

可移平面に関する種々の問題について

大阪大学教養部 平峰 豊 (Yutaka Hiramine)

有限射影平面の位数は素数中であらうと予想されているがその根拠の一つは Veblen & Young の定理——3次元以上の射影幾何は Desarguesian となる——である。つまり3次元以上の時と同じく2次元(=射影平面)の時も Desarguesian に近い性質をもち、それが位数に反映されているであらうということである。

現在までに構成された非常に多くの射影平面の実例の中に反例は全くなかったわけであるが、しかしこのことは、上記定理と同程度の意味ではこの予想に根拠を与えていないと思われる。その理由は、構成法が有限体やその類似のものを基礎にしていたことや既知の実例を用いてその変形によるものであったこと等のために位数が素数中になるのは必然であったからである。(位数を計算してみても初めて素数中であることが判明したという例が全くないという意味で。)

一方、実例の大部分は射影平面の内部構造であるアフィン

平面として構成され、しかもその多くのものはアフィン点全体の上に可移に作用する自己同型群をもつ平面(可移平面)であるかまたはその変形である。可移平面に関して、その位数や perspectivity があるかないかということや対応する ternary ring の性質などを調べることも古くから問題として考えられて様々な結果が得られてきた。([9]) 現在までに得られた実例や示された多くの定理は、少なくとも可移平面ならその位数は素数中であろうという予想([9]16章)に十分な理由を与えているように思う。実際に自己同型群の可移性は perspectivity が多く存在するように働くようであるし(特別な条件のもとでは正しいことが証明されている)、perspectivity が多いほど平面を座標付けする ternary ring として有限体により近いものを選べる傾向があることも事実である。([8]6章§9) しかし可移自己同型群がアーベル群の場合についてもまだ位数が素数中となるかどうか分かっていないのが現状である。

以下では、可移平面に関して最近得られた結果や、残されている問題などについて述べる。

§1. 可移平面

有限なアフィン平面 $\pi = \pi(q, k)$ が 可移平面 であるとは、 π のある自己同型群 (collineation group) G で、アフィン点、

全体の集合 $\mathcal{P}$ 上に可移に作用するものが存在することという。

アフィン平面は直線の平行類に対処して無限遠点と無限遠直線 l_∞ をつけ加えることにより射影平面とみることができ、アフィン平面の collineation (自己同型) は対応する射影平面の collineation とみることができ、アフィン平面 π の collineation σ が perspectivity であるとは σ が $L \cup l_\infty$ のある直線上のすべての点を固定することという。この直線のことを σ の 軸 ということ。このとき一点 $P \in \mathcal{P} \cup l_\infty$ があって σ は P を含むすべての直線を固定することが知られている。点 P を σ の 中心 ということ。軸が l_∞ で中心が l_∞ 上にあるような perspectivity を π の translation といふ。可移平面においてとくに重要な概念である。collineation group G の元で点 Q を中心とし g を軸とするものの全体を $G(Q, g)$ と書く。これは G の部分群となる。また $G(g, g) = \bigcup_{Q \in g} G(Q, g)$ も G の部分群となる。(以上の基本的性質は [9] 4章参照)

$T = (\text{Aut } \pi)_{(l_\infty, l_\infty)}$ が $\mathcal{P}$ 上可移のとき π を translation plane, T を π の translation group ということ。このときは、 T はある素数 p に対して基本可換 p -群で $\mathcal{P}$ 上正則に作用する。translation plane を変形して translation plane でない可移平面が構成される場合もある。(dual translation plane, derived dual translation plane [9] 6章7章) 知られている可移

平面は以上の三種のいずれかに属している。可移平面に関して、いろいろなことが予想されている(たとえば[9]16章後半)が、とくに次のものが興味ある予想である。

予想 1. 可移平面の位数は素数巾である。

予想 2. 可移平面の可移群を G とするとき ℓ_∞ 上の点 P を適当に選べば $|G(P, \ell_\infty)|$ はこの平面の位数に一致する。

可移平面 π の位数を n , 可移群を G , アフィン点の一つを Q とし $H = G_Q$ とおく。明らかに $G \neq H \geq 1$ であるが、二つの極端な場合—— H が G の極大部分群 又は $H = 1$ ——について考えるのが、この目的である。

§2 $H = 1$ の時 及び planar function

G がアーベル群であるときは次のようなことが知られている。
(1952. Hoffman [7]) $n > 2$ ならば G は巡回群でない。

(1965. Dembowski [1]) $G = G(\ell_\infty, \ell_\infty)$ (従って π は translation plane) か 又は ある点 $Q \in \ell_\infty$ に対して $|G(Q, \ell_\infty)| = n$ かつ $G(Q, \ell_\infty) = G(\ell_\infty, \ell_\infty)$

(1976. Ganley [3]) n が偶数ならば n は 2 の冪である。

Dembowski の結果は、 G がアーベル群の時 予想 2 が正しいことを示し、Ganley の結果は、アーベル群の時、予想 1

が正しいことを示している。

Dembowski と Ostrom は [2] において、予想 2 が成りたつかつ $G_{(p, l_n)}$ が G の直積因子 ($G = S \times T$, $T = G_{(p, l_n)}$) であると仮定したとき、 S から T への特殊な関数が存在することを示し、これを planar function と呼んだ:

S, T を位数 n の任意の群 (アベル群でなくてもよい) とし f を S から T への関数とする。任意の $u \in S$ に対して

$$f_u : \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & T \\ x & \longmapsto & f(xu)f(x)^{-1} \end{array}$$

により f_u を定める。

f が S から T への planar function であるとは、すべての f_u ($u \in S, u \neq 1$) が 1 対 1 の関数であることを言う。

S から T への planar function が存在すれば、位数 $|S| (=|T|)$ のアフィン平面で $S \times T$ を可移な collineation group としてもつものが構成される。([2] §5)

ここで S から T への planar function が存在するための必要条件をのべる。

補題 $n (=|S|=|T|)$ 変数 $\{x_t \mid t \in T\}$ に関する次の連立方程式は非負整数解をもつ。

$$(i) \quad \sum_{t \in T} x_t = n$$

$$(ii) \quad \sum_{t \in T} x_t^2 = 2n - 1$$

$$(iii, v) \quad \sum_{t \in T} x_t x_{tv} = n - 1 \quad (\forall v \in T^\# = T - \{1\})$$

注: tv は T 内での積

(証明) $M_t = \{(a, b) \in S \times S \mid a \neq b, f(a)f(b)^{-1} = t\} \quad (t \in T)$

とあるとき、 $|M_t| = n-1$ が成り立つことをまず示す。

$M_t = \{(a_i, b_i) \mid 1 \leq i \leq r\}$, $N_t = \{a_i b_i^{-1} \mid 1 \leq i \leq r\}$ とおけば

$|M_t| = r \geq |N_t|$. あるいは i, j に対して $a_i b_i^{-1} = a_j b_j^{-1} (= u)$

が成り立つとは $a_i = u b_i$, $a_j = u b_j$. 従って $f_u(b_i)$

$= f(u b_i) f(b_i)^{-1} = f(a_i) f(b_i)^{-1} = t$ である。同様に $f_u(b_j)$

$= t$. f_u は 1:1 であるので $b_i = b_j$ が成り

立つ。 $a_i b_i^{-1} = a_j b_j^{-1}$ に代入して $a_i = a_j$ とおきか

$i = j$ が分かる。このことは $|N_t| = r$ を意味する。明

かに $1 \notin N_t$ 故。 $r = |N_t| \leq n-1$. また $x, y \in T$ で

$x \neq y$ ならば $M_x \cap M_y = \emptyset$ であるから $|\bigcup_{t \in T} M_t| \leq (n-1)n$.

一方では $|\bigcup_{t \in T} M_t| = |\{(a, b) \in S \times S \mid a \neq b\}| = n^2 - n$ は明らか

であるから、これが成り立つためには $|M_t| = n-1$ がすべての

$t \in T$ に対して同時に成り立つ必要がある。

さて $\chi_t = |\{s \in S \mid f(s) = t\}|$ とおくと補題の(i)は自明。

また $|M_1| = \sum_{t \in T} \chi_t (\chi_t - 1) = \sum_{t \in T} \chi_t^2 - \sum_{t \in T} \chi_t$ であるから、

(i)を用いて $\sum_{t \in T} \chi_t^2 = n-1 + n = 2n-1$. 従って (iii) が

成り立つ。最後に $v \in T$, $v \neq 1$ を任意にとり

$\sum_{t \in T} \chi_t \chi_{tv} = |\{(a, b) \in S \times S \mid f(a)f(b)^{-1} = v\}| = |\{(a, b) \in S \times S \mid$

$f((a v^{-1})b) f(b)^{-1} = v\}| = |\{(a, b) \mid f_{a v^{-1}}(b) = v\}|$

$= |\{(\omega, b) \in S^* \times S \mid f_\omega(b) = v\}| = n-1$. 故に (iii) も成り立つ。

次の命題は新しいものではないが, Baer の定理 (cf. [9] の定理 4.4) を用いないでできることを注意しておきたい。

命題 S から T への planar function が存在すれば,
 S (従って T) の位数は奇数である。

(証明) 補題の (i) (ii) より $n-1 = \sum_{t \in T} \chi_t(\chi_t-1) \equiv 0 \pmod{2}$

n が素数 ($n=|S|=|T|$) の時は S, T を $GF(n)^+$ と同一視して f が 2 次式で書けると予想されていた ([9] 16 章) が、正しいことが示された。

定理 ([4], [5]) n が素数の時は $GF(n)^+$ から $GF(n)^+$ への planar function f は $f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a, b, c \in GF(n)$, $a \neq 0$) の形に書ける。

知られている planar function の場合 S 及び T は基本可換群である。この場合は S, T を $GF(n)^+$ と同一視すると次の形に書けることが直接確かめられる。

$$f(x) = \sum_{m=0}^{e-1} a_m x^{p^m} + ax^2 + b$$

(ただし $n = p^e$, $S \cong T \cong GF(n)^+$)

〈問題〉 $S = T = GF(n)^+$, $n = p^e$ のとき S から T への planar function f は $f(x) = \sum_{m=0}^{e-1} a_m x^{p^m} + ax^2 + b$ の形か?

予想 1 の特殊な場合であるが、次の問題も興味をひく。

〈問題〉 T がアベル群のとき n は素数か?

§3 H が極大部分群のとき

H が極大部分群のとき予想 1, 2 が成りたつかどうかということに関していままで得られている結果の主なものは次の通りである。 ([9] 15章)

(1959, Ostrom-Wagner [12]) n が偶数ならば π は translation plane である。

(1966, Keiser [11]) $\sqrt{n}$ が整数でないか又は $\sqrt{n} \not\equiv 1 \pmod{4}$ ならば π は translation plane である。

(1966, Keiser [11]) G が自明でない perspectivity を含めば π は translation plane である。

H が極大部分群であるから G の極小正規部分群を N とすれば N は同型な単群 (素数位の群も含めて) の直積であり ϕ 上に可移に作用する。 N がアーベル群の時は N は ϕ 上正則故 §2 で述べた Dembowski の結果が適用されて perspectivity ($\neq 1$) を含むから上の Keiser の定理よりこのとき π は translation plane となる。従って N が同型な非可換単群の直積のときを考えればよいから collineation として位数 2 の元が特殊である (Baer の定理) であることなどを用いて N 自身が非可換単群のときを考えればよいことが分かる。分類定理及び Kantor の結果 ([10]) を用いて

交代群, Lie 型の群, Sporadic simple groups にそれぞれ分けて

調べることにより、次の定理が成り立ち、従って H が極大の時は、予想 1, 2 とともに正しいことが分かる。

定理 ([6]). アフィン平面 π の collineation group G が点上原始的に作用すれば π は translation plane である。とくに π の位数はある素数 p の中である。

文 献

- [1] P. Dembowski : Gruppentheoretische Kennzeichnungen der endlichen desarguesschen Ebenen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 29, 92-106 (1965)
- [2] P. Dembowski & T. G. Ostrom : Planes of order n with collineation groups of order n^2 , Math. Z. 103, 239-258 (1968)
- [3] M. J. Ganley : On a paper of Dembowski and Ostrom, Archiv der Math. 27, 93-98 (1976)
- [4] D. Gluck : A note on permutation polynomials and finite geometries, preprint
- [5] Y. Hiramine : A conjecture on affine planes of prime order, to appear in J.C.T.

- [6] Y. Hiramine : Affine planes with primitive collineation groups, preprint
- [7] A.J. Hoffman : Cyclic affine planes, *Canad. J. Math.* 4, 295-301 (1952)
- [8] D.R. Hughes & F.C. Piper : Projective planes, Springer-Verlag, 1970
- [9] M.J. Kallaher : Affine planes with transitive collineation groups, North Holland, 1982
- [10] W.M. Kantor : Primitive permutation groups of odd degree and an application to finite projective planes, *J. Alg.* 106, 15-45 (1987)
- [11] V.M. Keiser : Finite affine planes with collineation groups primitive on the points, *Math. Z.* 92, 288-294 (1966)
- [12] T.G. Ostrom & A. Wagner : On projective and affine planes with transitive collineation groups, *Math. Z.* 71, 186-199 (1959)