

リンク機構のカオスの統計力学的解析

明石 望洋[†] 宮崎 修次[†]

[†] 京都大学大学院 情報学研究科 〒606-8501 京都府京都市左京区吉田本町

E-mail: [†]takashi@acs.i.kyoto-u.ac.jp, ^{††}syuji@acs.i.kyoto-u.ac.jp

あらまし アノソフ系の物理モデルとしてのトリプルリンケージの運動は、理想的には、シュヴァルツのP曲面上の不規則な軌道で表される。トリプルリンケージの相空間は位置座標3成分とそれと共役な運動量3成分で張られる6次元空間である。配位空間は運動量成分をすべて位置座標上に射影した3次元空間である。この3次元の配位空間を単位立方格子に分ける。シュヴァルツのP曲面は各立方体の6面と円の交線を持ち、種数3のいたるところ負曲率の曲面となっている。これが配位空間の3方向に周期的に並んでいる。軌道は、一つの立方体の中のシュヴァルツのP曲面上の不規則運動の後、6個の交円のいずれかを通して、隣接する立方体の中のシュヴァルツのP曲面上の不規則運動に移る。この過程が配位空間の3軸の正負の方向に不規則に繰り返す拡散過程を呈する。一つの立方体内の滞在時間の平均や分布、拡散係数の制御変数依存性を数値解析により求める。

キーワード アノソフ系、トリプルリンケージ、シュヴァルツのP曲面、拡散過程、拡散係数

Derivation of equations of motion and numerical analysis of spider linkages

Nozomi AKASHI[†] and Syuji MIYAZAKI^{††}

[†] Graduate school of Informatics, Kyoto university Yoshida-Honmachi, sakyo-ku, Kyoto, 606-8501 Japan

E-mail: [†]takashi@acs.i.kyoto-u.ac.jp, ^{††}syuji@acs.i.kyoto-u.ac.jp

Abstract Motion of a triple linkage as a physical realistic model of the Anosov system is given by a chaotic trajectory on a Schwarz P surface. Phase space of the triple linkage is spanned by three position coordinates and three conjugate momentum coordinates. Configuration space is three dimensional, in which the momentum space is projected out onto the position space. When this configuration space is divided into unit cubic lattices, Schwarz P surface of genus 3 has six common circles on the six surface of the unit cube, and its curvature is always negative, which is periodically arranged in the three-dimensional configuration space. A trajectory is irregularly covered on a single Schwarz P surface, and goes to one of the six neighboring surfaces across the common circle with the unit cube. This diffusion process is repeated in an irregular manner along three directions. Averages and distributions of dwell times in a unit cube as well as parameter dependences of diffusion coefficients are numerically obtained.

Key words Anosov system, triple linkage, Schwarz P surface, diffusion process, diffusion coefficient

1. 序 論

ハントとマッカイは図1に示すようなサーストンのトリプルリンケージ[5]の自由運動がある極限的なパラメータにおいてアノソフ系になることを示した[6]。トリプルリンケージの運動は、この極限において、図2のようなシュヴァルツのP曲面上の不規則な軌道で表される。トリプルリンケージの相空間は位置座標3成分とそれと共役な運動量3成分で張られる6次元空間である。配位空間は運動量成分をすべて位置座標上に射影した3次元空間である。この3次元の配位空間を単位立方格子に分ける。シュヴァルツのP曲面は各立方体の6面と円の交線を持ち、種数3のいたるところ負曲率の曲面となっている。この

曲面は図3に表される8つの可動領域の貼り合わせと考えることもできる。これが配位空間の3方向に周期的に並んでいる。軌道は、一つの立方体の中のシュヴァルツのP曲面上の不規則運動の後、6個の交円のいずれかを通して、隣接する立方体の中のシュヴァルツのP曲面上の不規則運動に移る。

ある単位立方体内のシュヴァルツのP曲面上の初期点集合を、6個の交円のいずれを通して隣接する立方体に遷移するまで6色に色分けすることができる。制御変数の値によってはこの色分けされた初期点集合の図形がきわめて入り組んだ自己相似構造を持つ部分があることを第2章で示す。このような遷移が配位空間の3軸の正負の方向に不規則に繰り返す拡散過程を呈するが、第3章では、一つの単位立方体内の滞在時間の平均や分

布，拡散係数の制御変数依存性を数値解析により求める．最終章は本報告のまとめにあてる．

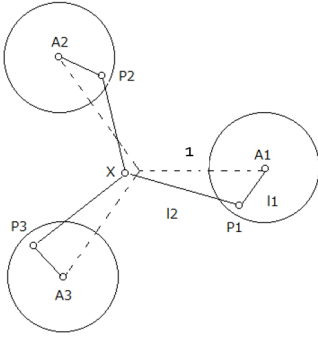


図 1 トリプルリンクージ ($n=3$ のスパイダリンクージ). A_i は固定された頂点. X, P_i は拘束のもとで平面を自由に動ける頂点.

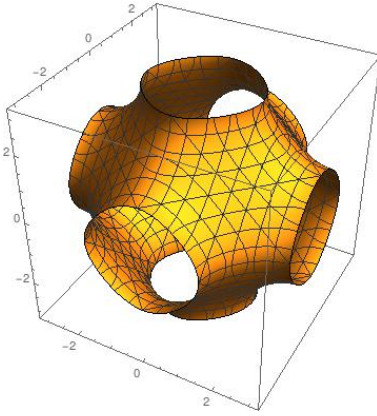


図 2 図 3 の X 可動領域 8 枚を貼り合わせて得られるトリプルリンクージの配位空間と同相な多様体. 周期境界条件を持つ. ハントらの極限的なパラメータにおいては, シュワルツの P 曲面になる.

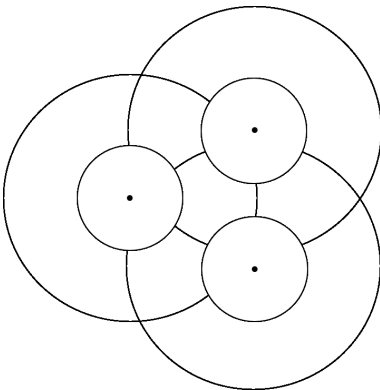


図 3 3 つの円環領域に含まれる中央の領域がトリプルリンクージの連結点 X の可動領域. P_i の選び方が $2^3 = 8$ 通り考えられるので, 配位空間は可動領域の曲面 8 枚の貼り合わせになる.

2. 測地流の方程式

本研究ではトリプルリンクージの自由運動について漸近的に

配位空間の測地流と見なせるパラメータにおいて解析を行う. 3 変数 $\theta_i = \angle OP_i A_i$ を用いて系の配位を記述する. 1 のように $l_1 = |A_i P_i|, l_2 = |P_i X|$ とする. $l_2 = R + b l_1$ と表す. ここで $0 < b < 1$ である. ここで l_1 が十分小さいとして, l_1 の 2 次以上の項を無視すると, 配位空間 $F(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = 0$ は次のように表せる.

$$F(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3 - b$$

$b = 0$ のときはシュワルツ P 曲面となる [5]. さらに質量パラメータについて, 剛体棒 $P_i X$ の質量が円板 $A_i P_i$ に対して十分に小さければ, 配位空間の計量は $\theta_1 - \theta_2 - \theta_3$ 空間のユークリッド距離の計量になる. この計量のもとでは $b=0$ において, 8 点を除きガウス曲率が負となり測地流はアノソフ系となる. この計量のもとでの測地流の方程式は $F(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ を用いて次のように表せる.

$$\ddot{\theta}_i = \Gamma \frac{\partial F}{\partial \theta_i} =$$

3. 初期点集合

測地流の方程式を単位シュワルツ曲面から隣接する単位曲面への拡散過程と捉える. 単位曲面上の初期点に対して, 隣接するどの曲面に移移するのかを色分けを行った.

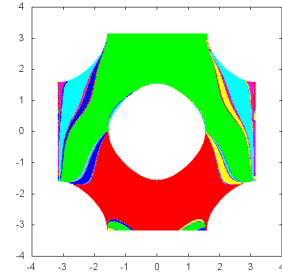


図 4 $b=0$. 初速度 $(\dot{\theta}_1(0), \dot{\theta}_2(0)) = (0, 1, 0)$

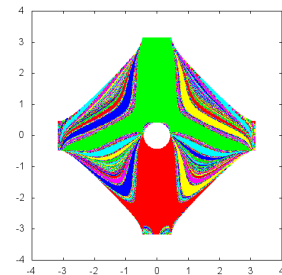


図 5 $b=0.9$. 初速度 $(\dot{\theta}_1(0), \dot{\theta}_2(0), \dot{\theta}_3(0)) = (0, 1, 0)$ でどの単位曲面に移るかで色分けを行った

図中の 6 色はそれぞれ, 青が $\theta_1 = \pi$, 黄色が $\theta_1 = -\pi$, 黄緑が $\theta_2 = \pi$, 紫が $\theta_2 = -\pi$, 赤が $\theta_3 = \pi$, 水色が $\theta_3 = -\pi$ の境界を通過する軌道の θ_1, θ_2 の初期位置の集合を表している. 初速度については 2 通り確かめ, 7, 8 が $(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = (0, 1)$ 方向, 9, ?? が $(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = (1, 1)$ 方向でエネルギーが 1 になるように正

規化している。

各色の集合の境界に他色が稠密に入り組む自己相似的な構造が現れる。このことは軌道の混合性を表している。自己相似領域はパラメータ b を大きくしていくにつれて拡大していく。これは隣接曲面への境界が小さくなることにより、単位曲面の滞在時間が長くなり、初期値に対する指数的な鋭敏性の影響を受ける領域が拡大することを表している。

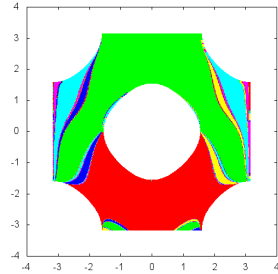


図 7 $b=0$. 初速度 $(\theta_1(0), \theta_2(0)) = (0, 1, 0)$

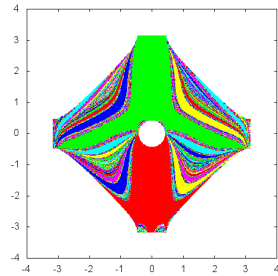


図 8 $b=0.9$. 初速度 $(\theta_1(0), \theta_2(0), \theta_3(0)) = (0, 1, 0)$ でどの単位曲面に移るかで色分けを行った

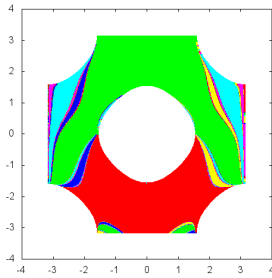


図 6 $b=0$. 初速度 $(\theta_1(0), \theta_2(0)) = (1, 1)$

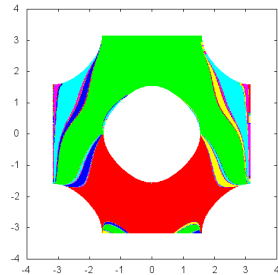


図 9 $b=0$. 初速度 $(\theta_1(0), \theta_2(0)) = (1, 1)$

9.9 は 7.77 に対応する単位セルへの滞在時間を濃淡で表した図である。自己相似領域において滞在時間が長くなっている。このことから、アノソフ系における測度 0 の稠密な周期軌道は各色の境界部分存在すると考えられる。パラメータ $b = 0.9$ のときに現れる黄色の集合は、十分長い時間経ても単位曲面から拡散しない、単位曲面上の準周期軌道の初期点の集合である。つまり $b = 0.9$ においては、相空間上に正の測度を持つ準周期軌道の領域と複雑軌道の領域が混在しており、アノソフ系の性質であるエルゴード性は失われているため、すでに非アノソフのパラメータであることがわかる。

このように、単位セルの滞在時間から、準周期軌道の領域の存在を確かめることで、理論的には与えることができなかった、アノソフパラメータ領域の外側からの評価を与えることができる。9 はパラメータ b に対する、十分長い時間単位曲面から拡散しなかった初期点の個数をプロットしている。

4. 拡散係数と初通過時間分布

この拡散過程を拡散係数や初通過時間分布を数値的に調べることで特徴付ける。拡散係数とは次の数式で表される、拡散の程度を表す、系固有の定数である。

$$D = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma_t^2}{2t}$$

ここで σ_t^2 は拡散過程の位置変数の時間 0 から t までの分散である。10 は $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ についてパラメータ b に対する拡散係数

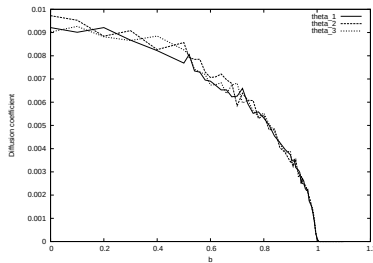


図 10 パラメータ b に対する $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ の拡散係数

をプロットした。 $b = 1$ では隣接曲面と分離されるため、拡散は起こらなくなり拡散係数は 0 に落ちる。 $b < 1$ の領域では準周期軌道とカオスが混在し、その割合が b に依存して変化するため、拡散係数の b 依存性について自己相似的構造の現れるフラクタル拡散係数が得られることが期待される。ただし 10 に見られる曲線の粗さはフラクタル構造によるものか、有限時間で数値計算を打ち切ったことによる誤差かは判定できないため、このことを確かめるためには十分長い時間計算を行い、 $0 < b < 1$ の領域と $b < 1$ で曲線のなめらかさについて有意な差を得る必要がある。

拡散係数だけでは記述することのできない、拡散過程の全体的な特徴を初通過時間の分布を計算することより調査する。10, 10, 10 は初通過時間の分布についてヒストグラムを作成した図である。速度分布が正規分布にしたがうような場合、初通過時間分布は指数関数的な分布になる。この分布では、 b が 1 に近づくにつれてヒストグラムは単調な指数関数的減衰ではなく、波打った構造をとり、配位空間のトポロジを反映していることがわかる。速度分布の非正規分布性より、大数の法則によっては記述することのできない平均から大きく外れたところも取り扱う必要があることがわかる。

5. ま と め

トリプルリンケージに注目することで、物理例としての意味も持つアノソフ系に対して統計力学的性質を調査した。解析の結果、配位空間や拡散係数にはカオス切っても切れない関係に

ある自己相似性の存在を示唆することができた。ボックスカウント法などを用いて数値的にフラクタル次元を計算することにより、フラクタル性を確かめることができる。またトリプルリンケージについてはリヤプノフ指数の計算の結果もあるため[?,]カプランとヨークによる、フラクタル次元とリヤプノフ指数の関係式

$$D_{KY} = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}$$

を用いた検証をおこなうことができる。

速度分布についても非正規分布であることが示唆されるので、系の全体的な性質を見るためには大偏差原理に基づくレート関数の計算も行う必要がある。

文 献

- [1] Alligood, Kathleen T., Tim D. Sauer, and James A. Yorke. "Chaos. Springer Berlin Heidelberg", 1997.
- [2] Devaney, Robert L. "An introduction to chaotic dynamical systems." Vol. 13046. Reading: Addison-Wesley, 1989.
- [3] Shimada, I., and Nagashima T. "A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems." *Progress of Theoretical Physics* 61.6 (1979): 1605-1616.
- [4] Katok A and Hasselblatt B "Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems" Cambridge University Press 1995.
- [5] Thurston, W. P., and Jeffrey R. Weeks. "The mathematics of three-dimensional manifolds." *Scientific American* 251 (1984): 108.
- [6] Hunt, T. J., and R. S. MacKay. "Anosov parameter values for the triple linkage and a physical system with a uniformly chaotic attractor." *Nonlinearity* 16.4 (2003): 1499-1510.
- [7] Magalhães, M. L. S., and Mark Pollicott. "Geometry and dynamics of planar linkages." *Communications in Mathematical Physics* 317.3 (2013): 615-634.
- [8] Kuznetsov, Sergey P. "Hyperbolic chaos in self-oscillating systems based on mechanical triple linkage: Testing absence of tangencies of stable and unstable manifolds for phase trajectories." *Regular and Chaotic Dynamics* 20.6 (2015): 649-666.
- [9] Kapovich, Michael, and John J. Millson. "Universality theorems for configuration spaces of planar linkages." *Topology* 41.6 (2002): 1051-1107.