

乱流散逸のフラクタル構造

電通大 細川 巖

航技研 山本 稀義

1. 概 略

最近行った, 等方性乱流の数値シミュレーション¹⁾のデータを利用して fully-developed state ($t = 10$, $Re \sim 100$) での dissipation cascade を調べ, 他の研究と比較する。dissipation cascade を性格づけるものとして, intermittency exponents, generalized dimensions, $f-\alpha$ spectrum を計算する。これらの量については, すでに Meneveau & Sreenivasan によって実験結果²⁾および理論³⁾が提出されているので, これらに対比する数値結果が出されることは, 大いに興味があろう。著者の知るかぎり, この試みはまだ例を見ない。

2. intermittency exponents と generalized dimensions

Hentschel & Procaccia⁴⁾によれば, dissipation cascade の generalized dimensions D_q は,

$$\sum_i E_{r(i)}^q / E_L^q = (r/L)^{(q-1)D_q} \quad (r/L \ll 1) \quad (1)$$

によって計算される。 $E_{r(i)}$ は i 番目の scale r の subbox 中の dissipation を示す。 L は macroscale で、 d 次元空間では $N = L^d/r^d$ である。 $E_{r(i)}/E_L \equiv p_{r(i)}$ は i 番目の subbox の dissipation measure (散逸確率) であることに注意。従って、 D_0, D_1, D_2 はそれぞれ dissipation をもつ集合の Hausdorff 次元、情報次元、相関次元である。

われわれの乱流場 ($L = 4\pi$) から $(\sum_i^N p_{r(i)}^q)^{1/(q-1)}$ を計算したものが Fig. 1 である。 $|q|$ が大きいと多少のゆれがあるが、ほぼ 2 decades にわたって線形性が成り立ち、 D_q は (少なくとも近似的に) 存在すると言える。 D_q はグラフの 6 点を使って最小二乗法により求めた。グラフを比べれば分かるが、対応する Meneveau & Sreenivasan の実験データはゆれがさらに大きく、われわれのデータは相対的に良質である。参考のために、inertial subrange を破線によって示す。

得られた D_q は Fig. 2 にプロットされる。実線は Meneveau & Sreenivasan の平均的実験値であり、彼等の提出した p model でもある。点線は

$$D_q = D_{-1.8} - 0.647 \tan^{-1} 0.191(q + 1.8) \quad (2)$$

で、シミュレーションに Fit したものである。いずれにせよ、 $q = -2 \sim 5$ では両結果はそれほど差異はないが、 $|q|$ が大きいとかなりの差が出てくる。

intermittency exponents μ_q は

$$\langle \varepsilon_r^q \rangle / \varepsilon_L^q = (r/L)^{-\mu_q} \quad (3)$$

で定義される。⁵⁾ ここで ε_r は scale r の sphere 中の平均 dissipation

n であり、 $\langle \rangle$ はアンサンブル平均である。(1) と関連づけるために $E_r \sim \varepsilon_r r^d$, $E_L \sim \varepsilon_L L^d$ を考慮すると、

$$-\mu_q = (q-1)(D_q - d) \quad (4)$$

が得られる。

(3)の変換により、 μ_q は Fig. 3(a,b)のようになる。 $\square$ と $\times$ はそれぞれ Antonia et al, Anselmet et al の実験値である。Meneveau & Sreenivasan の誤差を含む実験値域は $+-$ で示した。 $\circ$ で示したわれわれの数値シミュレーションは、 D_q の場合と同様、 $|q|$ の大きいところで、それよりかなり外れている。Fig. 3(b) でシミュレーションにもっとも近い理論は square-root exponential model⁶⁾であることをノートする。

μ_q でもっとも重要なもの、 $\mu_2 \equiv \mu$ 及び $\mu_{2/3}$ の値を Fig. 3(b) の左上に記した。われわれのシミュレーションは $\mu \doteq 0.2$ という最近の定説を支持する。 $\mu_{2/3}$ は Kolmogorov law の intermittency correction で決定的な役割を果たすが、LN (lognormal) 理論はその面ではわれわれのシミュレーションに近い。図から見て、LN理論は $|q| < 5$ では相当にいい近似だと考えられる。

図から得られるもう一つの結論は、 $|q| \rightarrow \infty$ で μ_q は漸近直線をもつということである。

3. $f-\alpha$ spectrum

dissipation cascade process においては (inertial range を念

頭におき) Euler 方程式が 成り立つとしてよいだろう。Euler 方程式は

$$\begin{aligned} r' &= \lambda r \\ v' &= \lambda^{\alpha/3} v \\ t' &= \lambda^{1-\alpha/3} t \end{aligned} \quad (4)$$

のスケール変換で不変であり, 従って多くの self-similar solutions をもっている。この時, dissipation ε_r と energy e_r について

$$\varepsilon_r \sim r^{\alpha-1} \quad (5)$$

$$e_r \equiv v_r^2/2 \sim r^{2\alpha/3} \quad (6)$$

の scale dependence が成り立つ。

$\alpha = 1$ のときは明らかに Kolmogorov law, $\alpha = D - 2$ のときは β model に帰着する。しかし, lognormal model を含めて, 一般に α はある領域内にひろがり, いわゆる multifractal sets が出現する。これらの sets の空間次元が $f(\alpha)$ である。 D_q curve が Fig. 2 のように分かっていると, $f-\alpha$ の関係は接触変換として次の様に与えられる^{2, 3)}

$$\begin{aligned} \alpha &= d/dq [(q-1)(D_q - d + 1)] \\ f(\alpha) &= \alpha q - (q-1)(D_q - d + 1) + d - 1 \end{aligned} \quad (7)$$

これをわれわれの数値シミュレーションについて実行したものが Fig. 4 である。実線が p model であり, 簡単なカントル集合を使うモデルの性質上 $|q| \rightarrow \infty$ で $f = 2$ に集積する。したがってこのモデルは散逸最大 (及び最小) の領域が 2 次元構造をもっていることを示唆する。一方, シミュレーションは $q \geq 0$ で $f = 2$ まではほぼ完全に p model に一致する。

書いていないが, lognormal model (with $\mu = 0.2$)も同様である。従って, f - α spectrum のこの領域 ($0.5 < \alpha < 1.2$)の挙動は, まず確定的なものと考えてよい。

しかし, シミュレーションはlognormal modelと同様に, $f = 2$ を越えてずっと下に伸びる。lognormal modelは $f = -\infty$ に伸びるが, シミュレーションは α 軸のわずかで集積しそうである。この結果だけで, $f < 0$ があるかないかをいうことは差し控えたい。しかし, 接触変換 (7) において $f < 0$ が拒絶されるべき数学的根拠はないし, 物理的条件も見当らない。Frisch et al⁷⁾ の β model のフラクタル次元 D に対する物理的制限は, そのままマルチフラクタルに適用できないのである。この問題を解決するには, さらに R_λ の大きい精密な数値シミュレーションが必要である。

4. コメント

Fig. 4 より α の domain が分かる。(5)より, 散逸は $\alpha < 1$ で singular になり, 一方 (6)より, エネルギーは常に non-singular である。したがってintermittency は散逸の方が強烈である。エネルギーの空間的変動は滑らかなエネルギースペクトルと対応する。

参考文献

- 1) K. Yamamoto and I. Hosokawa, J. P. S. J. 57 (1988) 1532; I. Hosokawa and K. Yamamoto, J. P. S. J. 58 (1989) 20.
- 2) C. Meneveau and K. R. Sreenivasan, in Physics of Chaos and Systems far from Equilibrium, eds. M-D. Van and B. Nichols (North-Holland, Amsterdam, 1987).
- 3) C. Meneveau and K. R. Sreenivasan, Phys. Rev. Lett. 59 (1987) 1424.
- 4) H. G. E. Hentschel and I. Procaccia, Physica 8D (1983) 435.
- 5) A. S. Monin and A. M. Yaglom, Statistical Fluid Mechanics (MIT Press, Massachusetts, 1987), Vol. 2.
- 6) I. Hosokawa, Phys. Fluids A1 (1989) 186.
- 7) U. Frisch, P. Sulem, and M. Nelkin, J. Fluid Mech. 87 (1978) 719.

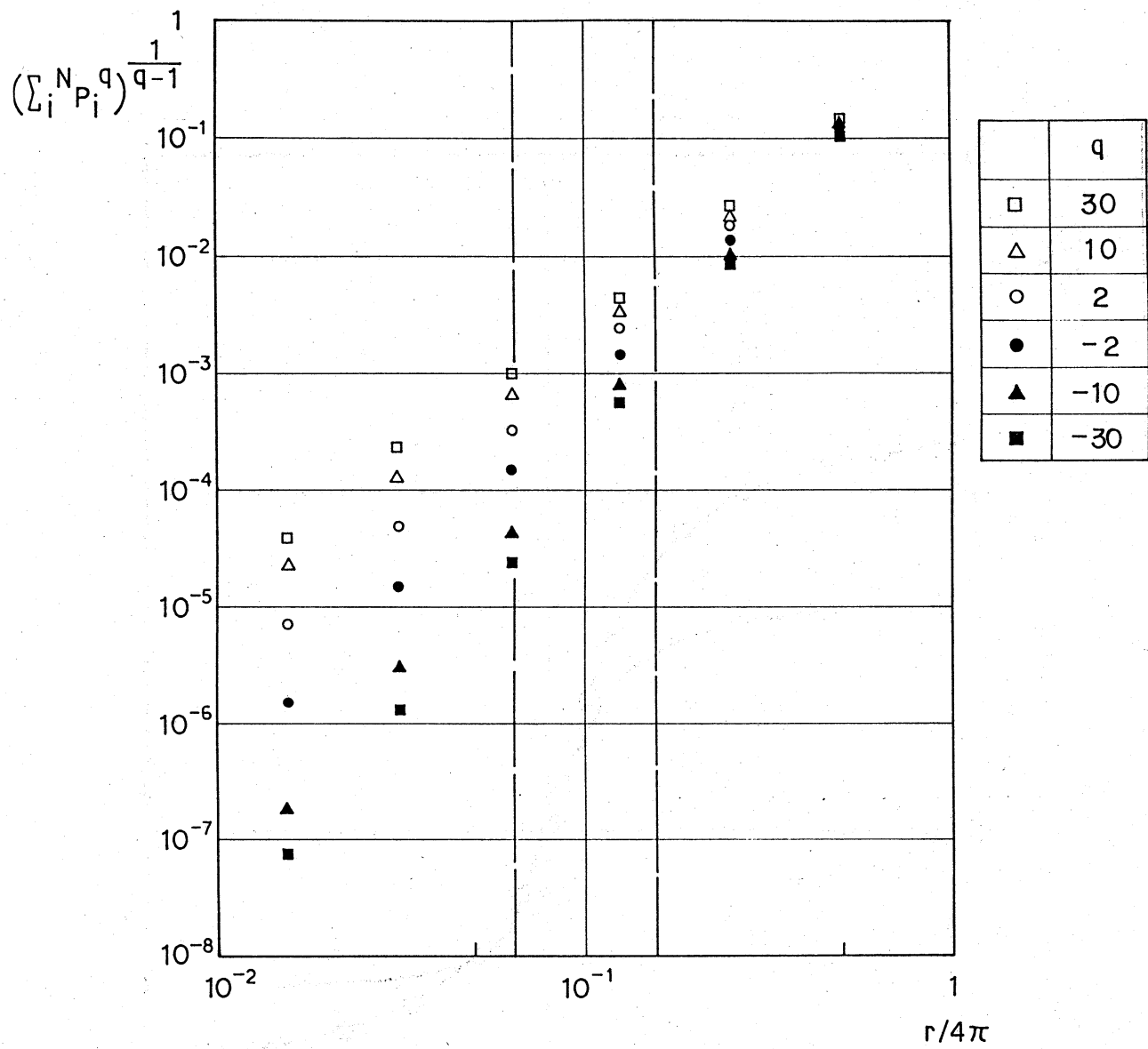


FIG. 1

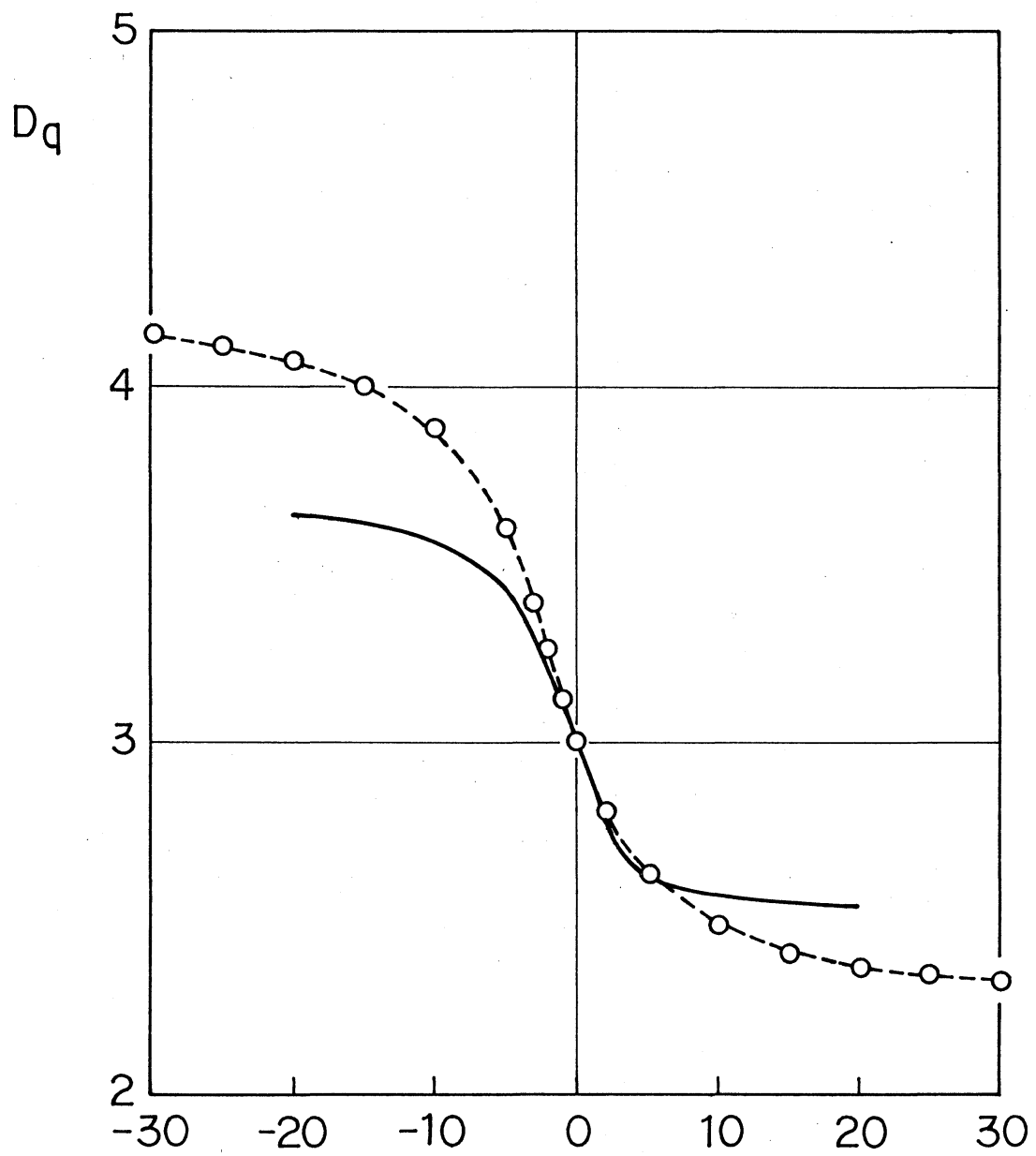


FIG. 2

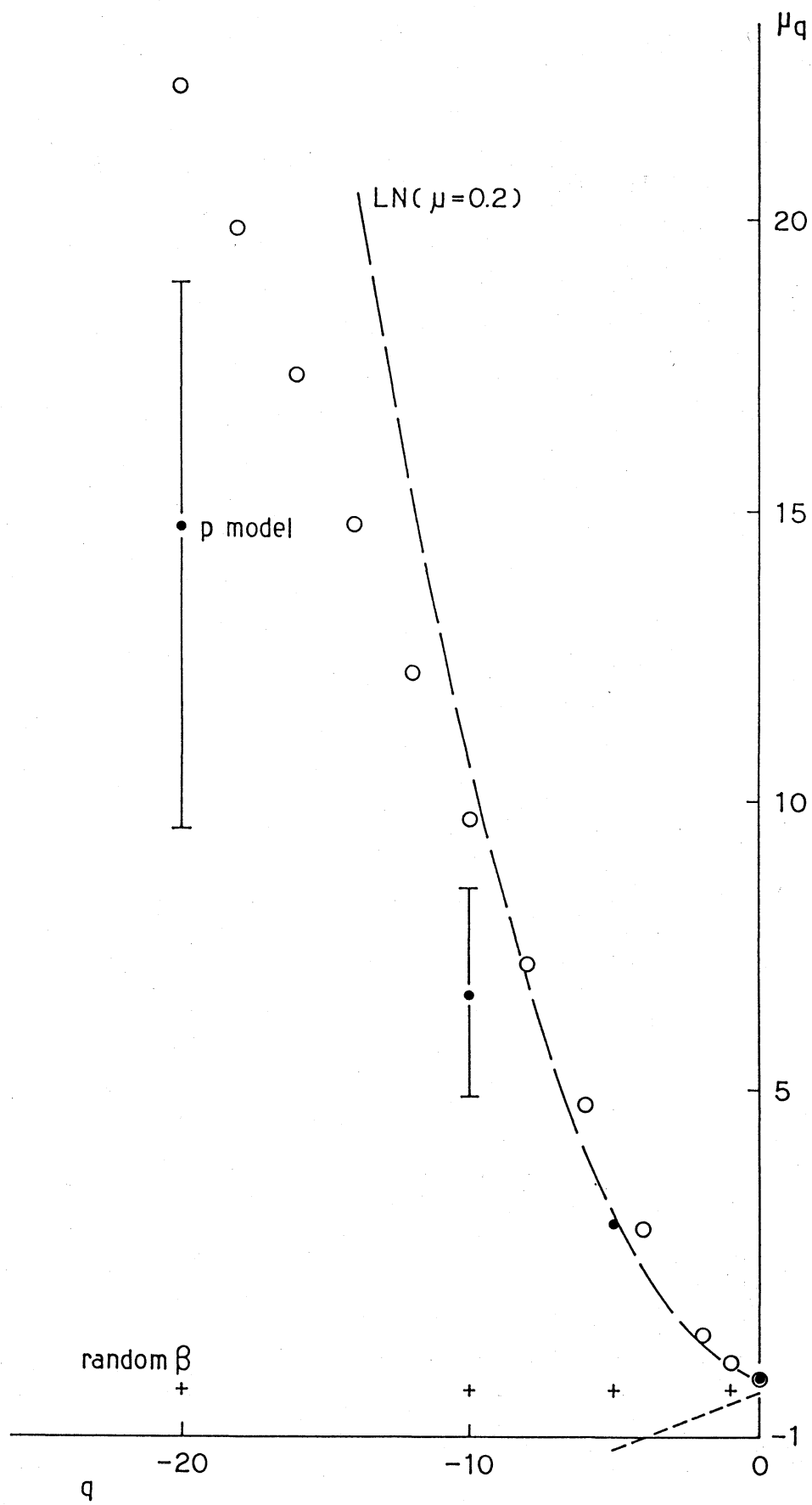
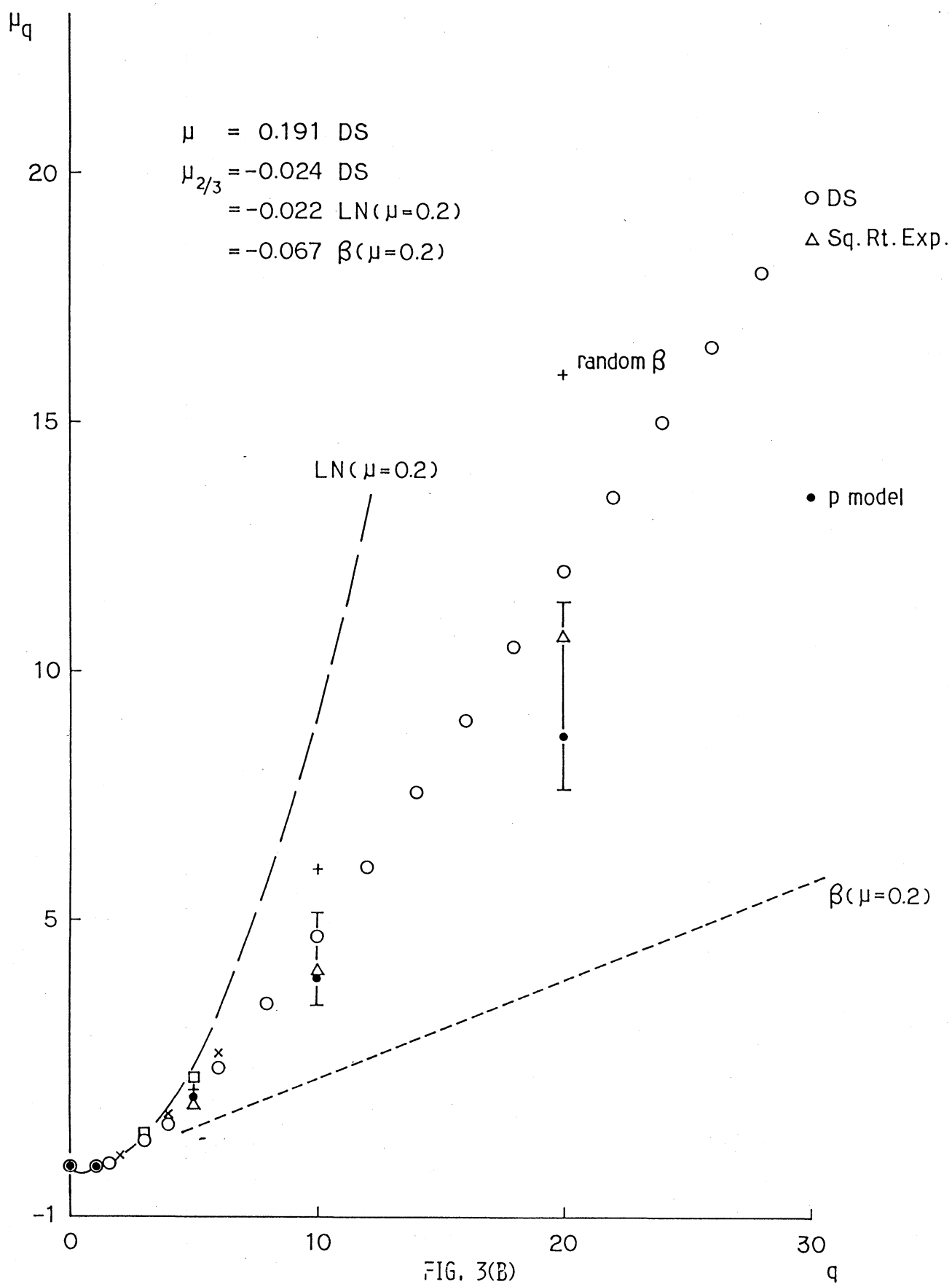


FIG. 3(A)



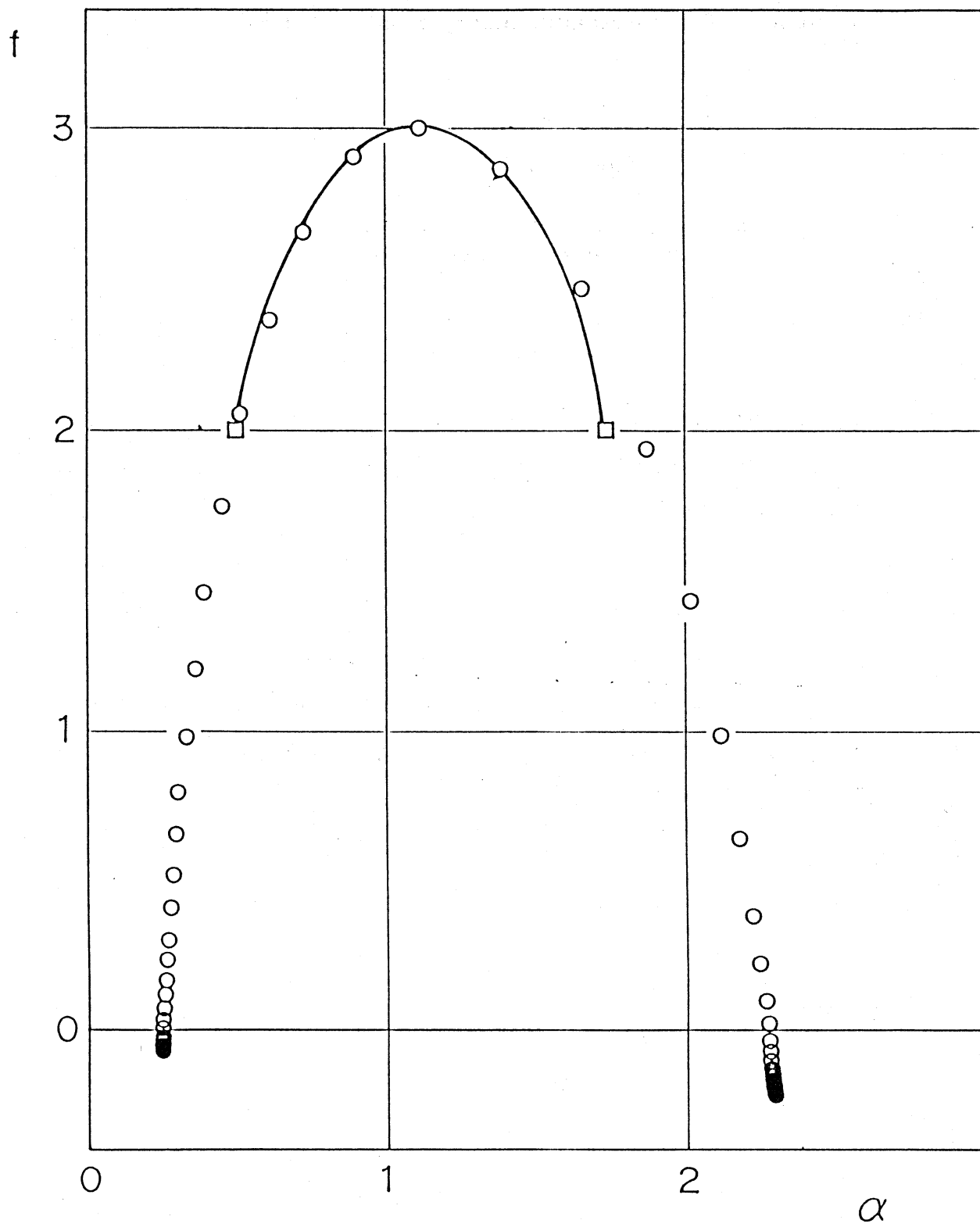


FIG. 4