

Moduli spaces of Bridgeland stable objects on abelian surfaces

柳田伸太郎 (京大数研)

概要

代数曲面上の安定層のモジュライ空間の研究において, Fourier-Mukai 変換の下で Gieseker 安定性が保たれるかという問題は重要であった. 2000 年代には Bridgeland により三角圏上の安定性の概念が導入されたが, この問題は Bridgeland 安定性で考えた方がより良く扱える事が分かりつつある. 今回の講演では, Fourier-Mukai 変換を用いた安定層のモジュライ空間の間の双有理射の構成と, Bridgeland 安定性条件の空間の説明をアーベル曲面の場合にする. ある場合には, 壁越え現象が半等質層を用いた安定層のモジュライ空間の具体的な記述と密接に関係することも解説する.

0 イントロダクション

本稿の内容は神戸大の吉岡康太氏との共同研究 [YY1, YY2] に基づく.

本稿の主対象は表題にあるようにアーベル曲面上の安定層ないし Bridgeland の意味での安定対象のモジュライ空間である. Mumford 及び Gieseker の古典的な仕事によって代数曲線ないし代数曲面上の接続層の安定性が確立され, その後 (半) 安定層のモジュライ空間の研究が発展してきた. 安定層に関して基本的な問題というのはいくつかあるが, その一つとして安定層の構成問題, 即ちどうすれば安定な接続層を構成することができるか, という問題がある. 底空間が Calabi-Yau, 即ち標準層が自明な時, Fourier-Mukai 変換が安定層の構成の強力な道具になる.

底空間がアーベル曲面の場合に Fourier-Mukai 変換が有効な研究手段であることを解説するのが本稿の最初の目的である. その際, Fourier-Mukai 変換の下で Gieseker 安定性が保たれるかという問題をクリアすることになる. 本稿で扱うのは, 半等質表示という複体を活用することで, ある程度一般的な状況下で安定性の保存を保障できる場合である. 結果, 安定層のモジュライの間の双有理射を構成することができる. これにより (1980 年の) 向井の予想を解決することもできる.

本稿の第 2 の目的は, 特殊な場合には上記の双有理射が同型になることを示すことである. この主張はやはり向井が 1980 年ごろに提出している (が, 証明は書き下されていなかったようである). その際に Bridgeland 安定性を導入するのが便利である. 安定性条件の空間には壁と部屋の構造があるが, ある場合には壁越え現象が半等質層を用いた安定層のモジュライ空間の具体的な記述と関係することを解説する.

本稿の構成を簡単に述べる. §1 では安定層のモジュライ空間の基本的な性質を復習し, その後で講演で紹介した 2 つの主定理を述べる. 1 つ目はアーベル曲面上のモジュライ空間の双有理同値類に関する主張であり, 2 つ目は同型類に関する主張である. §2 では [YY1] に従って定理 1 の証明のアイデアを説明する. 一言でいうと, 一般の安定層に対し半等質表示という分解が存在することが鍵になる. §3 では [YY2] に従って定理 2 について説明する. §2 では Gieseker 安定性のみが議論に現れるのに対し, §3 では Bridgeland 安定性を使うこと

が鍵になる．最後に §4 でまとめと残っている予想について述べる．

記号 断らない限り X は複素数体 $\mathbb{C}$ 上定義された代数多様体, H は X 上の豊富な因子とする．また $D(X) := D^b \text{Coh}(X)$ と略記する．

1 2つの主定理

この節は代数曲面上の古典的な安定性の話から始めて, 2つの主定理を述べることにする．前半の話については文献が数多くあるが, ここでは論説 [M87, Y04] と教科書 [HL10] を挙げておく．

代数曲面 X とその上の豊富な因子 H に関する Gieseker 安定性の定義から思い出すことにしよう． X 上の torsion free な連接層 E が H (半) 安定であるとは, 任意の部分層 $F \subsetneq E$, $F \neq 0$ について $p(F(nH))/\text{rk}(F) \underset{(\text{=})}{<} p(E(nH))/\text{rk}(E)$ が $n \in \mathbb{Z}$, $n \gg 0$ で成立するということであった．ここで $p(E) := \chi(E)/\text{rk}(E)$ は正規化された Euler 指標である．

$c \in H^{\text{ev}}(X, \mathbb{Q})$ に対し $M_X^H(c)$ で $(\text{rk } E, c_1(E), c_2(E)) = c$ なる H 安定層 E のモジュライ空間を記す．Gieseker の結果により $M_X^H(c)$ は準射影的概型の構造をもち, 半安定層の S 同値類を付け加えることで射影的概型 $\overline{M}_X^H(c)$ にコンパクト化できる．

以下 X は K3 曲面ないしアーベル曲面とする．この場合は $E \in \text{Coh}(X)$ の Chern 指標の代りに所謂 Mukai ベクトル

$$v(E) := \text{ch}(E)\sqrt{\text{td}_X} = (\text{rk}(E), c_1(E), \chi(E) - \epsilon \text{rk}(E)) \in H^{\text{ev}}(X, \mathbb{Z})$$

を用いるのが便利である．但し $\epsilon := 1$ (X : K3) もしくは $\epsilon := 1$ (X : アーベル)． $H^{\text{ev}}(X, \mathbb{Z})$ 上の対称双線型形式を

$$\langle (r, \xi, a), (s, \eta, b) \rangle := (\xi, \eta) - as - rb$$

で定める．また $v = (r, \xi, a)$ が正であるとは, 辞書式順序で正, 即ち $r > 0$ 又は “ $r = 0$ かつ ξ が有効的” 又は “ $r = 0$ かつ $\xi = 0$ かつ $a > 0$ ” である事とする．

安定層のモジュライ空間の基本性質をここで思い出そう．

事実． X は K3 曲面又はアーベル曲面とする．

- (1) [M84] $M_X^H(v)$ は (空でなければ) 非特異, $\dim = \langle v^2 \rangle + 2\epsilon$ で正則シンプレクティック構造を持つ．また, H が v に関し一般的なら $M_X^H(v)$ は射影的．
- (2) [Y03a, Y03a] もし $v = (r, \xi, a)$ が正なら, $M_X^H(v) \neq \emptyset$ と $\langle v^2 \rangle \geq 0$ は同値．また $\langle v^2 \rangle > 0$ かつ H が v に関し一般的なら $\overline{M}_X^H(v)$ は既約な正規射影多様体．

さて本稿では X がアーベル曲面の場合に限って話をする．この場合のモジュライ空間については上で述べたより更に精密な主張が成立する．

定理 1. X を主偏極アーベル曲面でかつ $\text{NS}(X) = \mathbb{Z}H$ だとする．また Mukai ベクトル v が正で, $\ell := \langle v^2 \rangle / 2$

(これは常に整数) が

$$\#\{\text{判別式が } \ell \text{ の整係数 2 次形式}\} / \sim_{\text{GL}(2, \mathbb{Z})} = 1$$

を満たすものとする。この時双有理射

$$M_X^H(v) \dashrightarrow X \times \text{Hilb}^\ell(X)$$

が存在する。

注意. (1) これは [M80] の予想 1 に述べられている主張である。

(2) “ X が主偏極” という仮定を外して類似の主張が証明できる。正確な主張は §2 で触れる。証明の鍵になるのは Fourier-Mukai 変換と **半等質表示** である。

(3) 整係数 2 次形式とは $ax^2 + 2bxy + cy^2$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$) のことである。その判別式とは $b^2 - ac$ のことである。整係数 2 次形式には $A \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ が

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \mapsto a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 \quad \begin{bmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{bmatrix} = {}^t A \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} A$$

で作用する。これで得られる同値関係が主張の仮定の中で用いた $\sim_{\text{GL}(2, \mathbb{Z})}$ である。

主定理の 2 つ目は、仮定を強めると主定理 1 の双有理同値が同型を与えることを主張するものである。

定理 2. X を主偏極アーベル曲面でかつ $\text{NS}(X) = \mathbb{Z}H$ だとする。また Mukai ベクトル v が正で、 $\ell := \langle v^2 \rangle / 2$ が $\ell = 1, 2, 3$ だとする。この時同型

$$M_X^H(v) \xrightarrow{\sim} X \times \text{Hilb}^\ell(X)$$

がある。

注意. (1) $\ell = 2, 3$ は定理 1 の仮定を満たす。つまり “整係数 2 次形式の同値類の数は 1” である。

(2) これは [M79, M80] で定理として述べられているものであるが、証明が書き下されていなかった。

(3) 証明の鍵は Bridgeland **安定性** 条件の空間の壁と部屋の構造の解析である。

2 モジュライ空間の双有理同値

この節では定理 1 を示すためのアイデアを紹介する。まず半等質層について説明する。これはアーベル多様体上で定義される層であり、アーベル曲面の Fourier-Mukai 対並びに Fourier-Mukai 変換の分類に役立つものである。

以下では断らない限り X は $\mathbb{C}$ 上定義されたアーベル曲面とする。

2.1 半等質層とアーベル曲面上の Fourier-Mukai 変換

半等質層は [M78] で導入・分類され、後の Fourier-Mukai 変換の研究の礎になった。

定義 (半等質層 (semi-homogeneous sheaves)). $E \in \text{Coh}(X)$ に対し

$$S(E) := \{(x, y) \in X \times \hat{X} \mid T_x^* E \otimes \mathbf{P}|_{X \times \{y\}} \cong E\}$$

と定める. ここで $\widehat{X} := \text{Pic}^0 X$ は Picard 多様体, T_x は $x \in X$ による平行移動, $\mathbf{P}$ は $X \times \widehat{X}$ 上の Poincaré 束. この時 $S(E)$ は $X \times \widehat{X}$ のアーベル部分多様体であり, 次元は 2 以下である.

$\dim S(E) = 2$ のとき, E を半等質層と呼ぶ.

注意. E が半等質層かつベクトル束なら, 任意の $x \in X$ について $L \in \text{Pic}^0 Y$ が存在して $T_x^* E \cong L \otimes E$ となる. つまり E は平行移動しても, 次数 0 の直線束による捻じれを除けば自分自身と同型である. これが “半等質” という言葉の由来である.

事実 1. (1) (2 次元の安定層のモジュライの分類) [M78]

H を X 上の豊富な因子とする. $E \in \text{Coh}(X)$ は $\langle v(E)^2 \rangle = 0$ を満たすものとする.

- (a) E は H 半安定なら半等質層.
- (b) E が H 安定であることと $v(E)$ が原始的である事は同値.

(2) (アーベル曲面上の Fourier-Mukai 変換の分類) [Or02]

X と Y はアーベル曲面で導来同値 $\Phi : D(X) \xrightarrow{\sim} D(Y)$ が存在するものと仮定する.

- (a) 正かつ $\langle v^2 \rangle = 0$ である Mukai ベクトル v が存在して $Y \cong M_X^H(v)$.
- (b) $Y \times X$ 上の普遍族 $\mathcal{E}$ が存在して, ある $k \in \mathbb{Z}$ でもって $\Phi \cong \Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{E}[k]} := \mathbb{R}p_{Y*}(p_x^*(-) \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{E}[k])$ となる.

注意. (1) つまりアーベル曲面の Fourier-Mukai 対は必ず半等質層のモジュライ空間であり, 全ての導来同値は半等質層の普遍族を核とする Fourier-Mukai 変換で与えられる.

(2) また (1) より $\langle v(E)^2 \rangle = 0$ なら E の安定性は因子 H の取り方に依存しない.

2.2 半等質表示

[YY1] で導入した次の概念を紹介する.

定義. $E \in \text{Coh}(X)$ の半等質表示とは短完全系列

$$0 \rightarrow E \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow 0 \quad \text{又は} \quad 0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E \rightarrow 0$$

であって, E_1 と E_2 は以下の条件を満たす半等質層である.

$$(\ell_1 - 1)(\ell_2 - 1) = 0, \quad \langle v_1, v_2 \rangle = -1 \tag{1}$$

ここで $\ell_i \in \mathbb{Z}$ と原始的な Mukai ベクトル v_i は $v(E_i)$ を $v(E_i) = \ell_i v_i$ と表す時に用いたもの.

注意 3. (1) 事実 1 を用いると, 条件 (1) から以下が従う.

- (a) E_1 または E_2 は安定.
- (b) Fourier-Mukai 変換 $\Phi : D(X) \xrightarrow{\sim} D(Y_i)$ が存在する. 但し $Y_i := M_X^H(v_i)$ で, $i \in \{1, 2\}$ は (a) の安定層 E_i に対応する番号.

(2) 半等質表示の導入の動機を説明するために,

$$0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E \rightarrow 0$$

で $\ell_1 = 1$ の場合を考える. 実は $\Phi := \Phi_{X \rightarrow Y_1}^{\mathcal{E}[-1]}$ によって

$$\Phi(E) \cong L \otimes I_Z$$

となる. 但し $L \in \widehat{Y}_1 = \text{Pic}^0(Y_1)$ 及び $Z \in \text{Hilb}^{\langle v^2 \rangle/2}(Y_1)$. また I_Z は Z のイデアル層. つまり半等質表示があると E は Fourier-Mukai 変換によって (次数 0 の直線束分の自由度を除いて) イデアル層に写すことができる. 写した後の層のモジュライ空間は $\widehat{Y}_1 \times \text{Hilb}^\ell(Y_1)$ と思えるから, 双有理写像の構成をするには半等質表示が一般の安定層に対して存在するを言えば良いことになる.

実は半等質表示の存在の判定をするには位相不変量にのみ依存した情報を考えれば十分である. それを説明するために, 次のものを考えることにする.

定義. Mukai ベクトル v の数値的方程式 (numerical equation) を

$$\begin{aligned} (\#) \quad & v = \ell_1 v_1 - \ell_2 v_2 \\ \text{但し} \quad & \begin{cases} \ell_i \in \mathbb{Z}_{>0}, & v_i : \text{正かつ原始的,} \\ (\ell_1 - 1)(\ell_2 - 1) = 0, \\ \langle v_i^2 \rangle = 0, & \langle v_1, v_2 \rangle = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

で定義する.

数値的方程式 $(\#)$ は未知数を $(\ell_1, \ell_2, v_1, v_2)$ とする不定方程式である. この方程式に解があれば一般の安定層が半等質表示を持つ, というのがこの節の議論で最も重要である.

命題 4. $\text{NS}(X) = \mathbb{Z}H$ と仮定する. また Mukai ベクトル v は正かつ $\langle v^2 \rangle > 0$ とする. もし数値的方程式 $(\#)$ が解 $(v_1, v_2, \ell_1, \ell_2)$ を持てば, $M_X^H(v)$ の一般の元は半等質表示を持つ.

ここではこの命題を認めて定理 1 の証明の概略を述べる.

定理 1 の証明の概略. $\text{NS}(X) = \mathbb{Z}H$ と仮定する. Mukai ベクトル v は 3 つの整数 (r, d, a) を用いて $v = (r, dH, a)$ と書ける. 以下 $n := (H^2)/2$ (これは整数) を用いる.

(r, d, a) 及び n を用いて数値的方程式を書き換えることができる. すると注意 3 と命題 4 より, もし

$$-rx^2 + 2ndxy - ay^2 = \pm 1 \tag{*}$$

に解 $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ があれば, ある Fourier-Mukai 変換が存在してそれにより双有理射

$$M_X^H(v) \dashrightarrow \text{Pic}^0(Y) \times \text{Hilb}^\ell(Y)$$

が定まる. 但し $Y = M_X^H(v_i)$.

さらに X が主偏極だと仮定する. この時 $n = 1$ だが, それと定理の仮定 (2 次形式の同値類の数が 1) から $(*)$ に解がある事が従う. 従って前段落の議論が適用できる. また任意の Fourier-Mukai 対は X と同型なので, 特に $Y \cong \widehat{Y} \cong X$ である. これで定理 1 が得られる. $\square$

3 モジュライ空間の同型射

この節の目標は定理 2 の解説である. その為に Bridgeland による導来圏上の安定性の概念を思い出す必要がある. そして安定性条件の空間の壁と部屋の構造を考える. アーベル曲面 X について, $D(X)$ の安定性条件の空間は (他の曲面の場合と比較して) ある程度詳しく記述できる. 特に余次元 0 の壁がモジュライ空間の解析の上で大切な役割を果たす.

3.1 Bridgeland 安定性

Bridgeland が導入した三角圏での安定性の定義を復習する.

定義. 三角圏 $\mathcal{T}$ 上の安定性条件 σ とは

$$\begin{cases} (\mathcal{T}^{\leq 0}, \mathcal{T}^{\geq 1}) & \mathcal{T} \text{ の } t \text{ 構造 (その core を } \mathcal{A} \text{ と記す)} \\ Z : K(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C} & \text{群準同型} \end{cases}$$

であって, 任意の $0 \neq E \in \mathcal{A}$ について以下が成り立つものの事である.

- (1) $Z(E) = re^{\sqrt{-1}\pi\phi}$, 但し $r, \phi \in \mathbb{R}$, $0 < r$, $0 < \phi \leq 1$. この ϕ の事を以下 $\phi(E)$ と書く.
- (2) $\mathcal{A}$ でのフィルトレーション $0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n = E$ が存在して, 各 $F_j := E_j/E_{j-1}$ について
$$\phi(F_1) > \cdots > \phi(F_n)$$

かつ F_j は半安定 (任意の $0 \neq F' \subset F_j$ について $\phi(F') \leq \phi(F_j)$ が成立する).

以下では安定性条件を $\sigma = (Z, \mathcal{A})$ と略記する. 代数曲面 X について $\mathcal{T} = D(X)$ 上の安定性条件の構成は Bridgeland のアイデアが基本的である. 現在では様々な場合に安定性条件が構成されているが, ここでは [MYYY] で証明した以下の形で述べる.

命題. X をアーベル曲面とする. 各 $\beta \in \text{NS}(X)_{\mathbb{R}}$ と $\omega \in \text{Amp}(X)_{\mathbb{R}}$ について $D(X)$ 上の安定性条件

$$\sigma_{(\beta, \omega)} := (\mathcal{A}_{(\beta, \omega)}, Z_{(\beta, \omega)})$$

が定義できる. ここで

$$Z_{(\beta, \omega)}(E) := \langle \exp(\beta + \sqrt{-1}\omega), v(E) \rangle$$

であり, また $\mathcal{A}_{(\beta, \omega)}$ は $\text{Coh}(X)$ の torsion pair $(\mathcal{T}_{(\beta, \omega)}, \mathcal{F}_{(\beta, \omega)})$ に関する tilting で得られる t 構造 (の core) である. torsion pair は

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{(\beta, \omega)} &:= \langle \beta\text{-twisted stable sheaf } E, Z_{(\beta, \omega)}(E) \in \mathbb{H}' \rangle \\ \mathcal{F}_{(\beta, \omega)} &:= \langle \beta\text{-twisted stable sheaf } E, -Z_{(\beta, \omega)}(E) \in \mathbb{H}' \rangle \end{aligned}$$

で与えられる. 但し $\mathbb{H}' := \{re^{\sqrt{-1}\pi\phi} \mid r, \phi \in \mathbb{R}, 0 < r, 0 < \phi \leq 1\}$.

定義. (1) ($\sigma_{(\beta, \omega)}$ 安定性)

$E \in D(X)$ が $\sigma_{(\beta, \omega)}$ 半安定であるとは, ある $n \in \mathbb{Z}$ が存在して $E[-n]$ が $\mathcal{A}_{(\beta, \omega)}$ の半安定な対象であることと定義する.

(2) (Bridgeland 安定対象のモジュライ空間)

$\mathcal{A}_{(\beta, \omega)}$ の半安定対象 E で $v(E) = v$ なるものの S 同値類のモジュライ概型を $M_{(\beta, \omega)}(v)$ と記す.

以下は [MYYY] で証明してある.

命題 (巨大体積極限). $E \in D(X)$ を $\text{rk}(E) \geq 0$ かつ $\langle v(E)^2 \rangle \ll (\omega^2)$ なるものとする. この時 E が $\sigma_{(\beta, \omega)}$ 半安定であることと $E \in \text{Coh}(X)$ かつ β -twisted H -semi-stable であることは同値.

命題 5 (安定性の保存). $D(X)$ の任意の導来同値 Φ は安定性を保つ. 即ち任意の $\sigma_{(\beta, \omega)}$ 半安定な対象 E に対しある (β', ω') があって $\Phi(E)$ は $\sigma_{(\beta', \omega')}$ 半安定.

3.2 Bridgeland 安定性条件の空間の壁と部屋の構造

引き続きアーベル曲面 X について $D(X)$ 上の安定性条件を考える.

定義. Mukai ベクトル v を固定する. もう 1 つの Mukai ベクトル v_1 であって

$$v_1 \notin \mathbb{Q}v, \quad \langle v_1^2 \rangle \geq 0, \quad \langle (v - v_1)^2 \rangle \geq 0, \quad \langle v_1, v - v_1 \rangle > 0$$

を満たすものを考える.

(1) (type v_1 の) v に関する壁を以下で定義する.

$$W_{v_1, v} := \{(\beta, \omega) \mid \mathbb{R}Z_{(\beta, \omega)}(v) = \mathbb{R}Z_{(\beta, \omega)}(v_1)\}.$$

(2) $\mathrm{NS}(X)_{\mathbb{R}} \times \mathrm{Amp}(X)_{\mathbb{R}} \setminus \cup_{v_1} W_{v_1, v}$ の連結成分を v に関する部屋と呼ぶ.

次の補題は“壁と部屋”という言葉遣いが正しいことを保障する.

補題. Mukai ベクトル v は $\langle v^2 \rangle > 0$ を満たすものとし, C を v に関する部屋とする. この時 $\sigma_{(\beta, \omega)}$ 安定性は $(\beta, \omega) \in C$ の取り方によらない.

つまり $M_{(\beta, \omega)}(v)$ は $(\beta, \omega) \in C$ によらない. そこでこのモジュライ空間を $M_C(v)$ と記すことにする.

以下 $\mathrm{NS}(X) = \mathbb{Z}H$ を仮定する. $\beta = sH, \omega = tH$ において安定性条件の空間を

$$\{(sH, tH) \mid s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_{>0}\}$$

と表すことにする.

補題. (1) v に関する壁 $W_{v_1, v}$ は次の様に書ける:

$$W_a := \{(sH, tH) \mid (s - a)^2 + t^2 = (p - a)^2 - q\} \quad \text{又は} \quad W_{\infty} := \{(sH, tH) \mid s = p\}.$$

ここで $p \in \mathbb{Q}$ と $q \in \mathbb{Q}_{>0}$ は v のみに依存して定まり, $a \in \mathbb{Q}$ は v_1 と v に依存して定まる.

(2) $a \neq a'$ なら $W_a \cap W_{a'} = \emptyset$.

つまり壁は (半) 円であり, 異なる壁は交わらない.

次に壁の余次元という概念を導入する.

定義 (壁の余次元). v に関する壁 W の余次元 $\mathrm{codim} W$ を

$$\mathrm{codim} W := \min_{v = \sum_i v_i} \left\{ 1 + \sum_{i < j} \langle v_i, v_j \rangle - \sum_i (\dim \mathcal{M}_X^{H, \beta'}(v_i)^{ss} - \langle v_i^2 \rangle) \right\}$$

で定義する. ここで右辺の和の $v = \sum_i v_i$ は $i = 1, \dots, s, s > 2$ かつ

$$\phi_{(\beta, \omega)}(v) = \phi_{(\beta, \omega)}(v_i) \quad (\forall i), \quad \phi_{(\beta', \omega')}(v_i) > \phi_{(\beta', \omega')}(v_j) \quad (\forall i < j)$$

を満たすように動く. 但し (β, ω) は W 上にあり, (β', ω') は W に隣接する部屋にあるものとする.

壁の余次元は、安定対象のモジュライ空間の中で壁越えで安定性が崩れる対象のなす部分空間の余次元として定義してある。特に**余次元 0 の壁**というのは“安定対象が全て不安定になる”壁であり、一見統制のつかないものに見える。しかし次の命題により、我々の状況ではそのような壁がむしろ**良い壁である**ことが示唆される。

補題 6 (余次元 0 = 数値的方程式の解)。

$$\{W_{v_1, v} \mid v \text{ に関する余次元 0 の壁}\} \xleftrightarrow{1:1} \{\text{数値的方程式 } (\#) \text{ の解 } (v_1, v_2, \ell_1, \ell_2)\}$$

3.3 $v = (1, 0, -\ell)$ に関する壁

引き続き $\text{NS}(X) = \mathbb{Z}H$ と仮定し、自然数 n を $n := (H^2)/2$ で定める。

X の 1 次元部分概型 Z で長さ ℓ のものを考える。 Z のイデアル層 I_Z に対応する Mukai ベクトル $v = (1, 0, -\ell)$ の余次元 0 の壁を記述したい。補題 6 より数値的方程式の解を考えればよいが、今の場合はその解を $\sqrt{\ell/n}$ の連分数展開を用いて表示できる。

補題.

$$\{v = (1, 0, -\ell) \text{ に関する余次元 0 の壁}\} = \{W_m^0 \mid m \in \mathbb{Z}\}.$$

ここで W_m は

$$\begin{aligned} W_m^0 &:= \{(sH, tH) \mid (s - \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{b_m}{a_m})(s - \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\ell b_m}{a_m}) + t^2 = 0\} \quad (m \neq 0), \\ W_0^0 &:= \{(sH, tH) \mid s = 0\} \end{aligned}$$

で与えられる。但し

$$\begin{pmatrix} b_m & \ell a_m \\ a_m & b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & \ell p \\ p & q \end{pmatrix}^m, \quad p, q \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad q^2 - \ell p^2 = \pm 1.$$

有理数 b_m/a_m は $m \rightarrow \infty$ で $\sqrt{\ell/n}$ に収束することに注意する。

次の図 1 では余次元 0 の壁を実線で、余次元 1 以上の壁を破線で表す。壁 W_m に隣接した部屋で W_m の内側にあるものを C_m^+ , 外側にあるものを C_m^- と記す。

ここで $M_m := M_{C_m^-}(1, 0, -\ell) \cap M_{C_{m-1}^+}(1, 0, -\ell)$ とおく。

命題 7. (1) $M_0 \cong \widehat{X} \times \text{Hilb}^\ell(X)$.

(2) $M_m \neq \emptyset$. また $M_m \dashrightarrow M_{C_{m-1}^+}, M_{C_m^-}$.

(3) 概型の同型の列

$$\cdots \rightarrow M_{-2} \xrightarrow{\Psi_{-2}} M_{-1} \xrightarrow{\Psi_{-1}} M_0 \xrightarrow{\Psi_0} M_1 \xrightarrow{\Psi_1} M_2 \rightarrow \cdots$$

が存在する。各 Ψ_m は Fourier-Mukai 変換と双対関手 D_Y の合成 $\Phi_{Y \rightarrow X}^\mathcal{E} D_Y \Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{E}^\vee}[-]$ の形で書ける。

これで定理 2 の証明の概略を説明する準備ができた。ここでは $\ell = 2$ の場合について解説する。

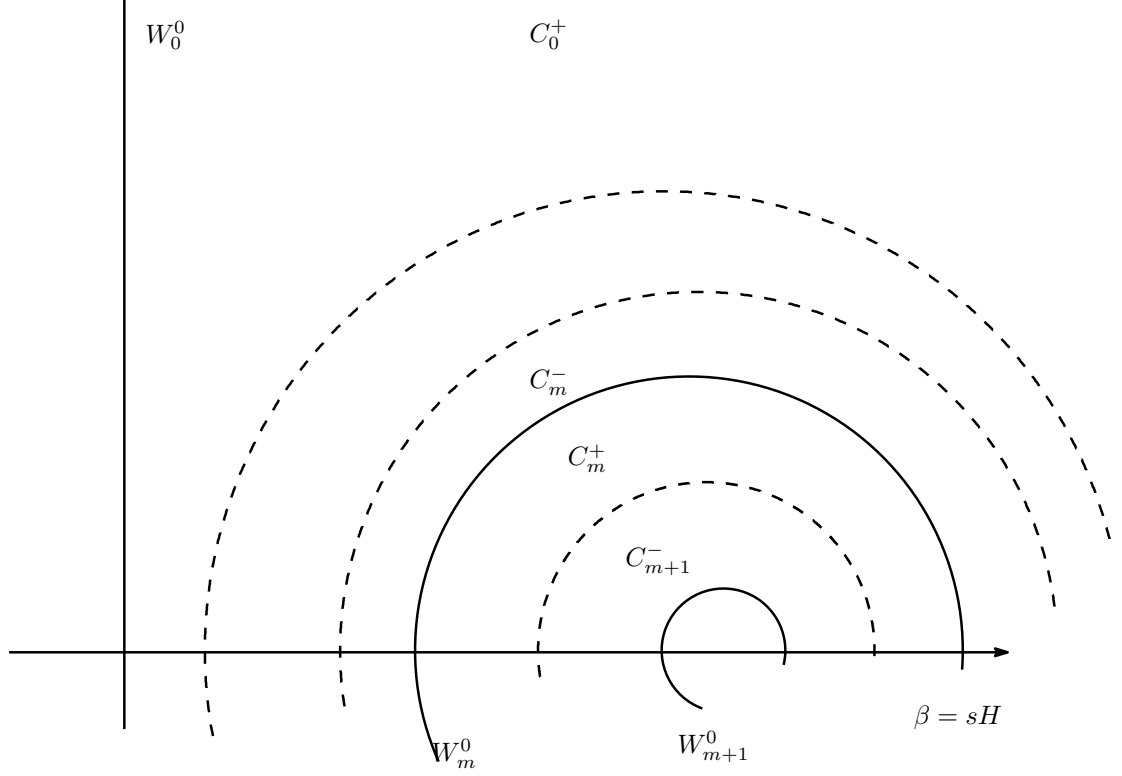


図1 $v = (1, 0, -\ell)$ に関する壁と部屋

定理2の証明の概略 ($\ell = 2$). “判別式が ℓ の2次形式の同値類の数が1” という仮定と命題5 (安定性の保存) から, ある Fourier-Mukai 変換があつて同型 $M_X^H(v) \xrightarrow{\sim} M_{(\beta, \omega)}(1, 0, -\ell)$ を引き起こす. ここで (β, ω) は Mukai ベクトル $(1, 0, -\ell)$ に関する部屋 C に属する安定性条件.

ここで仮定 $\ell = 2$ と $n = 1$ から, $(1, 0, -\ell)$ に関する壁で余次元1以上のものは存在しない. 特に $C = C_{m-1}^+ = C_m^-$ である.

すると

$$M_X^H(v) \cong M_{(\beta, \omega)}(1, 0, -\ell) = M_m \stackrel{\text{命題 7(3)}}{\cong} M_0 \stackrel{\text{命題 7(1)}}{\cong} X \times \text{Hilb}^\ell(X)$$

となり, 結論を得る. □

注意. 特に同型射 $M_X^H(v) \xrightarrow{\sim} X \times \text{Hilb}^\ell(X)$ は命題 refprop:mm(3) のような Fourier-Mukai 変換の合成と考える. その合成の回数は $v = (r, dH, a)$ のスロープ $2d/r$ と $\sqrt{\ell/n} = \sqrt{2}$ の連分数展開で得られる有理数列との大小関係から定まることも分かる. 実はこの連分数展開を利用した同型射の構成は [M79] に (証明なしだが) 書かれている. 我々の仕事により [M79] の主張が Bridgeland 安定性の言葉で正当化されたことになる.

4 最後に

今回紹介した結果をまとめる.

- 半等質表示と *Fourier-Mukai* 変換を活用することで, 安定層のモジュライ空間の間の双有理射を構成できた.
- *Bridgeland* 安定性条件の空間の壁と部屋の構造を解析することで, 上記の双有理射がある場合には 同型を与えることが分かった.

最後に未解決の問題を 1 つ紹介して本稿を終えることにする.

予想. [M80] X は主偏極かつ $\mathrm{NS}(X) = \mathbb{Z}H$ と仮定する. この時

$$\#\{\text{判別式 } \ell \text{ の整係数 2 次形式}\} /_{GL(2, \mathbb{Z})} \stackrel{?}{\sim} \#\{M_X^H(v) \mid v : \text{positive}, \langle v^2 \rangle = 2\ell\} /_{\sim \text{双有理}}$$

注意. 定理 1 の証明の議論から片方の不等式

$$(\mathrm{LHS}) \geq (\mathrm{RHS})$$

は得られている [YY1].

参考文献

- [HL10] Huybrechts, D., Lehn M., *The geometry of moduli spaces of sheaves*, Second edition, Cambridge University Press, 2010.
- [MYYY] Minamide, H., Yanagida, S., Yoshioka, K., *Fourier-Mukai transforms and the wall-crossing behavior for Bridgeland's stability conditions*, preprint, arXiv:1106.5217.
- [M78] Mukai, S., *Semi-homogeneous vector bundles on an abelian variety*, J. Math. Kyoto Univ. **18** (1978), no. 2, 239–272.
- [M79] 向井茂, フーリエ関手とそのアーベル曲面上のベクトル束への応用について, 代数幾何学シンポジウム講演録 (東北大学, 1979 年 6 月), 76–93.
- [M80] 向井茂, アーベル曲面上のベクトル束の分類について, 数理解析研究所講究録 **409** (1980), 103–127.
- [M81] Mukai, S., *Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves*, Nagoya Math. J. **81** (1981), 153–175.
- [M84] Mukai, S., *Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian and K3 surface*, Invent. Math. **77** (1984), 101–116.
- [M87] 向井茂, K3 曲面上のベクトル束のモジュライとシンプレクティック多様体, 数学 **39** (1987), 216–235.
- [Or02] Orlov, D., *Derived categories of coherent sheaves on abelian varieties and equivalences between them*, Izv. Math. **66** (2002), no. 3, 569–594.
- [YY1] Yanagida, S., Yoshioka, K., *Semi-homogeneous sheaves, Fourier-Mukai transforms and moduli of stable sheaves on abelian surfaces*, to appear in J. Reine Angew. Math. (available by online, DOI: 10.1515/crelle-2011-0010), arXiv:0906.4603.

- [YY2] Yanagida, S., Yoshioka, K., *Bridgeland's stabilities on abelian surfaces*, preprint, arXiv:1203.0884.
- [Y03a] Yoshioka, K., *Twisted stability and Fourier-Mukai transforms I*, Compositio Math. **138** (2003), 261–288.
- [Y03b] Yoshioka, K., *Twisted stability and Fourier-Mukai transforms II*, Manuscripta Math. **110** (2003), 433–465.
- [Y04] 吉岡康太, 代数曲面上のベクトル束のモジュライ空間, 数学 **56** (2004), 225–247.