m) = 0$ では Bogomolov 分解定理を用いる。すると、主定理と同様の結果を得る。

Step2 (elliptic curve を中心とする blowing-up process)

Step1 で得た minimal reduction X_m を elliptic curve に沿って blow-up していく。この際、blowing-up の中心となるべき各 X_i 上の elliptic curve E_i には 命題 2 の $\star$ より、 $f_i^{-1}(E_i) = E_i$ (既約!) という非常に強い制限条件がつく。

注 ① Step1 の証明で、 X_m に flop を施して、双有理同値類の中でモデルを取りかえる為、endomorphism に、こだわるのは得策でナイ。むしろ、同型でない有限エーデル covering $f: Y \rightarrow X$ において、Source Y と target X とが flop で結ばれている様な状況にまでカテゴリーを広げておく方が有効である。実際、この弱い仮定の下でも同様の結果を得る。

② Question は、 $m=3$, $K(X)=1$, X は minimal で、Iitaka fibration の一般ファイバーが simple な Abel 曲面の場合には背定的である。(Kollar の Shafarevich Maps の論法より従かう。)

文献

- [M] S. Mori. Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective. *Annals of Math.* 116 (1982), 133-176.
- [N 1] N. Nakayama. Local structure of an elliptic fibration. preprint (1991)
- [N 2] N. Nakayama. Projective threefolds whose universal coverings are $\mathbb{C}^3$. (to appear)
- [F] A. Fujiki. On the structure of Compact Complex Manifolds in $\mathcal{C}$. *Advanced Studies in Pure Math.* 1, (1983), 231-302
- [S-F] E. Sato & Y. Fujimoto. On smooth Projective Threefolds with non-trivial surjective Endomorphisms. *Proc. Japan Acad.*, 74, SerA (1998), 143-145

謝辞

最初は Minimal reduction の構成で、有限 $\mathbb{A}^1$ -covering の tower を用いた方法を採用していましたが、end の iteration をとる事で tower が不用となり、議論が簡略化できる事を、森先生が指摘されました。又、中山さんには、最後の注②で Kollar の Shafarevich map の論法を教えて頂きました。この場をお借りして、お二人に感謝致します。