

磁性流体自由表面解析における界面磁場方程式

北大大学院工学研究科 水 田 洋 (Yo Mizuta)

Grad. Sch. of Engineering Sciences, Hokkaido Univ.

1 はじめに

磁場の印加により特異変形する磁性流体自由表面現象の解析では、流体解析と共に、磁場解析法の選び方が重要である。磁場は、透磁率に有限値だけ差のある磁性流体・真空の両領域に分布しており、自由表面は、磁場にとって任意形状の「界面」となる。界面近傍の磁場は、「界面をはさんで、磁場の接線成分 h_s と磁束密度の法線成分 b_n が連続」という界面条件を満たすように決める必要がある。しかし界面条件は、定値を与える境界条件に較べて扱いづらい。解析解は、外部磁場が一様あるいは点磁極・線磁極によるもの、界面形状が平面・円筒面・球面という特別な場合を除いて知られておらず、磁場解析には何らかの数値解析法を援用することになる。現在、電場・磁場解析では、有限要素法・境界要素法などが広く用いられている。しかし、これら本格的な数値解析では、計算量が膨大になるばかりでなく、界面条件・遠方境界の扱い方、大規模な連立方程式を解く負担の軽減などに工夫を要し、現象の理解という本来の目的になかなか結び付かない。自由表面現象の動的な解析では、界面が動くたびに磁場解析を必要とするのである。

磁性流体の自由表面現象は、流体と磁場が強く非線形結合した連成系と見ることができるが、これまで、安定性解析や波動の共鳴周波数シフトなどの線形解析 [1]、孤立波や共鳴現象などの弱非線形解析 [2, 3] などでは、磁場から流体への作用に解析の重点が置かれ、流体から磁場への作用を反映する界面磁場は「一様磁場あるいはそれからの微小変化」とされ、複雑な界面

形状，任意な磁場分布のもとでの磁場解析は本格的には扱われていない。

このように，磁性流体自由表面のような，任意形状の界面近傍の磁場解析は容易ではないが，磁場を2次元 Laplace 場として扱うなら，複素磁場を解析関数と見なして $z = x + iy$ だけの関数，Hilbert 変換，等角写像，などの性質を活用し，磁場解析の見通しをよくすることができる．最初，本研究では，界面形状の複雑さ，外部磁場分布に制限のない解析を可能にするため，既知の磁場を界面が平らな Flat Space で与え，これを界面が実際通り変形した Real Space へ写像変換した．このとき界面条件は，もし Flat Space で満たされていれば，Real Space でも満たされる．さらに，この界面磁場による磁場-流体結合発展方程式を用いて，自由表面現象の動的解析を行なった [4]．

しかしその後，Flat Space の磁場を写像変換する方法に代えて，外部磁場から界面磁場を直接求め，実験との比較をより容易にする必要が痛感されてきた．そのためには，界面条件の扱いを含め，磁場解析をさらに見通しよくする必要がある．本稿では，界面をはさむ両領域の複素磁場より定義した合成場を利用して，複素磁場の解析性と界面条件を共に考慮した界面磁場方程式を導出する．この方程式は繰り返し法で解くことになるが，その負担は，本格的な数値解析よりずっと軽いものである．

2 複素磁場と界面条件・磁気応力差

磁場と磁束密度の線形関係を前提に，磁性流体 ($j = 1$)・真空 ($j = 2$) 各領域の磁束密度・磁場・透磁率を $\mathbf{b}_j = (b_{xj}, b_{yj})$, $\mathbf{h}_j = (h_{xj}, h_{yj})$, μ_j として，

$$f_j(z) = b_{xj} - ib_{yj} = \mu_j(h_{xj} - ih_{yj}) \quad (1)$$

で複素磁場を定義する．磁場と磁束密度が磁束保存 $\text{div } \mathbf{b}_j = 0$ および無電

流条件 $\text{rot } \mathbf{h}_j = \mathbf{0}$ を満たすとき、これらの成分表示 $\partial b_{xj}/\partial x = -\partial b_{yj}/\partial y$, $\partial h_{yj}/\partial x = \partial h_{xj}/\partial y$ などを複素解析における **Cauchy-Riemann** の関係と見ることによって、複素磁場に、 $z = x + iy$ だけの関数、Cauchy の積分定理、Hilbert 変換、等角写像、など解析関数としての性質を期待できるようになる。以下では、 $f_j(z)$ のように引数に z だけを明示して、解析関数であることを示す。

磁性流体領域と真空領域での値の跳び、たとえば透磁率差に $[\mu_j] = \mu_2 - \mu_1$ のような表式を用いると、界面における磁場の接線成分 h_s と磁束密度の法線成分 b_n を用いて、界面条件は

$$[h_s] = 0, \quad [b_n] = 0 \quad (2)$$

と表される。また磁性流体の自由表面解析では、磁気応力差が磁場から流体への作用を表す量として重要である。

$$T = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\mu_j} \right] (\mu_1 \mu_2 h_s^2 + b_n^2). \quad (3)$$

すなわち問題は、解析関数 $f_j(z)$ が界面条件を満たすように h_s, b_n を決めることになる。

3 界面磁場

接線磁場 h_s と法線磁束密度 b_n は、 $b_{xj}, b_{yj}, h_{xj}, h_{yj}$ と界面勾配角 θ で表されるが (Fig. 1(a)), これらは次のようにまとめることができる。

$$\gamma_j \equiv -\mu_j h_s - i b_n = f_j(z) e^{i\theta}. \quad (4)$$

ここで θ も z に依存するが、それだけでは解析関数でないため、界面磁場 γ_j も解析的ではない。

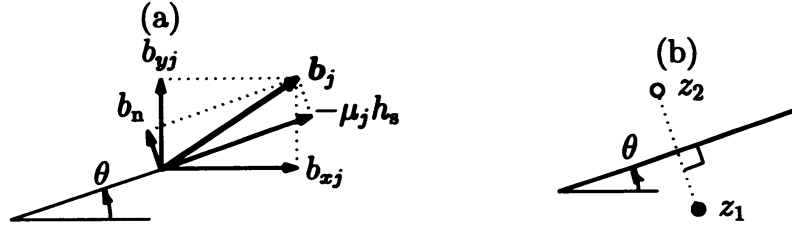


Fig. 1: (a) Interface magnetic fields. (b) Case of linear interface, magnetic pole z_1 and its image point z_2 .

γ_1 と, γ_2 に複素共役な $\overline{\gamma_2} = e^{i\theta} \overline{f_2(z)} = e^{-i\theta} \overline{f_2(\bar{z})}$ を用いて

$$\begin{cases} g_1 \equiv \frac{\overline{\gamma_2}}{\mu_2} - \frac{\gamma_1}{\mu_1} = -[h_s] + i \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) b_n, \\ g_2 \equiv \overline{\gamma_2} + \gamma_1 = -(\mu_1 + \mu_2) h_s + i[b_n] \end{cases} \quad (5)$$

を定義すれば, 界面条件, および h_s, b_n の求め方を同時に検討できる. すなわち, 純虚数 g_1 が b_n を, 実数 g_2 が $-h_s$ を直接与える.

4 直線界面点磁極の複素磁場

ここで, 直線 (正確には平面) 状の界面より磁性流体側にある点磁極 (線磁極)(Fig. 1(b)) が生成する複素磁場を示す. その解析解は, 鏡像法などで初等的に求めることができる. なお, 界面は傾いていてよいが, 界面勾配角 θ は定数である. 点磁極, および界面に関するその鏡像点の位置を $z_1 = -iy_1 e^{i\theta}$, $z_2 = iy_1 e^{i\theta}$ ($y_1 > 0$) とし, また $U(z) = 1/(z - z_1)$, $V(z) = 1/(z - z_2)$ と置けば, 複素磁場は次のようになる.

$$\begin{cases} f_1(z) = \mu_1 \{U(z) + \delta V(z)\}, \\ f_2(z) = \mu_1(1 - \delta)U(z) = \mu_2(1 + \delta)U(z). \end{cases} \quad (6)$$

ただし, $\delta \equiv (\mu_1 - \mu_2)/(\mu_1 + \mu_2)$, $\mu_1(1 - \delta) = \mu_2(1 + \delta) = 2\mu_1\mu_2/(\mu_1 + \mu_2)$. これらは変数 z だけしか含まないことから, z_1, z_2 以外で確かに Cauchy-

Riemann の関係を満たす．また，(5) で定義した g_1, g_2 に (6) を用いると，

$$\begin{cases} g_1 = \{\overline{e^{i\theta}U(z)} - e^{i\theta}U(z)\} + \delta \{\overline{e^{i\theta}U(z)} - e^{i\theta}V(z)\}, \\ g_2 = \mu_1 \{\overline{e^{i\theta}U(z)} + e^{i\theta}U(z)\} + \mu_1 \delta \{-\overline{e^{i\theta}U(z)} + e^{i\theta}V(z)\} \end{cases} \quad (7)$$

となるが，界面上では $z = xe^{i\theta}$ ($-\infty < x < \infty$), $\overline{e^{i\theta}U(z)} = e^{i\theta}V(z) = 1/(x - iy_1)$ より

$$g_1 = i \frac{2y_1}{x^2 + y_1^2} = i \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) b_n, \quad g_2 = \frac{2\mu_1 x}{x^2 + y_1^2} = -(\mu_1 + \mu_2) h_s \quad (8)$$

のように g_1 は純虚数， g_2 は実数となって，(6) の複素磁場が界面条件を満たすことが示される．またさらに， $b_n, -h_s$ が求められた．

5 合成場とその境界条件

複素磁場 $f_1(z), f_2(z)$ は本来，それぞれ磁性流体領域，真空領域で定義されたものであるが，解析性という強い仮定により，これらは反対側の領域まで定義を拡張できる．これに基づき，全ての領域で， $f_1(z), f_2(z)$ の差から以下の合成場 $B(z), H(z)$ を定義する．

$$\begin{cases} B(z) = \left\{ \frac{f_1(z)}{\mu_1} - \frac{f_2(z)}{\mu_2} \right\} / \left\{ \delta \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) \right\} = B_r + iB_i, \\ H(z) = \{f_1(z) - f_2(z)\} / \{\delta(\mu_1 + \mu_2)\} = H_r + iH_i. \end{cases} \quad (9)$$

逆に， $f_1(z), f_2(z)$ は合成場で次のように表される．

$$\begin{cases} f_1(z) = \mu_1 H(z) - B(z), \\ f_2(z) = \mu_2 H(z) - B(z). \end{cases} \quad (10)$$

$B(z), H(z)$ は， $f_1(z), f_2(z)$ の特異点以外の全領域で解析的である． μ_1 と μ_2 が一致して界面が消失しても， $f_1(z)$ と $f_2(z)$ が一致し， $B(z), H(z)$ は有限値として意味を持つ．なお，4節で示した直線界面点磁極の場合は，次

のようになる。

$$\begin{cases} B(z) = \{V(z) - U(z)\} / \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right), \\ H(z) = \mu_1 \{V(z) + U(z)\} / (\mu_1 + \mu_2). \end{cases} \quad (11)$$

(5) に (4), (10) を順に代入すれば,

$$\begin{cases} g_1 = -\left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}\right) C_r + i\left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1}\right) C_i - 2iD_i, \\ g_2 = (\mu_2 + \mu_1) D_r - 2C_r - i(\mu_2 - \mu_1) D_i \end{cases} \quad (12)$$

のように整理できる。ここで C_r, C_i, D_r, D_i は,

$$\begin{cases} C \equiv B(z)e^{i\theta} = C_r + iC_i \\ \quad = (B_r \cos \theta - B_i \sin \theta) + i(B_r \sin \theta + B_i \cos \theta), \\ D \equiv H(z)e^{i\theta} = D_r + iD_i \\ \quad = (H_r \cos \theta - H_i \sin \theta) + i(H_r \sin \theta + H_i \cos \theta) \end{cases} \quad (13)$$

で定義した非解析関数 C, D の実部・虚部で, $f_j(z)$ に対する γ_j と同様, 界面で $B(z), H(z)$ の接線成分と法線成分を与える。 (5) と (12) を較べて界面条件を適用すれば,

$$\begin{cases} -[1/\mu_j] C_r = -[h_s] = 0, & C_i = b_n, \\ D_r = -h_s, & -[\mu_j] D_i = [b_n] = 0 \end{cases} \quad (14)$$

が導かれる。すなわち, $f_1(z), f_2(z)$ に対する界面条件は, $B(z)$ は界面に直交, $H(z)$ は界面に平行, というより単純な境界条件に置き換えられた。また, $B(z)$ の法線成分, $H(z)$ の接線成分自身が, 求める $b_n, -h_s$ になる。

6 拡張された Hilbert 変換

界面磁場に複素磁場の解析性を反映させるとき, 磁性流体・真空の領域内部で $B(z), H(z)$ を Laplace 場として扱うのと等価な, **Hilbert** 変換を用い

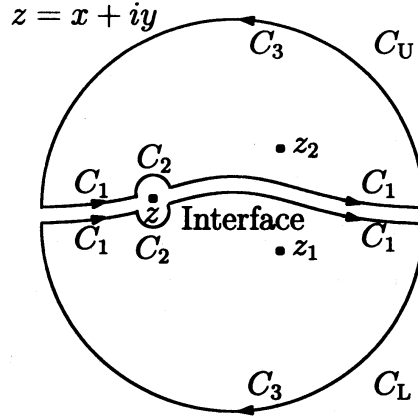


Fig. 2: Contours C_U and C_L for the complex integral leading to the extended Hilbert transform and the irregular points $z_{1,2}$ of $B(z)$ and $H(z)$.

ることができる．Hilbert 変換は，複素平面の上半面または下半面で解析的な関数 $f(z)$ の実部と虚部を，実軸 $z = x$ 上で互いの無限特異積分で関連付けている．解析性を界面上の量だけで考慮できるため，解析の効率を上げるのに有利であるが，磁性流体自由表面現象へ適用するためには，特異点としての磁極が領域内にあり，さらに界面形状を任意として構わないように拡張しておく必要がある．

Fig. 2 に示すように，界面に沿う経路 C_1 ，界面上の点 z を回避する半円 C_2 ，無限遠方半円 C_3 を合わせた閉積分路 C_U, C_L 上での複素積分

$$\oint_{C_U} \frac{dz'}{z' - z} \begin{pmatrix} B(z') \\ H(z') \end{pmatrix}, \quad \oint_{C_L} \frac{dz'}{z' - z} \begin{pmatrix} B(z') \\ H(z') \end{pmatrix} \quad (15)$$

の値は，もし $B(z), H(z)$ が C_U, C_L 内に特異点を持たなければ，Cauchy の積分定理により 0 となる．しかし特異点があれば，複素積分の値は， C_U, C_L 内にある特異点の留数の和で表される．(15) を C_1, C_2, C_3 ごとに分け，両

辺を πi で割れば,

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} B(z) \\ H(z) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} B^{(2)}(z) \\ H^{(2)}(z) \end{pmatrix} + \frac{1}{\pi i} \int \frac{dz'}{z' - z} \begin{pmatrix} B(z') \\ H(z') \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} B(z) \\ H(z) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} B^{(1)}(z) \\ H^{(1)}(z) \end{pmatrix} - \frac{1}{\pi i} \int \frac{dz'}{z' - z} \begin{pmatrix} B(z') \\ H(z') \end{pmatrix} \end{cases} \quad (16)$$

となる. 第1式は C_U , 第2式は C_L によるものである. ここで, 左辺が C_1 , 右辺第2項が C_2 からの寄与で, C_3 は落されている. 右辺第1項の $B^{(2)}(z)$, $H^{(2)}(z)$ は C_U 内にある特異点の留数の和, 同様に, $B^{(1)}(z)$, $H^{(1)}(z)$ は C_L からのもので, C_U 内の特異点が z_2 , C_L 内の特異点が z_1 だけのときは,

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} B^{(2)}(z) \\ H^{(2)}(z) \end{pmatrix} = - \lim_{z' \rightarrow z_2} \frac{z' - z_2}{z' - z} \begin{pmatrix} B(z') \\ H(z') \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} B^{(1)}(z) \\ H^{(1)}(z) \end{pmatrix} = - \lim_{z' \rightarrow z_1} \frac{z' - z_1}{z' - z} \begin{pmatrix} B(z') \\ H(z') \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (17)$$

のように求められる. たとえば, 4節の直線界面点磁極の場合には, (11) より

$$B^{(1)}(z) = -U(z) / \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right), \quad H^{(1)}(z) = \mu_1 U(z) / (\mu_1 + \mu_2) \quad (18)$$

となり, 対応する複素磁場が (10) より $f_1^{(1)}(z) = \mu_1 U(z)$ と求められる. この $f_1^{(1)}(z)$ は, 界面より下の z_1 で点磁極が与える既知の「外部磁場」である.

拡張された Hilbert 変換は, (16) 各式両辺の実部・虚部を取ったものであるが, 次節でさらに境界条件の組み込みを行なうので, ここではそれらの式は示さない. (16) の2本の式は, 磁極が界面より上だけにあれば第1式, 下だけにあれば第2式, と使い分ける. 上下両方にあるときは, 線形場であることを考慮して, 磁極が上だけ, 下だけの解を求めた後, 重ね合わせる.

7 Hilbert 変換式への境界条件の組み込み

6節では, $B(z)$, $H(z)$ の解析性を反映して, Hilbert 変換式 (16) を導いた.

一方、5節では、複素磁場の界面条件を、 $B(z)$ は界面に直交、 $H(z)$ は界面に平行、というより単純な境界条件に置き換えた。ここでは、Hilbert 変換式に界面条件を組み込んで、界面磁場 h_s, b_n を直接求める方程式を導き出す。

以下では、媒介変数 t ($-\infty < t < \infty$) を用いて、界面を $z = z(t)$ と表す。同様に、界面勾配角を $\theta = \theta(z(t)) = \theta(t)$ と表す。このとき、 $e^{i\theta(t)} = dz(t)/dt / |dz(t)/dt|$ 。磁極は界面より下にあるとして、(16) 第2式の両辺に $e^{i\theta(t)}$ をかけ、(13) より $C(t) = B(z(t))e^{i\theta(t)}$, $D(t) = H(z(t))e^{i\theta(t)}$ と置き換えると、

$$\begin{pmatrix} C(t) \\ D(t) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} B^{(1)}(z(t)) \\ H^{(1)}(z(t)) \end{pmatrix} e^{i\theta(t)} - \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt'}{t' - t} K(t', t) \begin{pmatrix} C(t') \\ D(t') \end{pmatrix} \quad (19)$$

が導かれる。ここで定義した

$$K(t', t) \equiv \frac{e^{i\theta(t)}(t' - t)}{z(t') - z(t)} \left| \frac{dz(t')}{dt'} \right| \quad (20)$$

は、界面形状が直線なら、 $z(t) = te^{i\theta}$, $\theta(t) = \text{定数}$ より $K(t', t) = 1$ となる。境界条件 $C_r = 0$, $D_i = 0$ を考慮して、(19) 第1式の虚部・第2式の実部を取れば、界面磁場方程式

$$\begin{pmatrix} C_i(t) \\ D_r(t) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \text{Im } B^{(1)}(z(t))e^{i\theta(t)} \\ \text{Re } H^{(1)}(z(t))e^{i\theta(t)} \end{pmatrix} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt'}{t' - t} \text{Im } K(t', t) \begin{pmatrix} C_i(t') \\ D_r(t') \end{pmatrix} \quad (21)$$

を得る。(21)はそれぞれ $C_i = b_n$, $D_r = -h_s$ で閉じていて、繰り返し法で互いに独立に解くことができる。右辺第1項には、「下半面の磁極からの外部磁場による合成場」 $B^{(1)}(z)$, $H^{(1)}(z)$ を与え、右辺第2項では、特異積分を行う代わりに、 $1/(t' - t)$ 以外の被積分量を基底関数で展開後、基底関数を入れ換える [4]。こうすれば、本格的な数値解析法に較べ、少ない負担で必要な精度まで界面磁場を求めることができる。 $\text{Im } K(t', t) = 0$ となる直線界面形状では、 $b_n, -h_s$ は $B^{(1)}(z)$, $H^{(1)}(z)$ 自身で表され、(8)を再現できる。

8 磁性流体自由表面解析への適用

磁性流体自由表面に関する安定性や波動などの解析には、磁場-流体結合発展方程式を用いる。これは、Flat Space $Z = X + iY$ から Real Space $z = x + iy$ への写像変換を前提に、自由表面上の力学的条件と運動学的条件を、界面勾配角 θ 、空間収縮率 τ 、Flat Space 内流速 (V_X, V_Y) 、Flat Space 内界面移動速度 (U_X, U_Y) など書き換えたもので、 $\theta(X, t)$ と $V_X(X, t)$ についての発展方程式となっている。

$$\begin{cases} \frac{\partial V_X}{\partial t} = -ge^{-\tau} \sin \theta + \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial}{\partial X} \left(e^\tau \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{1}{2\rho} T \right) \\ \quad - \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \frac{e^{2\tau}}{2} (V_X^2 + V_Y^2) \right\}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = (e^{2\tau} U_X) \frac{\partial \theta}{\partial X} - (e^{2\tau} V_Y) \frac{\partial \tau}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} (e^{2\tau} V_Y). \end{cases} \quad (22)$$

ここで、(22) 第 1 式の右辺各項は順に静圧・表面張力・磁気応力差・動圧に由来し、 g, γ, ρ は、重力加速度、表面張力係数、磁性流体密度である。磁気応力差 T には、前節で求めた h_s, b_n を (3) に用いる。

(22) の右辺は、(I) θ, V_X のほか、(II) τ, V_Y, U_X を未知量として含む。 Z の関数 $\theta + i\tau, V_X - iV_Y, e^{2\tau} U_X + ie^{2\tau} V_Y$ について、これらの Flat Space の上半面あるいは下半面における解析性に基つけば、実部から虚部に移す Hilbert 変換、あるいは虚部から実部に移す Hilbert 逆変換を用いて、(II) は (I) より求めることができる [4]。その結果、(22) は方程式系として閉じる。

定常解析では、 V_X, V_Y は 0 となるため、第 1 式左辺は 0、第 1 式右辺 2 行目と第 2 式は不要になり、第 1 式は、重力・表面張力・磁気力の釣り合いを θ, τ だけで表した方程式となる。

自由表面形状は、 θ が求まった後、Flat Space の界面上で積分を行い、媒介変数表示として求める。これにより、多価となるような形状も表現できる。

9 まとめと課題

磁性流体自由表面のように形状の複雑な界面近傍でも，Laplace 方程式と界面条件を満たす界面磁場を外部磁場から直接求めるため，合成場を導入し，その解析性に基づく Hilbert 変換式に界面条件を組み込んで，界面磁場方程式を導出した．これを解いて得られる界面磁場は，磁気応力差 T を通して磁場-流体結合発展方程式に取り込まれ，磁性流体自由表面現象の解析に用いられる．

界面磁場方程式は，繰返し法で容易に解けるが，他の方法と同様，界面の曲率が大きくなるにつれて収束のための工夫が必要となる．

Flat Space で既知として与える磁場がモデル的，という反省から，写像変換法を離れ，界面磁場方程式を導いた．しかしそのために導入した合成場に対する， $B(z)$ は界面に直交， $H(z)$ は界面に平行，という境界条件は，写像変換法の再導入ができることを示している．

複素磁場を用いると，解析が 2 次元に限定されそうであるが，本稿の解析法を 3 次元に拡張することは，可能と思われる．

参考文献

- [1] R.E.Zelazo and J.R.Melcher: Dynamics and stability of ferrofluids: surface interactions; J. Fluid. Mech., **39**, p.1 (1969).
- [2] V.G.Bashtovoi and R.A.Foigel': Solitary and cnoidal waves in ferrofluid; Magn. Gidrodin., **19**, p.55 (1983).
- [3] S.K.Malik and M.Singh: Modulational instability in magnetic fluids; Q. Appl. Math., **43**, p.57 (1985).
- [4] 水田 洋: 磁性流体自由表面の非線形波動解析における解析性; 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象のメカニズムと数理」, **1209**, p.46 (2001).