数理解析研究所講究録
522巻 1984年 146-154

Identities for the divisor generating functions and insertion into a heap

山梨大 工学部 内村桂輔 (Keisuke Uchimura)

1. ヒープの解析から生じた、Combinatorial identity と、その公式のその後の発展について報告する。

2. 約数母関数とヒープ

ヒープにおいて、ヒープと入力の組の生起確率を等確率とした場合の平均の交換回数を考える。ヒープの要素の数が、2^m-1 の時の平均の交換回数を $U_m(1/2)$ とおくと、それは次の Recurrence をみたすことが知られている(内村[6])。

$$U_1(1/2) = 1/2,$$
$$U_m(1/2) = m(1/2)^m + (1-(1/2)^m)U_{m-1}(1/2). \quad (2.1)$$

ここで $1/2$ を不定元 q におきかえて次の Recurrence を得る。

$$U_1(q) = q,$$
$$U_m(q) = mq^m + (1-q^m)U_{m-1}(q). \quad (2.2)$$

$U_m(q)$ は次数 $m(m+1)/2$ の多項式である。この時次の結果が知られている。

定理2.1.（内村[7]）

$U_m(q)=\sum_{n=1}^{m(m+1)/2} a_n^{(m)} q^n$ とおく。この時、

$n \leq m$ ならば、 $a_n^{(m)} = \sigma_0(n)$

が成り立つ。ここで $\sigma_0(n)$ は n の約数の数をあらわす。

この結果は次の定理から導かれる。

定理2.2.（内村[7]）

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} n q^n \prod_{j=n+1}^{\infty}(1-q^j) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_0(n) q^n. \qquad (2.3)$$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} q^{n(n+1)/2}}{(1-q)\cdots(1-q)^{n-1}(1-q^n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_0(n) q^n. \qquad (2.4)$$

また 次の式も得られる。

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \prod_{j=n+1}^{\infty}(1-q^j) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} q^{n(n+1)/2}}{(1-q)\cdots(1-q^n)}$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) \qquad (2.5)$$

(2.5)に関しては、次のEulerの公式が良く知られている。

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n(3n+1)/2} \qquad (2.6)$$

3. 約数関数と確率分布

約数関数 $\sigma_m(n)$ を次のように定義する。

$$\sigma_m(n) = \sum_{d|n} d^m.$$

定理2.2を拡張して、次の定理が得られる。

定理 3.1. (内村[8])

$$M_m = \sum_{n=1}^{\infty} n^m q^n \prod_{j=n+1}^{\infty} (1-q^j), \quad k_{m+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_m(n) q^n$$

とおく。このとき次式が成り立つ。

$$M_m = Y_m(k_1, \cdots, k_m),$$

ここで Y_m は m 次の Bell 多項式である。

$m=1$ の時が定理2.2の(2.3)である。(2.4)も拡張される。

この定理と、確率分布との関係を考えよう。$0<q<1$, とする。確率変数 X が m になる時の確率を次のように定義する。

$$Pr(X=m) = q^m \prod_{j=m+1}^{\infty} (1-q^j) \qquad (3.1)$$

するとこれは確率分布になる。

ヒープの要素数 $\longrightarrow \infty$ の時、新たにそう入された要素が m 回交換される確率の漸近値が(3.1)のようにあらわされる。

(3.1)の確率母関数 $G(x,q)$ を考える。

$$G(x,q) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(q^n \prod_{j=n+1}^{\infty} (1-q^j) \right) x^n \qquad (3.2)$$

ここで、$x=e^t$ とおいて、(3.2) を t について展開して、exponential moment generating function を求める。

$$G(e^t, q) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n t^n / n! \qquad (3.3)$$

故に、M_n は確率分布(3.1)に対する、n次の moment になる。

一方、確率分布(3.1)に対する、n次の cumulant は、K_n になることがわかる。

これが定理3.1の確率論的な解釈である。

n次の moment M_n を求めるには、定理3.1より、$K_1, \cdots, K_n$ を求めれば良いことがわかる。K_{i+1} を求めるために、次の収束をはやくする式を使う。

$$K_{i+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_i(n) q^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^i q^n/(1-q^n)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \left(n^i + \sum_{k=1}^{\infty} \left(n^i + (n+k)^i \right) q^{kn} \right).$$

これを Doberkat 氏の結果と比較してみよう。Doberkat [4] は n が十分に大きい時、M_n を漸近的に、次のように評価している。

$$M_n \sim 2n! \left[(\log 2)^{-n-1} + 2\mathrm{Re}(2\pi i)^{-n-1} \zeta(n+1, 1 - i\log 2/(2\pi)) \right],$$

ここで、$\zeta(r, a) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+a)^{-r}$.

我々の方法をつかえば、任意の n について、M_n を速く、正確に求めることが出来る。

4. 定理2.2と分割数との関係

定理2.2と分割数の関係を考えよう。自然数nの分割数$p(n)$とは、nをいくつかの部分に分ける分け方が何とうりあるかを示す。例えば、$p(5)=7$ である。

$$5=4+1=3+2=3+1+1=2+2+1$$
$$=2+1+1+1=1+1+1+1+1 \quad 。$$

分割数については、Rogers-Ramanujanの公式が、有名である(Bressoud [3])。また、次の式が知られている。

$$1/\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)=1+\sum_{n=1}^{\infty}p(n)q^n.$$

さて、定理2.2の(1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}nq^n\prod_{j=n+1}^{\infty}(1-q^j)=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_0(n)q^n$$

のq^nの係数を比較すると、次の式が得られる。

$$\sigma_0(n)=-\sum_{\pi\vdash n}(-1)^{\#(\pi)}\lambda(\pi), \qquad (4.1)$$

ここで、πはnを異なった部分に分ける分割、$\#(\pi)$はπの部分の数、$\lambda(\pi)$はπの最小の部分、をあらわす。

Bressoud [2]は、(4.1)を拡張して次の式を示した。

$$\sigma_m(n)=-\sum_{\pi\vdash n}(-1)^{\#(\pi)}\sum_{j=1}^{\lambda(\pi}\left(L(\pi)-\lambda(\pi)+j\right)^m, \quad (4.2)$$

ここで、$L(\pi)$は分割πの最大の部分をあらわす。

5. 定理2.2の finite analogue

L. Van Hamme [5]は、次の問題を提出した。

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(1-q^k)} q^{k(k+1)/2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \frac{q^k}{1-q^k}, \qquad (5.1)$$

ここで、$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$はガウス多項式で次のように定義される。

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(1-q)\cdots(1-q^n)}{(1-q)\cdots(1-q^k)(1-q)\cdots(1-q^{n-k})}.$$

(ガウス多項式$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$は$q \longrightarrow 1$の時、2項係数$\binom{n}{k}$になる。)

Andrews [1]は(5.1)を超幾何級数の公式を使い証明し、その中で(5.1)は定理2.2.の(2)の finite analogueであることを示している。

これに関連して、内村[10]は(5.1)を拡張して次の式を示した。

定理 5.1. (内村[10]) 任意の自然数mに対して、次式が成り立つ。

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} q^{k(k+1)/2}}{1-q^{k+m-1}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \frac{q^k}{1-q^k} \Big/ \begin{bmatrix} k+m-1 \\ k \end{bmatrix}$$

$m=1$の時が、(5.1)である。

6. $\sigma_0(n)$ を求める、recurrent algorithm

$\sigma_0(n)$ は n の約数の数である。$\sigma_0(n)$ を求めるには、n を素因数分解するアルゴリズム、特にエラトステネスのふるい法 (Mairson [6]) 等で求めることが出来る。

ここでは、定理2.1の応用として、$\sigma_0(n)$ を求める recurrent algorithm を示す。

(2.2)より

$$U_m(q) = U_{m-1}(q) + mq^m - q^m U_{m-1}(q).$$

故に、$U_m(q)$ の q_i の係数 $a_i^{(m)}$ $(1 \le i \le m(m+1)/2)$ は次のように求められる。

$$\begin{array}{lccccccc}
 & \underbrace{}_{1} & & \underbrace{}_{m} & \underbrace{}_{m+1} & & & \\
 & a_1^{(m-1)}, & \cdots, & a_m^{(m-1)}, & \cdots, & a_{m-1\cdot m/2}^{(m-1)} & & \\
 & & & m, & & & & \\
\pm & & & -a_1^{(m-1)}, & \cdots, & -a_{m-1\cdot m/2}^{(m-1)} & & \\
\hline
 & a_1^{(m)}, & \cdots, & a_m^{(m)}, & a_{m+1}^{(m)}, & \cdots, & a_{m\cdot m+1/2}^{(m)} &
\end{array}$$

定理2.1より、$n \le m$ ならば、

$$a_n^{(m)} = \sigma_0(n) \quad \text{なので、}$$

この方法で、$\sigma_0(n)$ を再帰的に求めることが出来る。

References

[1] G. E. Andrews, Solutions to Advanced Problem 6407, preprint.

[2] D. M. Bressoud, On Uchimura's connection between partitions and number of divisors, Canadian Mathematical Bulletin, to appear.

[3] D. M. Bressoud, Generalization of the Rogers-Ramanujan identities (American Mathematical Society, 1980).

[4] E. E. Doberkat, Inserting a new element into a heap, BIT 21 (1981) 255-269.

[5] L. Van Hamme, Advanced Problem 6407, American Mathematical Monthly 9 (1982) 703-704.

[6] H. G. Mairson, Some new upper bounds on the generation of prime numbers, CACM 20, 9 (1977) 664-669.

[7] 内村桂輔, 整列木に新たに1つの要素をそう入するときの交換回数の平均, 電子通信学会論文誌 60-D, 9 (1977) 759-761.

[8] K. Uchimura, An identity for the divisor generating function arising from sorting theory, Journal of Combinatorial Theory (A) 31 (1981) 131-135.

[9] K. Uchimura, Identities for divisor generating functions and insertion into a heap, Discrete Mathematics, to appear.

[10] K. Uchimura, A generalization of identities for the divisor generating function, Utilitas Mathematica, to appear.