

数理解析レクチャー・ノート 2.

P^3 内の曲線の分類と, 関連した話題

ロビン・ハーツホーン 講

1977年3月

数理解析レクチャー・ノート刊行会

目次

Introduction.	1
§ 0. 準備	4
§ 1. $\mathbb{P}^3$ 中の curve の分類	18
§ 2. いくつかの surface 上の curves	31
§ 3. $\mathbb{P}^3$ に含まれない curves についての定理	43
§ 4. smooth deformation を持たない curve	56
§ 5. $\mathbb{P}^3$ 上の curve の liaison について	61

$\mathbb{P}^3$ 内の曲線の分類と, 関連した話題

ロビン・ハーツホーン 講

ノート作製

石田正典・佐藤榮一

Classification of curves in $\mathbb{P}^3$ and related topics

Introduction

The purpose of this seminar was to study the classification of curves in $\mathbb{P}^3$, and look for applications to a) subvarieties of codimension two in $\mathbb{P}^n$, and b) vector bundles of rank two on $\mathbb{P}^n$ for $n \geq 3$. In particular, we hoped to read the long papers of Max Noether [10] and G. Halphen [4] from the year 1882, to see what their results were, and find modern proofs for them. We succeeded only partially.

Of course, curves are classified first by the numerical invariants d =degree, and g =genus. After that, for fixed d , g , one knows from the theory of the Chow variety or the Hilbert scheme, that the curves with given d , g form a finite number of irreducible algebraic families. Ideally, one would like to know which values of d and g occur, and then the structure of the families of those curves.

Already a non-trivial problem is to determine for which ordered pairs $\langle d, g \rangle$ there exists an irreducible non-singular curve X of degree d and genus g in $\mathbb{P}^3$. We spent a fair amount of time on this question. We can summarize the results as follows.

- a) We always have $d > 0$, $g \geq 0$.
- b) If X is a plane curve $g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$.
- c) If X does not lie in a plane, then

$$g \leq \begin{cases} \frac{1}{4}d^2 - d + 1 & \text{if } d \text{ even} \\ \frac{1}{4}(d^2-1) - d + 1 & \text{if } d \text{ odd} \end{cases}$$

Furthermore, the maximum is attained for each d , and in that case X necessarily lies on a quadric surface.

d) If X lies on a quadric surface, then for some $0 < a < d$, we have $g = ad - a^2 - d + 1$, and for each such a , there is an irreducible non-singular X .

In addition to these results, we have some information about small values of d and g , and about curves lying on a non-singular cubic surface. This does not yet completely answer the question of which $\langle d, g \rangle$ occur. There are two further statements in Halphen's book, which taken with the above would provide a complete answer, but we were not able to understand Halphen's proof nor find a new proof of our own. They are

e) If X does not lie on a quadric surface,
then

$$g \leq \frac{1}{6}(d-1)(d-2) + \frac{2}{3}.$$

f) If $\langle d, g \rangle$ satisfies the inequality of e), with $d \geq 1$ and $g \geq 0$, then there exists an irreducible non-singular curve X of degree d and genus g on a cubic surface.

The matters, along with some preliminaries and related results, occupy the first 4 sections of the notes.

The fifth section is independent. It gives some examples of curves which have no smooth deformation in various senses (examples due to Mumford, Peskine and Szpiro, and Hartshorne). It still seems to be unknown whether every reduced irreducible curve in $\mathbb{P}^3$ has a smooth deformation in $\mathbb{P}^3$.

Sections 6 and 7 deal with the notion of liaison studied by Peskine and Szpiro [11]. In particular, we discuss the equivalence relation on

the set of curves in $\mathbb{P}^3$ generated by liaison, and the connection with vector bundles of rank 2 on $\mathbb{P}^3$.

It is my pleasure to thank all the participants of the seminar for their interest and support. And especially I would like to thank M. Maruyama for organizing the seminar, and M. Ishida and E. Sato for writing such clear notes from my disorganized lectures.

Robin Hartshorne
Kyoto
March 17, 1976

[section number にずれのあることをおわびしま
す。 "section 6 and 7" は本文では §5 とな、てい
ます。 (石田)]

§0. 準備

k は常に algebraically closed field とする。

< Def. 0.1 > k 上 finite type な 1-dimensional separated scheme を curve と呼ぶ。curve X が k 上 proper なとき、 X は complete であるという。

< Def. 0.2 > X を complete curve とするとき、 X の arithmetic genus $= P_a$ を、 $P_a = 1 - \chi(\mathcal{O}_X)$ で定義する。但し $\chi(\mathcal{O}_X)$ は $\mathcal{O}_X$ の Euler Poincaré char. (i.e. $\chi(\mathcal{O}_X) = h^0(X, \mathcal{O}_X) - h^1(X, \mathcal{O}_X)$)

X が nonsingular (smooth/ k) のとき、 P_a は単に genus といわれ、又 X が integral (irreducible かつ reduced) のとき、 $h^0(X, \mathcal{O}_X) = 1$ だから、 $P_a = h^1(X, \mathcal{O}_X)$ である。

この後この § では特に断わらない限り curve は complete nonsingular integral なものとする。

< Def. 0.3 > X を curve としたとき、 X の closed point 全体を free basis とする $\mathbb{Z}$ -module の元を、 X の divisor と呼ぶ。すなわち X の divisor D は finite sum $\sum n_i P_i$ ($n_i \in \mathbb{Z}$ $P_i \in X$) の形に書ける
そのとき deg $D = \sum n_i \in \mathbb{Z}$ とおく。

divisor $D = \sum n_i P_i$ が、任意の i について $n_i \geq 0$ のとき、 D は effective であるといい、 $D \geq 0$ と書く。

function field $K = K(X)$ の元 $f \neq 0$ に対し、 f の divisor (f) を $(f) = \sum v_P(f) P$ で定義する。但し P は X のすべての closed point を動き、 v_P は、 P に対応する K の valuation とする。

< Prop 0.1 > $f \neq 0$ を $K(X)$ の任意の元とするとき、 $\deg(f) = 0$ となる。

証明は Serre [15] Ch II 参照

< Def 0.4 > curve X の divisor D_1, D_2 に対し、 K の元 $f \neq 0$ で $D_1 - D_2 = (f)$ となるものが存在するとき、 D_1 と D_2 は linearly equivalent であるといい、

$D_1 \sim D_2$ と書く

集合 $\{D' \mid D' \geq 0, D' \sim D\}$ を、 D の complete linear system と呼び、 $|D|$ と書く

X を curve とし $\mathcal{L}$ をその上の invertible sheaf (locally free $\mathcal{O}_X$ -module rank 1) としたとき、 $\mathcal{L}$ の

nonzero な section $s \in H^0(X, \mathcal{L})$ に対し s の zero divisor を次のように定義することができる。

X の各 closed point P に対し $\mathcal{L}_P$ は free $\mathcal{O}_P$ module rank 1 であるから, isomorphism $\mathcal{L}_P \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_P$ が作れるが.
 $s_P \mapsto \bar{s}$ としたとき, $N_P(s) = v_P(\bar{s})$ とおく。
 そこで,

< Def 0.5 > s の zero divisor $= (s)_0 = \sum_{P \text{ closed point of } X} N_P(s) P$

定義から明らかに $(s)_0 \geq 0$ である。

< Prop 0.2 >

- 1) $H^0(X, \mathcal{L}) \ni \forall s, s' \neq 0$ に対し $(s)_0 \sim (s')_0$.
- 2) $\forall D$ effective divisor に対し, もし $D \sim (s)_0$ なる $s \in H^0(X, \mathcal{L})$ があれば, $(s')_0 = D$ なる $s' \in H^0(X, \mathcal{L})$ が存在する。
- 3) $H^0(X, \mathcal{L}) \ni s, s' \neq 0$ に対し $(s)_0 = (s')_0 \iff \exists \lambda \in k^*, s = \lambda s'$

証明 略

また $\left\{ \frac{\text{divisors}}{\text{linearly equivalence}} \right\}$ と $\left\{ \frac{\text{invertible sheaf}}{\text{isom}} \right\}$

は自然に 1 対 1 に対応する。このことと Prop 0.7 により
 $|D| \cong (H^0(X, \mathcal{L}) - \{0\}) / \mathbb{R}^*$ となる。つまり $|D|$
 は projective space と考えられる。

< Def 0.6 > curve X の divisor の集合 $\mathcal{D}$
 が、ある divisor D に対し $|D|$ の linear subspace とな、て
 いるときに $\mathcal{D}$ を linear system という。

Example 0.1 X を $\mathbb{P}^n$ に含まれる curve とし、
 H を $\mathbb{P}^n$ の hyperplane とする。 $H \not\supset X$ のとき、 $H \cap X$
 (重複度も考える) は X の divisor である。このような
 divisor 全体は次の Prop により linear system をなす。

< Prop 0.3 > $\mathcal{D} = \{ D = H \cap X \mid H \not\supset X \}$ は、
 linear system である。

Proof) $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(1)$ とすれば、 $X \xrightarrow{i} \mathbb{P}^n$
 に対応する linear map $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1)) \xrightarrow{i^*} H^0(X, \mathcal{L})$
 が定まるが、 $\mathcal{D}$ は $\text{Im } i^*$ に対応する $|H \cap X|$ の

linear subspace である

q.e.d.

< Def 0.7 > P を X の点、 $\mathcal{L}$ を linear system とするとき、 $\mathcal{L}$ の任意の D に対し $\text{supp } D \ni P$ となるとき、 P を $\mathcal{L}$ の base point という。また、 $\mathcal{L}$ が base point を持たないとき、base point free であるという。

Prop 0.3 の $\mathcal{L}$ は base point free になる。

< Thm 0.1 > X を curve $\mathcal{L}$ base point free to linear system とするとき、morphism

$\varphi: X \longrightarrow \mathbb{P}^n$ ($n = \dim \mathcal{L}$: proj. space の次元)
が存在し、 $\mathcal{L} = \varphi^* \{ |H| \} = \{ \varphi^*(H \cap \varphi(X)) \}$ となる。

Proof) $\mathcal{L}$ が $\mathcal{O}_X$ $\forall V \subseteq H^0(X, \mathcal{L})$ に対応している
とすると、 $\dim V = n+1$ で、 $s_0, \dots, s_n$ を V のある
basis とするとき φ を、

$$\begin{array}{ccc} \varphi: X & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & \longmapsto & (s_0(x), \dots, s_n(x)) \end{array}$$

と定義すればよい。

q.e.d.

< Thm 0.2 > X を curve $\mathcal{L}$ を linear system とするとき.

(1) $\mathcal{L}$: base point free

$$\iff \forall P \in X \text{ に対し } \dim(\mathcal{L}-P) = \dim \mathcal{L} - 1$$

$$\text{但し } \mathcal{L}-P = \{D-P \mid D \in \mathcal{L} \text{ } P \in \text{supp } D\}$$

(2) $\mathcal{L}$: base point free かつ Thm 1 の φ が closed immersion

$$\iff \forall P, Q \in X \text{ (} P=Q \text{ も含め} \text{)} \text{ に対し}$$

$$\dim(\mathcal{L}-P-Q) = \dim \mathcal{L} - 2$$

Proof) (1) 明らか

(2) $\Rightarrow$ $P \neq Q$ のとき P を含み Q を含まない.

hyperplane H ($X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ としたの) をとれば

$H \cap X - P \in \mathcal{L}-P$ は $\text{supp}(H \cap X - P) \not\ni Q$ よって

$$\dim(\mathcal{L}-P-Q) = \dim(\mathcal{L}-P) - 1, \text{ (1) より}$$

$$\dim(\mathcal{L}-P) = \dim \mathcal{L} - 1 \text{ よって } \dim(\mathcal{L}-P-Q) = \dim \mathcal{L} - 2.$$

$P=Q$ のとき P で重複度1で交わる H を.

とれば $\text{supp}(H \cap X - P) \not\ni P$ よって $\dim(\mathcal{L}-P-Q)$

$$= \dim(\mathcal{L}-P) - 1 = \dim \mathcal{L} - 2$$

$\Leftarrow$ 明らかに base point free $P \neq Q$ のとき

条件は $\text{supp } D \ni P, \text{supp } D \not\ni Q$ なる $D \in \mathcal{D}$ の存在を示し. これより ψ は injection. $P=Q$ のときは,

$\text{supp } D \ni P, \text{supp } (D-P) \not\ni P$ なる $D \in \mathcal{D}$ の存在を示し. これより P の tangent space は ψ により injection. よって ψ は closed immersion となる.

q. e. d.

$\Omega^1_{X/k}$ を X/k の sheaf of 1 dimensional forms. とすれば. X が nonsingular curve のとき $\Omega^1_{X/k}$ は.

invertible sheaf となる. これを ω_X と書き.

canonical sheaf と呼ぶ. また K を ω_X に対応する一つの divisor とし $|K|$ を canonical linear system という.

X が必ずしも nonsingular でない curve のとき. U を X の affine open で $\mathbb{A}^n$ の closed subvariety と考えたとき. $\omega_U = \text{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}}^{n-1}(\mathcal{O}_U, \omega_{\mathbb{A}^n})$ とおく 但し $\omega_{\mathbb{A}^n} = \wedge^n(\Omega^1_{\mathbb{A}^n/k})$. これを貼り合わせて coherent sheaf ω_X を作る. これは Grothendieck's dualizing canonical sheaf と呼ばれるものである. X が locally Gorenstein (たとえば, locally complete intersection) であれば, ω_X は invertible sheaf となる. また, X が nonsingular curve のとき, ω_X の二つの定義は同じである. くわ

しくは [5] 参照.

divisor D に対応する invertible sheaf を $\mathcal{L}$ としたとき $h^0(X, \mathcal{L})$ を $h^0(D)$ と書く. 同様に $h^1(X, \mathcal{L})$ を $h^1(D)$ と書く.

<Thm 0.3> (Riemann-Roch)

$$i) \quad h^0(D) - h^1(D) = \deg D + 1 - g$$

$$ii) \quad h^1(D) = h^0(K - D) \quad (\text{duality})$$

証明略

$$\langle \text{Cor} \rangle \quad \deg K = 2g - 2$$

Proof) Thm より $h^0(K) - h^1(K) = \deg K + 1 - g$ であるが $h^0(K) = h^1(X, \mathcal{O}_X) = g$, $h^1(K) = h^0(X, \mathcal{O}_X) = 1$ だから $g - 1 = \deg K + 1 - g \therefore \deg K = 2g - 2$

Q.E.D.

<Def 0.8> $h^1(D) \neq 0$ のとき divisor D は special であるといひ $h^1(D) = 0$ のとき non-special であるという。

<Thm 0.4> (Clifford) divisor D が special であるとき不等式

$$\dim |D| \leq \frac{1}{2} \deg D$$

が成り立ち. さらに等号の成り立つのは. 次のいずれかであ

る。

$$I \quad D \sim 0$$

$$II \quad D \sim K$$

III X は hyperelliptic で $D = r \cdot E$, $r = 0, \dots, g-1$
但し E の定義は下記

証明略 [12]

< Def 0.9 > degree 2 の morphism $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$
の存在する genus ≥ 2 の curve X を hyperelliptic
という。 ($\mathbb{P}^1 \ni P$ に対し $\varphi^{-1}(P) = E$ とおく。この
とき $\deg E = 2$ であり X : non-rational だから
 $\dim |E| = 1$ となる。)

< Prop 0.4 > curve X が hyperelliptic である
とき i) $\deg E = 2$ ii) $\dim |E| = 1$ iii) $K = (g-1)E$ なる
divisor class $E/\sim$ が唯一存在する。

証明略

< Thm 0.5 > X を curve で $g \geq 3$ かつ hyper
elliptic でないとするとき K は very ample となる。
 K による closed immersion $X \hookrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ を canonical
embedding という。

証明略

< Thm 0.6 > (Bertini) X を $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ の non-singular

closed subvariety とする。そのとき十分一般な $H \in \mathbb{P}^n$ hyperplane* に対し $X \cap H$ non-singular となる。さらに X が connected で $\dim X \geq 2$ ならば $X \cap H$ も connected となる。

* 十分一般な H とは hyperplane のなす complete linear system $|H|$ の Zariski open set $U \subset |H|$ があり、 U の closed point に対応する hyperplane のこと。

Proof) $r = \dim X$ とする。 X の closed point x に対し $B_x = \{ H \mid H \text{ hyperplane } H \ni x \text{ s.t. } H \cap X \text{ singular at } x \}$ とおく。 $f_0 \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_U)$ を $x \in (f_0)$ となるものに fix し k -linear map φ を

$$\begin{array}{ccc} \varphi: \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) & \longrightarrow & \mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_x^2 \\ \downarrow f & \longmapsto & \overline{f/f_0} \end{array}$$

で定義する。 $\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ の次元は $n+1$ で $\mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_x^2$ の次元は $r+1$ φ は surjection であるから $\dim \ker \varphi = n-r$ 一方 $\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \ni f \neq 0$ に対応する hyperplane が B_x に属することと $\overline{f/f_0} = 0$ つまり $f \in \ker \varphi$ は同値であるから B_x は linear system でその次元は $n-r+1$ である。

$B = \bigcup_{x \in X} B_x \subset X \times |H|$ は closed set で X への projection の各 fibre の次元は $n-r-1$ であるから、 B の次元は $n-1$ であり、 $|B|$ の $|H|$ への projection の image

も高々 $n-1$ 次元 $|H|$ から B の image を除いた部分を
 U とすれば $\forall H \in U$ に対し $H \cap X$ non-singular とな
 る。 さて $\dim X \geq 2$, X connected のときは $Y =$
 $X \cap H$ $\mathcal{I}_Y$ を Y の ideal ($\mathcal{I}_Y \simeq \mathcal{O}_X(-1)$) とし、
 Y_v を $\mathcal{I}_Y^v$ で決まる X の closed subscheme とする。
 このとき

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-v) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{Y_v} \rightarrow 0$$

より

$$H^0(\mathcal{O}_X) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{Y_v}) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X(-v))$$

$$H^0(\mathcal{O}_X) \simeq k \text{ であり } \dim_k H^1(\mathcal{O}_X(-v)) = \dim_k H^{r-1}(\omega_X(v))$$

$$r-1 \geq 1 \text{ だから } v \gg 0 \text{ のとき } \dim_k H^{r-1}(\omega_X(v)) = 0$$

$$\therefore \dim_k H^0(\mathcal{O}_{Y_v}) \leq 1 \text{ よって } Y_v \text{ は connected } Y \text{ と}$$

$$Y_v \text{ は同じ base space を持つから } Y \text{ は connected}$$

Q.E.D.

<Prop 0.5> X を genus g の curve D を divisor
 として degree $D = d$ とするとき $d > 2g$ ならば $|D|$ は very
 ample である。

Proof) $\forall P \in X$ に対し R-R Thm により

$$h^0(D) = d + 1 - g + h^1(D)$$

$$h^0(D-P) = (d-1) + 1 - g + h^1(D-P)$$

$$h^1(D) = h^0(K-D), \quad h^1(D-P) = h^0(K-D+P)$$

であるが $\deg K = 2g - 2$, $\deg D \geq 2g + 1$ だから $h^1(D) = h^1(D - P) = 0$ よ, 2

$$\dim(|D| - P) = h^0(D - P) - 1 = h^0(D) - 2 = \dim |D| - 1$$

Thm 0.2 より $|D|$ base point free となる。さらに

$\forall Q \in X$ に対し $\deg(D - P - Q) \geq 2g - 1$ よ, 2

$$h^1(D - P - Q) = h^0(K - D + P + Q) = 0, \quad h^0(D - P - Q) = (d - 2) + 1 - g \quad \text{ゆえに}$$

$$\dim(|D| - P - Q) = \dim |D| - 2$$

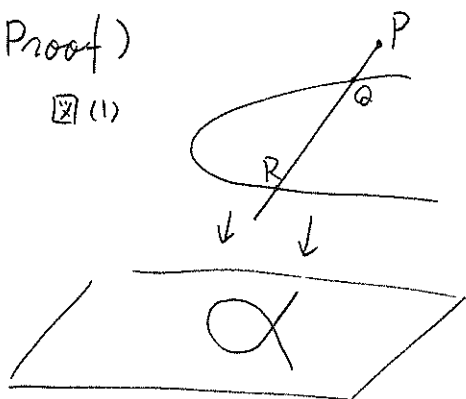
となるから Thm 0.2 より $|D|$ very ample

Q.E.D.

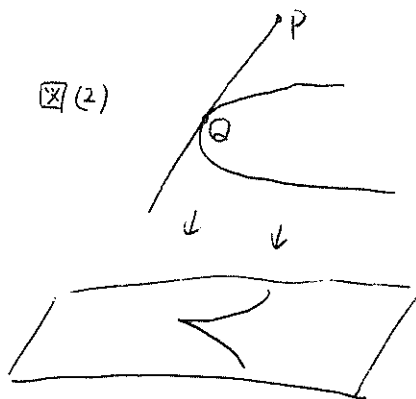
<Lemma 0.1> V を $\mathbb{P}^n$ に含まれる r 次元 non-singular variety とするとき $n > 2r + 1$ であれば $\mathbb{P}^n$ の点 P で P からの projection $\pi: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ による $V \rightarrow \pi(V)$ が isomorphism となるものが存在する。

Proof)

図(1)



図(2)



図(1)のように V の点 Q, R を含む line の上に P があるとき Q, R は π により同じ点にうつる。また図(2)のように V の点 Q のある接線上に P があるとき Q の tangent space の π による写像は injection でなくなる。そこで

$$\overline{\bigcup_{P, Q \in V} (\text{line } PQ)} \subseteq \mathbb{P}^n$$

を考えるとこれは高々 $2r+1$ 次元であり $n > 2r+1$ であるから、これに含まれない点 P をとればよい。

Q. E. D.

この Lemma の projection で $\mathcal{O}_V(1)$ は不変だから curve X の divisor D が very ample のとき $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ にこの Lemma を繰り返し適用して degree d の closed immersion $X \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ で $H \cap X \sim D$ となるものが存在する。特に X genus g の curve D degree d の divisor で $d > 2g$ ならば degree d の closed immersion $X \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ で $H \cap X \sim D$ となるものがある。

Example 0.2 $\mathbb{P}^2 \supset X$ curve (non-singular でなくてもよいが embedd component を持たない) $\deg X = d$ とすると X の ideal $\mathbb{K}[X_0, X_1, X_2] \supset I_X$ は

はある degree d の homogeneous element $f \in I_X = (f)$ となる。 $P_a(X)$ を求めよう。 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ -module の exact sequence

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_X \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

において $\mathcal{I}_X \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-d)$ であるから $\chi(\mathcal{O}_X) = \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) - \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-d))$ $\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) = 1$, $h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-d)) = 0$, $h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-d)) = 0$, $h^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-d)) = h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3+d)) = \binom{-3+d+2}{2} = \binom{d-1}{2}$ よって $\chi(\mathcal{O}_X) = 1 - \binom{d-1}{2}$

$$P_a(X) = \binom{d-1}{2} = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$$

となる。

§ 1. $\mathbb{P}^3$ 中の curve の分類

この § の目標は $\mathbb{P}^3$ 中の curve の分類. 特に集合

$$\mathcal{C} = \left\{ \langle d, g \rangle \mid \begin{array}{l} \exists X \text{ n.s. curve } \subseteq \mathbb{P}^3 \\ \deg X = d \text{ genus } X = g \end{array} \right\}$$

を知ることにある。しかしこの集合を完全に決定することは困難である。

この集合を調べるとすると、次の二通りの結果が考えられる。

1) $\mathcal{C}$ を限るような結果

2) ある $\langle d, g \rangle$ に対し、 X が存在するという結果

たとえば) については $\langle d, g \rangle \in \mathcal{C} \Rightarrow d \geq 1$

$0 \leq g \leq \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ となる。

これは $X \rightarrow \pi(X)$ が birational

となる projection π をとれば

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow[\text{genus } g]{\deg d} & \mathbb{P}^3 \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \pi(X) & \hookrightarrow & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

$\deg \pi(X) = d$ 且 $\text{genus } X = \text{genus } \pi(X) \leq P_a(\pi(X))$

$= \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ 。 2) について $g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ ならば

X は存在する。 $\mathbb{P}^3$ を $\mathbb{P}^N (N = \binom{d+2}{2})$ に d -ple

で入れて、 $\mathbb{P}^N$ の general な hyperplane H

をとれば、Bertini Thm により $H \cap \mathbb{P}^3 = X$

は $\mathbb{P}^2$ の degree d の nonsingular curve

$$\begin{array}{c} \mathbb{P}^2 \\ \downarrow d\text{-ple} \\ \mathbb{P}^N \end{array}$$

となる。 Example 0.2 により $g = P_a(X) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ 。
 よって $X \hookrightarrow \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ が、この実例となる。

C について Halpham は、次のように述べている。

$$a) \quad X \hookrightarrow \mathbb{P}^2 \Rightarrow g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$$

$$b) \quad X \not\hookrightarrow \mathbb{P}^2 \Rightarrow g \leq \begin{cases} \frac{d^2}{4} - d + 1 & d: \text{even} \\ \frac{d^2-1}{4} - d + 1 & d: \text{odd} \end{cases}$$

$$c) \quad \text{もし } \exists X \text{ s.t. } g > \begin{cases} \frac{1}{6}(d-1)(d-2) + \frac{2}{3} & d \equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{1}{6}(d-1)(d-2) & d \equiv 1, 2 \pmod{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow X$ はある quadric surface に含まれる。 さらに
 $g = 1 - d + \lambda d - \lambda^2 \quad \exists \lambda \in \mathbb{Z}$ 。

$$d) \quad 0 \leq g \leq \begin{cases} \frac{1}{6}(d-1)(d-2) + \frac{2}{3} & d \equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{1}{6}(d-1)(d-2) & d \equiv 1, 2 \pmod{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ cubic surface に含まれる, deg d genus g の nonsingular curve が存在する。

このうち c), d) の真偽は不明である。但し c) の X が、
 ある quadric surface に含まれれば $g = 1 - d + \lambda d - \lambda^2$
 と書けることは証明できる。

C を調べる前に、まず次の問題を考えよう。

Problem 1.1. $\forall g \geq 0$ に対して genus g の
 abstract curve は存在するか。

① $\mathbb{P}^2$ に含まれる deg d の non-singular curve は

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) \quad \text{で}$$

あるから、 g は右表の

ような値をとる。

d	1	2	3	4	5	6
g	0	0	1	3	6	10

② $\forall d, \forall e \in \mathbb{N}$ に対し Bertini Thm より degree d の non-singular surface が存在する。その一つを F_d とするとき、さらに Bertini Thm より degree e の surface F_e で $F_d \cap F_e = X$ が non-singular curve となるものが存在する。 $\deg X = de$

$$\omega_{\mathbb{P}^3} = \mathcal{O}(-4) \quad \omega_{F_d} = \mathcal{O}_{F_d}(d-4)$$

$$\omega_X = \mathcal{O}_X(d+e-4) \quad \text{より} \quad 2g-2 = \deg \omega_X = de(d+e-4) \quad \text{よ, } 2 \quad g = \frac{1}{2}de(d+e-4) + 1$$

となる。 $\mathbb{P}^3$ の中の F_d
 F_e の complete intersection
 の genus の表は右の
 ようになる。

$e \backslash d$	1	2	3	4
1	0	0	1	3
2	0	1	4	9
3	1	4	10	19
4	3	9	19	33

③ non-singular quadric surface $Q \subset \mathbb{P}^3$ を考える。 $Q \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ であり、 $\text{Pic } \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ である。 divisor $D \in (a, b)$ に対し D : very ample $\Leftrightarrow a, b > 0$ 　よ, ② Bertini Thm より $a, b > 0$ ならば (a, b) に属する non-singular curve $\in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

が存在する。その genus は $ab - a - b + 1$ となる。

quadric surface については後でまたくわしく見ることにする。なお $b=2$ のとき $g = a-1$ で

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ & \searrow \text{deg } 2 & \downarrow & & \\ & & \mathbb{P}^1 & & \end{array}$$

となり X は hyper elliptic となる。これにより $\forall g \geq 0$ に対し、genus g の curve が存在することがわかる。特に $g > 1$ なら hyperelliptic にとれる。

<Thm 1.2> (Halpman) X を genus g の curve とするとき次は同値。

i) non-special な degree d の very ample divisor が存在する。

ii) $d \geq g+3$

Proof) D を X の non-special な degree d の divisor とするとき、Thm 0.2 より D : very ample $\Leftrightarrow \forall P, Q \in X \quad h^0(D-P) = h^0(D) - 1 \quad h^0(D-P-Q) = h^0(D) - 2$. ところが R-R の定理より $h^0(D) = d - g + 1$
 $h^0(D-P) = d - 1 - g + 1 + h^1(D-P) \quad h^0(D-P-Q) = d - 2 - g + 1 + h^1(D-P-Q)$ よ、2 $h^0(D-P) = h^0(D) - 1$ であるには $D-P$ non-special, $h^0(D-P-Q)$

$= h^0(D) - 2$ であるには $D-P-Q$ non-special であることが必要かつ十分である。 $D-P-Q$ non-special であれば $D-P$ non-special であるから $D-P-Q$ だけ考えればよい。

$$\begin{aligned} D-P-Q \text{ special} &\Leftrightarrow h^1(D-P-Q) > 0 \\ &\Leftrightarrow h^0(K-D+P+Q) > 0 \\ &\Leftrightarrow \exists R_1, \dots, R_t \in X \quad t=2g-d \\ &\quad \text{s.t. } R_1 + \dots + R_t \sim K-D+P+Q \end{aligned}$$

J を X の Jacobian variety, φ を morphism

$$\begin{array}{ccc} \varphi: X^{t+2} & \longrightarrow & J_d \\ \downarrow & & \downarrow \\ (P, Q, R_1, \dots, R_t) & \longmapsto & K+P+Q-R_1-\dots-R_t \end{array}$$

とする。もし $t+2 < g$ ならば $\dim J_d = g$ だから $\exists D \quad D \notin \text{Im } \varphi$ その D は $\forall P, Q \quad D-P-Q$ non-special $t+2 \geq g$ のときは φ は surjective となり $\forall D \quad \deg D = d$ は $\exists P, Q \quad D-P-Q$ special

Q.E.D.

Remark 1.3. X を $\mathbb{P}^2$ に含まれない $\mathbb{P}^3$ の non-singular curve と $D = H \cap X$ special とすると Clifford Thm より $3 \leq \dim |D| \leq \frac{1}{2} \deg D$ より $d \geq 6$ しかも $d=6 \Leftrightarrow D=K$ or X : hyper-elliptic

$d \leq 6$ の分類は次のようになる。

$d \backslash g$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	○										
2	○										
3	●	○									
4	●	●		○							
5	●	●	●				○				
6	●	●	●	●	□						○

○ plane curve

● Thm 1.2 による $H \cap X$ non-special な curve

□ $F_2 \cdot F_3$

$d = 6$ のとき、これ以外の g では存在しないことは、次に示す。

Thm 1.4. X を genus g の curve D を X 上の degree d の very ample divisor と D は special と D は non-special と $\dim |D| \geq 3$ とする
 $\hookrightarrow d \geq 6$ と $\frac{1}{2}(d+2) \leq g \leq 2d-d$ となる。

Proof) $d > 2g-2$ ならば $h^1(D) = h^0(K-D) = 0$ となり D non-special より、2 仮定より $d \leq$

$2g-2$ したがって $\frac{1}{2}(d+2) \leq g$. $\dim |D| \geq 3$
 であるから Clifford Thm より $3 \leq \dim |D| \leq \frac{1}{2}d$
 よって $d \geq 6$ 残るは $g \leq 2d-8$ であるが、 X を
 $\mathbb{P}^3$ 内に $\mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}_X(D)$ となり、どんな plane にも含まれ
 ないようにうめこみ。次の exact sequence を考える。

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_X(2) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2) \rightarrow \mathcal{O}_X(2) \rightarrow 0$$

これより exact sequence

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{L}_X(2)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_X(2))$$

が得られるが $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2))$ の次元は 10 でその zero で
 ない元は、 $\mathbb{P}^3$ の quadric surface に対応し、それが
 $H^0(\mathcal{L}_X(2))$ の元であることは対応する quadric surface
 が X を含むことと同値である。そこで $X \subset Q_1, X \subset Q_2$
 Q_1, Q_2 を quadric surface で $Q_1 \neq Q_2$ とすると、 X は
 plane に含まれないから、 Q_1, Q_2 は irreducible とな
 り $X \subset Q_1 \cap Q_2$ ところが $Q_1 \cap Q_2$ は degree 4 の curve
 だからこれはあり得ない。よって $H^0(\mathcal{L}_X(2))$ の次元は、
 高々 1。よって exact sequence より $h^0(\mathcal{O}_X(2)) =$
 $h^0(\mathcal{O}_X(2D)) \geq g$ $2D$ は non-special だから R-R より
 $g \leq h^0(\mathcal{O}_X(2D)) = 2d - g + 1$ よって $g \leq 2d-8$
 が得られる。

Q.E.D.

この Thm において $d=6$ となるのは Clifford Thm より a) $D=0$, b) $D=K$, c) X : hyperellipticかつ $D=rE$ $1 \leq r \leq g-1$ どれかであるが, a) は $d \geq 6$ よりあり得ない。b) の場合 $6 = \deg K = 2g-2$ より $g=4$ であるが, X を $\mathbb{P}^3$ 内の F_2 と F_3 の complete intersection とすると $\deg X = 2 \cdot 3 = 6$ $g = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 (2+3-4) + 1 = 4$ $\omega_X = \mathcal{O}_X(1)$ となり $\mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}_X(D)$ とすれば, $h^1(D) = h^0(\mathcal{O}_X) = 1$ より D special で $h^1(2D) = h^0(-D) = 0$ より $2D$ non-special. よって $d=6$ $g=4$ の時実際このような divisor を持つ curve は存在する。c) は $(g-1)E = K$ より gE not very ample. E は base point free であるから rE , $r=1, \dots, g-1$ も very ample であり得ない。また $g = 2d-8$ となるのは, $h^0(\mathcal{O}_X(2)) = 9$ となるときで, このとき必ず $h^0(\mathcal{O}_X(2)) = 1$ であるから, X はある quadric surface に含まれる。

Thm 1.5. X を quadric surface に含まれない genus g の curve とし, D の degree d の very ample divisor で $2D$ は special $3D$ は non-special なものとする $d \geq 9$ で 1) $d=9$ $g=10$ または 2) $d \geq 10$ で $d+1 \leq g \leq 3d-18$ とな

9.

Proof) Thm 1.4 の証明より X が quadric surface に含まれなければ $h^0(\mathcal{O}_X(2D)) \geq 10$ であり. 2D special より $\dim |2D| \leq \frac{1}{2} \cdot 2d = d$ かつ $d \geq 9$ $d=9$ となるのは $2D=K$ のときで $18=2g-2$ より $g=10$ これは $\mathbb{P}^3$ の中の F_3 と F_3 の complete intersection として実際に存在する. さて $d \geq 10$ のとき, X を $\mathbb{P}^3$ の中に $\mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}_X(D)$ となるように定め, exact sequence

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_X(3) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3) \rightarrow \mathcal{O}_X(3) \rightarrow 0$$

より

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{L}_X(3)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_X(3))$$

を得る. $X \subset F_3, F_3'$ F_3, F_3' cubic surface $F_3 \neq F_3'$ とすると, X が quadric surface に含まれないことから,

F_3, F_3' は irreducible となり $X \subset F_3 \cap F_3'$ $F_3 \cap F_3'$ degree 9 の curve となり $\deg D \geq 10$ より, これは

あり得ない. かつ $h^0(\mathcal{L}_X(3)) \leq 1$ $h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)) = 20$ であるから $h^0(\mathcal{O}_X(3)) = h^0(\mathcal{O}_X(3D)) \geq 19$ R-R より

$19 \leq h^0(\mathcal{O}_X(3D)) = 3D - g + 1$ ($3D$: non-special) かつ $g \leq 3d - 18$ また 2D special より $2d \leq 2g - 2$ かつ $d + 1 \leq g$

Q.E.D.

3D special とすると Clifford Thm より $\dim |3D| \leq \frac{1}{2}3d$ であるが Thm 1.5 の証明の中で示したように X が quadric surface に含まれなければ $h^0(3D) \geq 19$ よって $18 \leq \frac{3}{2}d$ すなわち $d \geq 12$ また後じやるように quadric surface に含まれる non-singular curve は $d = a+b$ $g = ab - a - b + 1$ $a, b \in \mathbb{N}$ の形に書けるが $1 \leq d \leq 11$ $0 \leq g \leq 10$ の範囲では Thm 1.2, 1.4, 1.5 の範囲に入らないのは $d=8$ $g=9$ の時だけである。今までの結果を表にしてみると

	$d \backslash g$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
• Thm 1.2 の curve	1	○															
	2	○															
▨ Thm 1.4 の範囲	3	□	○														
	4	•	□		○												
	5	•	•	□				○									
▨ Thm 1.5 の範囲	6	•	•	•	□	▨					○						
	7	•	•	•	•	▨	▨	▨									○
	8	•	•	•	•	•	▨	▨	▨	▨	▨						
	9	•	•	•	•	•	•	▨	▨	▨	▨	▨		▨			
○ plane curve	10	•	•	•	•	•	•	•	▨	▨	▨	▨	▨	▨			
	11	•	•	•	•	•	•	•	•	▨	▨	▨	▨	▨	▨	▨	
□ quadric surface 上の curve	12	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

表の斜線の部分は、それぞれの条件を満たす curve があるとするば、そこになければならぬことを示しているが実際に存在するかどうかはわからない。そこで / つ

Example として Thm 1.4 の範囲、すなわち D special 2D non-special となる very ample divisor D を持つ curve の存在し得る範囲から $d=7$ $g=5$ について実際存在するかどうか調べてみよう。

◎ 問題 $\langle 7, 5 \rangle \in \mathcal{C}_e$?

X を genus 5 の curve D を degree 7 の divisor とする $R-R$ より $h^0(D) = 7 + 1 - 5 + h^1(D)$ であるが $h^1(D) = h^0(K-D)$ は $\deg(K-D) = 1$ 及び Thm 1.2 から D very ample であれば D は special であるから $h^1(D) = 1$ となり $h^0(D) = 4$ となる。

$$\begin{aligned} D \text{ very ample} &\iff \forall P, Q \in X \quad h^0(D-P-Q) = h^0(D) - 2 \\ &\iff h^1(D) = h^1(D-P) = h^1(D-P-Q) \\ &\quad \forall P, Q \in X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iff \exists R \in X \quad R = K - D \text{ で } \forall P, Q \in X \\ &\quad h^0(R) = h^0(P+R) = h^0(P+Q+R) = 1 \end{aligned}$$

よって $R \in X$ を fix したとき

$$h^0(R) = 1 \iff X: \text{rational でない}$$

$$\forall P \in X \quad h^0(R+P) = 1 \iff X: \text{hyperelliptic でない}$$

$$\forall P, Q \in X \quad h^0(R+P+Q)=1 \iff X: \text{trigonalでない}$$

但し $\circ$ Def curve X が trigonal

$$\iff \exists \text{ divisor } D \text{ deg } D=3 \text{ dim } |D| > 1$$

よ、 X が genus 5 の curve のとき X trigonal であれば任意の divisor D $\text{deg } D=7$ は very ample ではなく X が trigonal でなければ $R \in X$ をうまく選んで $D=K-R$ とおけば D は degree 7 で very ample となる。そこで問題は genus 5 の trigonal でない curve が存在するかどうかと同値である。

Prop 1.6. genus 5 の trigonal でない curve が存在する。実際 X を $\mathbb{P}^4$ 内で $X=F_2 \cdot F_2 \cdot F_2$ complete intersection とすればよい。

$$\text{Proof) } \omega_{\mathbb{P}^4} = \mathcal{O}(-5)$$

$$\omega_{F_2} = \mathcal{O}(-3)$$

$$\omega_{F_2 \cdot F_2} = \mathcal{O}(-1)$$

$$\omega_X = \mathcal{O}(1)$$

となり $2g-2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ より $g=5$ X が trigonal であれば $\exists P, Q, R$ s.t. $\dim |P+Q+R| \geq 1$ $R-R$ より $h^0(P+Q+R) = 3 - 5 + 1 + h^0(K-P-Q-R) \geq 2$ よ、 $h^0(K-P-Q-R) \geq 3$ すなわち $\mathbb{P}^4$ の linearly independent な hyperplane H_1, H_2, H_3 で共

に P, Q, R を含むものが存在する。 $\mathbb{P}' = H_1 \cap H_2 \cap H_3 \ni$
 P, Q, R より $\mathbb{P}' \subset F_2 \cdot F_2 \cdot F_2 = X$ これは矛盾。よ、 X
 X は *trigonal* でない。

Q. E. D.

以上で $\langle 7, 5 \rangle \in \mathcal{C}$ がわかった。

§ 2 いくつかの surface 上の curves

1. non-singular quadric surface 上の curve

Q を $\mathbb{P}^3$ の non-singular quadric surface とし Q 上のすべての non-singular irreducible curve を分類することを考える。

$Q \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ であるから $\text{Pic } Q = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 但し $(1, 0)$ は $\mathbb{P}^1_1 = \mathbb{P}^1 \times \{x\}$ の class $(0, 1)$ は $\mathbb{P}^1_2 = \{x\} \times \mathbb{P}^1$ の class とする。 (x は $\mathbb{P}^1$ の任意の点)

1) effective divisor D が $(a, b) \in \text{Pic } Q$ に属するとすると, $a = D \cdot \mathbb{P}^1_2 \geq 0$ $b = D \cdot \mathbb{P}^1_1 \geq 0$

2) $D \in (a, b)$ が ample $\Leftrightarrow D^2 > 0$ $D \cdot E > 0$
 $\forall E \neq 0$ effective divisor となるが $D^2 = 2ab$, $E = (a', b')$ $a' \geq 0, b' \geq 0$ とすると $D \cdot E = ab' + ba'$

よ, 2 $D: \text{ample} \Leftrightarrow a, b > 0$

3) 一般に D_1 very ample D_2 no base point であれば $D_1 + D_2$ は very ample となるが $(1, 1)$ は very ample で $(1, 0)$ $(0, 1)$ は no base point であるから $a, b > 0$ のとき (a, b) は very ample である。

以上をまとめると

(a, b) が effective divisor を持つ $\Leftrightarrow a, b \geq 0$

(a, b) が ample $\Leftrightarrow (a, b)$ が very ample $\Leftrightarrow a, b > 0$

$(0, b)$ $b > 0$ の effective divisor はすべて $D = \sum_{i=1}^b \alpha_i \cdot \gamma_i \times \mathbb{P}^1$ の形をしていゝから irreducible となるのは $b=1$ のときだけである。以上で $(a, b) \in \text{Pic } \mathbb{Q}$ が non-singular irreducible curve を含むのは ① $a, b > 0$ ② $a=0, b=1$ ③ $a=1, b=0$ のいずれかである。

(a, b) に属する non-singular curve X は $H \in (1, 1)$ だから $\deg X = a + b$ である。一方 genus は一般に effective divisor D に対し $2P_a(D) - 2 = D \cdot (D + K)$ であり $K = -2H \in (-2, -2)$ だから

$$\begin{aligned} 2g - 2 &= a(b-2) + b(a-2) \\ &= 2ab - 2a - 2b \end{aligned}$$

よ、て $g = ab - a - b + 1$ である。

ここで d を fix した時の g の最大値を求めてみよう。 $a+b=d$ より $b=d-a$

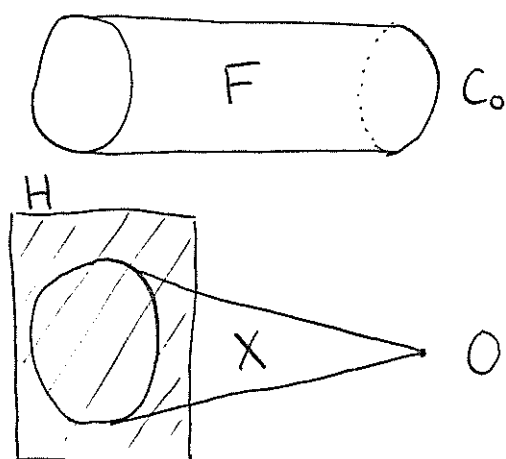
$$g = a(d-a) - a - (d-a) + 1 = ad - a^2 - d + 1$$

だから d : even の場合 $a = \frac{d}{2}$ で最大値 $\frac{d^2}{4} - d + 1$

d : odd の場合 $a = \frac{d \pm 1}{2}$ で最大値 $\frac{d^2 - 1}{4} - d + 1$ となる。

2. quadric cone 上の curve

X を $\mathbb{P}^3$ の quadric cone とし、その vertex O を center にして blow up したものを F とする。



F は non-singular surface となる。また blow up により現われ curve を C_0 とおく。
 X を O を含まない hyper plane で cut すると, conic となるが, X を O から H に

projection すると, image は H 上の conic となり, 自然に F から conic への regular map を induce する。しかもそれは $\mathbb{P}^1$ -bundle の構造をもつ。 $N_{H/\mathbb{P}^3} = \mathcal{O}_H(1)$ conic は二次曲線であるから

$$F - C_0 = X - \{O\} \simeq V(\mathcal{O}(2))$$

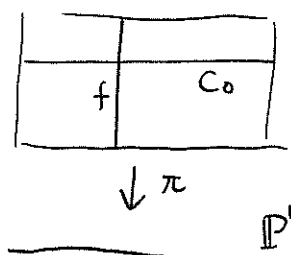
$$\downarrow$$

$$\mathbb{P}^1 \text{ conic}$$

よ, $F \simeq \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(2)) \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^1$ で $C_0^2 = -2$ である。

$\mathbb{P}^1$ の任意の点の fibre を f とすると $f^2 = 0$, $C_0 \cdot f = 1$

$\text{Pic } F = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ で $(1, 0)$ は C_0 $(0, 1)$ は f で代表されているとしてよ



(1)。

任意の effective divisor D on F に対し $2P_a(D)$
 $-2 = D \cdot (D+K)$ であることを用いて K を求めよう。

$K = aC_0 + bf$ とおけば $D = f$ のとき

$$-2 = f \cdot (aC_0 + (b+1)f) = a \quad a = -2$$

$D = f$ とすると

$$-2 = C_0 \cdot (-C_0 + bf) = 2 + b \quad b = -4$$

よって $K = -2C_0 - 4f$

hyperplane $H = aC_0 + bf$ とすると

$$H \cdot C_0 = 0 \quad \text{より} \quad b - 2a = 0$$

$$H \cdot f = 1 \quad \text{より} \quad a = 1$$

よって $H = C_0 + 2f$

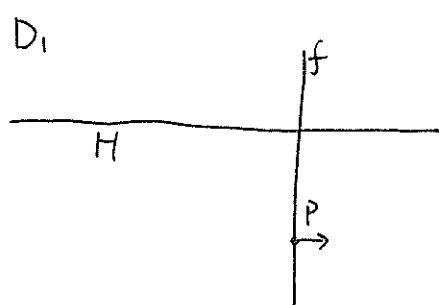
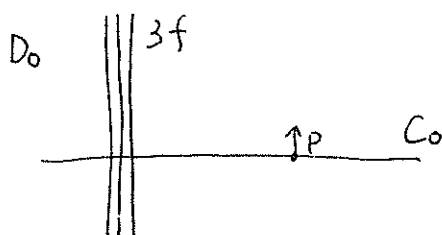
1) $D = aC_0 + bf$ とするとき D irreducible
effective ならば $D = f$ 又は $D \cdot f > 0 \iff a > 0$,
 $D = C_0$ または $D \cdot C_0 \geq 0 \iff -2a + b \geq 0$, よって
 $D = f, C_0$ または $a > 0, b \geq 2a$

2) $D = aC_0 + bf$ とするとき D ample ならば
 $D \cdot f > 0$ より $a > 0$ $D \cdot C_0 > 0$ より $b - 2a > 0$

3) $D = aC_0 + bf$ が, いづれ very ample と
なるか調べたい。

Claim $C_0 + 3f$ は very ample

proof) $C_0 + 3f = H + f$ で H も f も base point free であるから $C_0 + 3f$ も base point free である。任意の二点を separate することは、一方の点が $F - C_0$ にあれば H で separate でき、両方とも C_0 の点であれば f で separate できる。任意の点の infinitely near point を separate することは $F - C_0$ の点では H により separate されており、 C_0 の点 P は P を通らない $3f$ と C_0 の divisor D_0 と C_0 と交わらない H と P を通る f の divisor D_1 によって separate される。以上で Claim は証明された。



$H = C_0 + 2f$, f は base point free $C_0 + 3f$ は very ample であるから $a > 0$, $b > 2a$ のとき $aC_0 + bf$ は very ample である。ample になる条件と合わせると

• $D = aC_0 + bf$ に対し

$D: \text{ample} \Leftrightarrow D: \text{very ample} \Leftrightarrow a > 0, b > 2a$

X を $\mathbb{P}^3$ の quadric cone とし O をその vertex とする。

C を X に含まれる non-singular curve とするとき

Case 1. $O \notin C$ のとき, C は F の curve と考えられ $C \in (a, b)$ とすれば $C \cdot C_0 = -2a + b = 0$

$\therefore 2a = b$ となり $C \sim aH$ で C は complete intersection $X \cdot F_a$

Case 2. $O \in C$ のとき $C \in (a, b)$ としたとき

C non-singular であるから $C \cdot C_0 = -2a + b = 1$

$\therefore b = 2a + 1$ $C = aC_0 + (2a + 1)f$ C の degree は $d = C \cdot H = 2a + 1$ genus g は

$$2g - 2 = C \cdot (C + K)$$

$$= (aC_0 + (2a + 1)f) \cdot ((a - 2)C_0 + (2a - 3)f)$$

$$= -2a(a - 2) + a(2a - 3) + (2a + 1)(a - 2)$$

$$= -2a^2 + 4a + 2a^2 - 3a + 2a^2 + a - 4a - 2$$

$$= 2a^2 - 2a - 2$$

$$\therefore g = a^2 - a$$

Remark Q non-singular quadric surface $\subseteq \mathbb{P}^3$ で $C \in (a, b)$ のとき $d = a + b$ $g = ab - a - b + 1$ であつたが $b = a + 1$ のとき $d = 2a + 1$ $g = a(a + 1) - a - (a + 1) + 1 = a^2 - a$ よ, 2

quadratic cone に含まれる non-singular curve
 の degree genus が $\langle d, g \rangle$ なら non-singular
 quadric surface に含まれる non-singular curve で
 degree, genus が $\langle d, g \rangle$ なるものが存在することが
 わかる。

3. non-singular cubic surface 上の curves
 $\mathbb{P}^2$ から 6 点 $P_1, \dots, P_6$ をどの 3 つも一直線上にな
 く, 6 つが一つの conic 上にないようにとる. そして
 linear system $\{C; C: \text{cubic curve} \ni P_1, \dots, P_6\}$
 により rational map

$$\mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^3$$

を作り image の closure を F とすれば F は non-
 singular cubic surface である。

[逆に k を algebraically closed field とした
 とき, すべての non-singular surface $\subseteq \mathbb{P}^3$ は.
 このようにして得られる]

証明は Manin の Cubic Forms 1974
 p 117 ~ p 126

F を non-singular cubic surface とするとき
 F は $\mathbb{P}^2$ の 6 点 $P_1, \dots, P_6$ を blow up したものと考え
 られるから $\text{Pic } F \simeq \mathbb{Z}^7$ で $h, e_1, \dots, e_6$ を

basis にとれる。但し ℓ は $\mathbb{P}^2$ の $P_1, \dots, P_6$ を含まない
 (1) line e_i は P_i の transformation とする。 $\ell^2 = 1$,
 $e_i^2 = -1$, $\ell e_i = 0$, $e_i e_j = 0$ (if $i \neq j$), とな
 っている。

$$H = \text{hyper plane section} = 3\ell - \sum_{i=1}^6 e_i$$

$$K = \mathcal{O}(d-4) = \mathcal{O}(-1) \quad \text{に注意すれば}$$

$$K = \text{canonical divisor} = -3\ell + \sum_{i=1}^6 e_i$$

$$D = a\ell - \sum b_i e_i \quad \text{とするとき}$$

$$\deg D = D \cdot H = 3a - \sum b_i.$$

$$2g-2 = D \cdot (D-K) = a(a-3) - \sum b_i(b_i-1) \quad \text{より}$$

$$\text{genus } D = g = \frac{1}{2}(a-1)(a-2) - \sum \frac{1}{2} b_i(b_i-1)$$

1) D irreducible effective とすると次の二つの
 場合がある。

$$\textcircled{1} \quad D = e_i$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} D \cdot e_i \geq 0 \\ D \cdot \ell > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_i \geq 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

2) D ample であれば

$$D \cdot \ell = a > 0$$

$$D \cdot e_i = b_i > 0$$

$$D^2 = a^2 - \sum b_i^2 > 0$$

となる。

Remark Schwarz inequality により

$$|\sum a_i b_i|^2 \leq |\sum a_i^2| |\sum b_i^2|$$

$i = 1, \dots, 6$, $a_i = 1$ とおけば

$$|\sum b_i|^2 \leq 6 |\sum b_i^2|$$

$a^2 > b_i^2$ であれば $\sum b_i < \sqrt{6}a$ となる。

3) $H = 3\ell - \sum e_i$ は very ample

$$\begin{cases} \ell - e_i \\ 2\ell - e_1 - e_2 - e_3 - e_4 \\ 3\ell - 2e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 \end{cases}$$

は no base point である。

Application d を fix したときの F に含まれる non-singular irreducible curve の maximal genus は

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{6}(d-1)(d-2) + \frac{2}{3} & \text{if } d \equiv 0 \pmod{3} \\ &= \frac{1}{6}(d-1)(d-2) & \text{if } d \equiv 1, 2 \pmod{3} \end{aligned}$$

となり、その最大値を実際にとる curve が存在する。

Proof) $D = a\ell - \sum_{i=1}^6 b_i e_i$ としたとき $d = 3a - \sum b_i$, $g = \frac{1}{2}(a-1)(a-2) - \sum \frac{1}{2} b_i(b_i-1)$ であったが fix された d に対して $a, b_1, \dots, b_6$ を実数 $\mathbb{R}$ 内で動かした時の g の最大値を求めてみよう。
まず a を fix したとき $\sum b_i = 3a - d$ より

$$g = \frac{1}{2}(a-1)(a-2) + \frac{1}{2}(3a-d) - \frac{1}{2} \sum b_i^2$$

これが最大になるのは $b_1 = \dots = b_6$ のとき。よ、乙名 a に対する最大値は

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{2}(a-1)(a-2) + \frac{1}{2}(3a-d) - \frac{1}{12}(3a-d)^2 \\ &= \frac{1}{2}a^2 - \frac{3}{2}a + 1 + \frac{3}{2}a - \frac{a}{2} - \frac{3}{4}a^2 + \frac{ad}{2} - \frac{d^2}{12} \\ &= -\frac{1}{4}a^2 + \frac{ad}{2} - \frac{d^2}{12} - \frac{d}{2} + 1 \end{aligned}$$

ここで a を変化させれば $a=d$ のとき最大で、求める最大値は

$$\begin{aligned} g &= -\frac{1}{4}d^2 + \frac{d^2}{2} - \frac{d^2}{12} - \frac{d}{2} + 1 \\ &= \frac{d^2 - 3d + 2}{6} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{(d-1)(d-2)}{6} + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

よ、乙 $d \equiv 0 \pmod{3}$ のとき

$$g \leq \frac{1}{6}(d-1)(d-2) + \frac{2}{3}$$

$d \equiv 1, 2 \pmod{3}$ のとき

$$g \leq \frac{1}{6}(d-1)(d-2)$$

となる。この最大値を実際にとることは

① $d \equiv 0 \pmod{3}$ のとき

$d = 3m$ ($m > 0$ integer) と書けるが $MH = 3mL - m \sum e_i$ は very ample $\mathbb{P}^2$ degree は $3(3m) - 6m = 3m = d$ で、genus は

$$\begin{aligned}
 g &= \frac{1}{2}(3m-1)(3m-2) - 6 \cdot \frac{1}{2}m(m-1) \\
 &= \frac{1}{2}(3m-1)(3m-2) - \frac{1}{3}\{(3m-1)(3m-2) - 2\} \\
 &= \frac{1}{6}(d-1)(d-2) + \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

② $d \equiv 1 \pmod{3}$ のとき

$d \equiv 3m+1$ と書けるが $3l - \sum e_i$ very ample

$2l - e_1 - e_2 - e_3 - e_4$ no base point 5)

$$\begin{aligned}
 &(m-1)(3l - \sum e_i) + (2l - e_1 - e_2 - e_3 - e_4) + (2l - e_1 \\
 &- e_2 - e_5 - e_6)
 \end{aligned}$$

$$= (3m+1)l - (m+1)(e_1 + e_2) - m(e_3 + e_4 + e_5 + e_6)$$

は very ample $\bar{\nu}$ degree は

$$3(3m+1) - 2(m+1) - 4m = 3m+1$$

また

$$\begin{aligned}
 g &= \frac{1}{2} \cdot 3m(3m-1) - 2 \cdot \frac{1}{2}(m+1)m - 4 \cdot \frac{1}{2}m(m-1) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 3m(3m-1) - m(3m-1) \\
 &= \frac{1}{6} \cdot 3m(3m-1) \\
 &= \frac{1}{6}(d-1)(d-2)
 \end{aligned}$$

③ $d \equiv 2 \pmod{3}$ のとき

$d = 3m+2$ と書けるが

$$\begin{aligned}
 &m(3l - \sum e_i) + (2l - e_1 - e_2 - e_3 - e_4) \\
 &= (3m+2)l - (m+1)(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) - m(e_5 + e_6)
 \end{aligned}$$

は very ample $\bar{\nu}$ degree は

$$3(3m+2) - 4(m+1) - 2m = 3m+2 = d$$

また

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{2}(3m+1)(3m) - 4 \cdot \frac{1}{2}(m+1)m - 2 \cdot \frac{1}{2}m(m-1) \\ &= \frac{1}{6}(3m+1)(3m) \\ &= \frac{1}{6}(d-1)(d-2) \end{aligned}$$

Q.E.D.

注意 $d = 1, 2, 4$ については各自試みよ。

§3 $\mathbb{P}^2$ に含まれない curve についての定理

X を $\mathbb{P}^3$ の irreducible reduced curve かつ $\mathbb{P}^2$ で degree d とするとき. 次の properties を考える.

Property (1) $\mathbb{P}^3$ の plane H で $X \cap H$ が no 3 points colinear な d 個の点となるものが存在する.

Property (2) X の異なる点 P, Q で次のようなものが存在する. P, Q を通る line l は X と P, Q で multiplicity 1 で交わり. その他の点で交わらない.

Remark 3.1. (1) $\iff$ (2)

Proof) (1) $\implies$ (2) は明らか.

(2) $\implies$ (1)

$$\begin{array}{ccc} f: X \times X \rightarrow \Delta X & \longrightarrow & \text{Grass}(1, 3) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P, Q & \longmapsto & (P, Q \text{ を含む line } l) \end{array}$$

と定義すると $\text{Im } f \ni l$ に対し $X \neq \mathbb{P}^1$ だから l に含まれる X の点は有限個. よって $f^{-1}(l)$ は 0 次元, つまり

$\dim \text{Im } f = 2$ $\Gamma \subseteq X \times X \times \overline{\text{Im } f}$ を rational map $X \times X \rightarrow \overline{\text{Im } f}$ の graph とするとき.

$\Gamma \ni \forall (x_1, x_2, l)$ は $l \ni x_1, x_2$ となる. 2 いる.

(2) より, ある l に対して $\Gamma \xrightarrow{f} \overline{\text{Im } f}$ の fibre は重複度を込めて 2 であるから f の degree は 2 である

ことがわかる。 $T = \{ \ell \in G(1, 3) \mid \# |\ell \cap X| > 3 \}$
 とおくと $\dim T \leq 1$ よ、 $\{ H \text{ plane} \mid \exists \ell \ H \supset \ell \}$
 の次元は 2 以下。 したが、 $\forall \ell \in T \ H \neq \ell$ なる
 plane H が存在する。 H が property (1) の条件を満
 たすことは明らか。

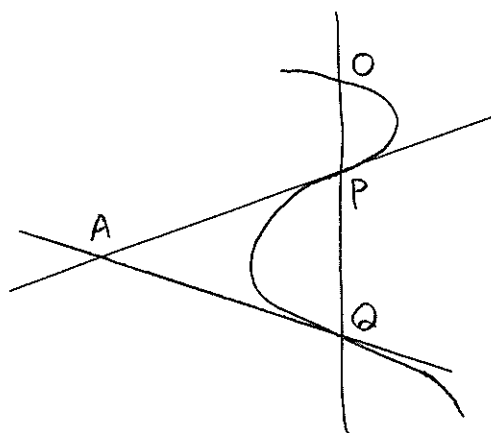
Q.E.D.

Property (3) 点 $A \in \mathbb{P}^3$ で X の任意の non-singular
 point P の tangent line t_P が A を含むようなもの
 が存在する。

Definition 3.2. (Samuel) (3) が成立するとき
 X は strange であるという。

Note 3.3. $\sim (2) \Rightarrow (3)$

Proof) (2) でないとする。 ある $r > 2$ があって
 ほとんどすべての secant は r fold secant となる。



よ、 $X \times X$ の general
 な point (P, Q) に対し
 P, Q を含む line ℓ は
 X の他の点 O を含む。
 そこで O と t_P を含む平
 面 H を考えると、 もし t_Q
 が H に含まれなければ、

general な $P' \in X$ に対して O と P' を通る直線と X の交わりは $r-1$ 以下となるから t_O は H に含まれねばならない。 よって t_P と t_O はある点 A で交わる。 他の

general な X の点 R の接線 t_R も同じ理由で t_P と t_O と交わるが、 A 以外の点で交わるとすると R は H に含まれることになる。 $X \not\subset \mathbb{P}^2$ であるから、このような R は有限個しかあり得ない。 よって general な R で t_R は A を通る。 これより連続性から X のすべての non-singular point の tangent line は A を含むことになる。 以上で (3) が満たされることがわかる。

Prop 3.4. $ch\ k=0$ のとき (3) はあり得ない。

Proof) A からの projection を考えると X のすべての点で ramified となる。 $ch\ k=0$ のときは、いつも separable map だからこれはあり得ない。

Q.E.D.

[Bertini, 1890] X を abstract complete non-singular curve とし $\mathcal{L}$ をその上の linear system $r = \dim \mathcal{L}$ とする。 そのとき $ch\ k=0$ ならば次の Property を満たす。

Property (4) 条件

$$\textcircled{1} \dim(\mathcal{L} - P) = \dim \mathcal{L} - 1$$

② $\mathcal{C} - P$ は base point を持たない。
 を満たす点 $P \in X$ が存在するとき、 $1 \leq \forall \lambda \leq r-1$ に対し
 $P_1, \dots, P_r \in X$ で

1) $\dim(\mathcal{C} - P_1 - \dots - P_r) = \dim \mathcal{C} - r$

2) $\mathcal{C} - P_1 - \dots - P_r$ は base point を持たない。
 と満たすものが存在する。

Remark $ch \mathcal{C} = P > 0$ のとき (4) が成立するかどうかわからない。

③ (4) $\Rightarrow$ (2) がいえる。実際 $X \hookrightarrow \mathbb{P}^3$
 のとき $\mathcal{C} = |H|$ とおけば (4) の仮定を満たし $r=2$
 の場合を適用すれば $\exists P, Q, \mathcal{C} - P - Q$: base
 point free となる。これは P, Q を通る line
 と X の交わりは P, Q でのそれぞれ multiplicity 1
 だけであることを示している。よって (2) がいえる。

Thm 3.5. (Samuel) X を $\mathbb{P}^n$ に含まれる
 non-singular curve とするとき (3) が成り立てば X は次の
 いずれかである。[13]

- i) $X = \mathbb{P}^1$
- ii) $ch \mathcal{C} = 2$
 $X = \text{conic} \subseteq \mathbb{P}^2$



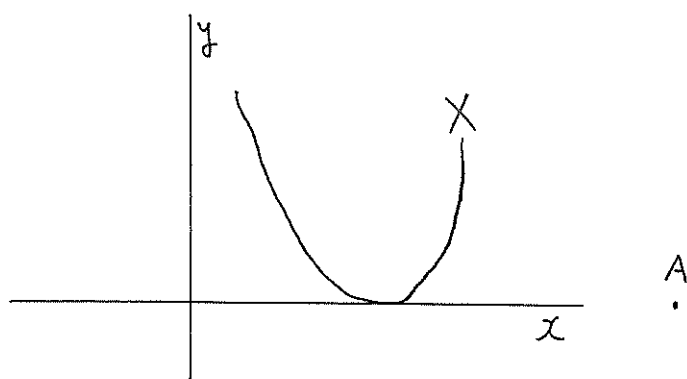
注意 $\text{ch } k = p > 0$ のとき curve

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^p \\ z = t^{2p} \end{cases} \subseteq \mathbb{A}^3$$

の接線は x 軸と平行であるが、この curve は $\mathbb{P}^3$ では singular curve である。

Proof) $\text{ch } k = 0$ ならば 1) がいえるから $\text{ch } k = p > 0$ とする。証明は簡単のため $X \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ の場合だけ行なう。 $\mathbb{P}^2 \supset \mathbb{A}^2$ を次のようにとる。

- 1) A は x -axis の point at infinity
- 2) もし $A \in X$ ならば $t_A \neq \infty$, $t_A \neq x\text{-axis}$
- 3) $0 \notin X$



◎ Recall Hurwitz

X, Y を non-singular curve $f: X \rightarrow Y$ を $K(X)/K(Y)$ が separable となるような morphism とする。 $X \ni P$ に対し $f(P)$ の uniformizing

parameter u が P の uniformizing parameter t に対し $f^*u = at^g + \text{higher term}$, $a: \text{unit}$ と書けるとき, $g > 1$ であれば f は P で ramified P/g のとき wildly ramified という。そのとき等式

$$2g_X - 2 = (\deg f)(2g_Y - 2) + \sum_{P \in X} (e_P - 1)$$

$$\left(\text{但し } e_P = v_P\left(\frac{df^*u}{dt}\right) + 1 \right)$$

が成り立つ。

Thm の証明にもどる。点 A から y -axis への projection を考えると $X \rightarrow y\text{-axis}$ は (3) より inseparable である。すなわち $k(X)^p \cong k(Y)$ 一方 O から ∞ への projection を考えると $X \rightarrow \infty$ は x -axis の点以外は unramified で Hurwitz の公式より

$$2g - 2 = \sum_{\substack{P \in X \cap x\text{-axis} \\ P \neq A}} (e_P - 1) - 2d$$

$P \in X \cap x\text{-axis}$ $P \neq A$ に対して e_P を求めよう。

$$y = (c_r t^r + c_{r+1} t^{r+1} + \dots)^p \quad c_r \neq 0$$

$$x = a + t$$

より

$$u = y/x = (C_r t^r + C_{r+1} t^{r+1} + \dots)^p \cdot a^{-1} (1 - \frac{t}{a} + \frac{t^2}{a^2} - \dots)$$

$$= \frac{C_{r+1}^p}{a} t^{rp} - \frac{C_{r+1}^p}{a^2} t^{rp+1} + \dots$$

よ、 $\sum P_i$ is wildly ramified is $e_p = rp+1$ となる。

$$2g-2 = \sum P_i - 2d$$

$$1) \quad d = \sum P_i \quad \text{if } A \notin X$$

$$2) \quad d = \sum P_i + 1 \quad \text{if } A \in X$$

$$1) \text{ のとき } 2g-2 = 2 \quad g=0, d=2 \quad X: \text{conic}$$

$$2) \text{ のとき } 2g-2 = d-1-2d \quad \text{より } 2g+d=1$$

$$g=0, d=1 \quad X = \mathbb{P}^1$$

Q.E.D.

Lemma 3.6. $\mathbb{P}^3 \ni X$ を genus g degree d の non-singular curve とし X はいかなる hyperplane にも含まれないとする。そのとき $m \geq \frac{1}{2}(d-3)$ ならば $\mathcal{O}_X(m)$ は non-special である。

Proof) $F_m = |X \cap mH|$ とおき F_m special と仮定する。つまり $h^0(K-F_m) > 0$

よ、 X の effective divisor A で $F_m + A \sim K$ なるものが存在する。そのような A を一つ固定する。

さて $X \not\subset \mathbb{P}^2$ であるから $|H| \ni D$ で D のどの3点も一直線上にないようなものが存在する。 $\alpha = \dim |K|$

— $\dim |K-D|$ とおく

$$\begin{aligned}\dim |K-D| &= h^0(K-D) - 1 \\ &= h^0(D) - d + g - 1 - 1 \\ &\geq 2 - d + g \quad (h^0(D) \geq 4)\end{aligned}$$

および $\dim |K| = g - 1$ より

$$\alpha \leq (g-1) - (2-d+g) = d-3 \cdots \cdots I$$

また $\beta = \dim |F_m| - \dim |F_m - D|$ とおくと次のことに注意すれば $\beta \leq \alpha$ を得る。

⊙ E を divisor, $X \ni P \notin \text{supp } A$ とすると
 $0 \leq h^0(E) - h^0(E-P) \leq h^0(E+A) - h^0(E+A-P) \leq 1$

さて $D = P_1 + \cdots + P_d$ とするとき $m \geq \frac{1}{2}(d-3)$ より $2m \geq d-3$ ここで各 i $0 \leq i \leq d-3$ に対して $E_i \in F_m$ で $E_i \ni P_1, \dots, P_i$, $E_i \not\ni P_{i+1}, \dots, P_d$ となるものが存在する。実際 $i=2\ell$ ならば $\ell \leq m$ であり hyperplanes $L_1, \dots, L_m$ を $L_1 \cap D = \{P_1, P_2\}$, $L_2 \cap D = \{P_3, P_4\}$, $\dots$, $L_\ell \cap D = \{P_{2\ell-1}, P_{2\ell}\}$, $L_{\ell+1} \cap D = \dots = L_m \cap D = \emptyset$ とするようにと, $E_i = L_1 \cup \dots \cup L_m$ とおけばよい。
 $i=2\ell+1$ ならば $\ell \leq m-1$ であり hyperplanes $L_1, \dots, L_m$ を $L_1 \cap D = \{P_1, P_2\}$, $L_2 \cap D = \{P_3, P_4\}$, $\dots$, $L_\ell \cap D = \{P_{2\ell-1}, P_{2\ell}\}$, $L_{\ell+1} \cap D = \{P_{2\ell+1}\}$,

$L_{l+2} \cap D = \dots = L_m \cap D = \phi$ となるようにと、 Σ

$E_i = L_1 \cup \dots \cup L_m$ とおけばよい。これは

$$\dim |F_m| - \dim |F_m - P_1| = 1$$

$$\dim |F_m - P_1| - \dim |F_m - P_1 - P_2| = 1$$

$\vdots$

$$\dim |F_m - P_1 - \dots - P_{d-2}| - \dim |F_m - P_1 - \dots - P_{d-1}| = 1$$

を示してあり $\beta = \dim |F_m| - \dim |F_m - D| \geq d-2 \dots \text{II}$

$\beta \leq \alpha$ であるから I, II は矛盾。よって $\mathcal{O}_X(m)$

は non-special

Q.E.D.

Example この Lemma 3.6. が best possible となる例 $X = F_2 \cdot F_e$ とすると $d=2e$
 $\omega_X = \mathcal{O}_X(-4+2+e) = \mathcal{O}_X(e-2)$ で ω_X は special であり $m = \frac{1}{2}(d-4)$ で $\mathcal{O}_X(m)$ special となる。

Thm 3.7. (Castelnuovo) X を $\mathbb{P}^3$ の degree d genus g の non-singular curve で、(1) かなる hyperplane にも含まれないとすると

$$g \leq \frac{d^2}{4} - d + 1 \quad \text{if } d \equiv 0 \pmod{2}$$

$$g \leq \frac{d^2-1}{4} - d + 1 \quad \text{if } d \equiv 1 \pmod{2}$$

となる。

Proof) $F_m = |X \cap mH|$ とおく。但し H は $\mathbb{P}^3$ の hyperplane そのとき $F_1 \ni D, D = P_1 + \dots + P_d$ で $P_1, \dots, P_d$ のどの3つも同一直線上にないものとする。

$S_m = \dim F_m - \dim(F_m - D)$ とおく。そのとき

$$2m+1 \leq d \implies S_m \geq 2m+1$$

なぜなら $r=0, \dots, 2m$ に対し $\exists E_r \in F_m$ s.t.

$E_r \ni P_1, \dots, P_r, E_r \not\ni P_{r+1}, \dots, P_d$ となるものがあり、これは

$$\dim(F_m - \sum_{i=1}^r P_i) - \dim(F_m - \sum_{i=1}^{r+1} P_i) = 1$$

for $r=0, \dots, 2m$

を意味するので $\dim F_m - \dim(F_m - D) \geq 2m+1$

$F_m - D = F_{m-1}$ に注意すると

$$\begin{aligned} \dim F_m &= \dim F_1 + \sum_{k=2}^m (\dim F_k - \dim F_{k-1}) \\ &\geq 3 + \sum_{k=2}^m 2k+1 \\ &= m(m+2) \end{aligned}$$

Case 1. $\odot d \equiv 0 \pmod{2}$ のとき $m = \frac{1}{2}(d-2)$ とすると Lemma 3.6 より $\mathcal{O}_X(m)$ は non-special よ、 $\mathbb{Z}$ R - R より $h^0(\mathcal{O}_X(m)) = md - g + 1 \dots \text{I}$ 一方 $h^0(\mathcal{O}_X(m)) - 1 = \dim F_m \geq m(m+2) \dots \text{II}$ I, II より $md - g + 1 \geq m(m+2) + 1$ $m \geq \frac{1}{2}(d-2)$ を代入すれば

$$\frac{1}{2}d(d-2) - g + 1 \geq \frac{1}{4}(d-2)(d+2) + 1$$

これより

$$g \leq \frac{1}{4}(d^2 - 4d + 4) = \frac{d^2}{4} - d + 1$$

Case 2. $\odot d \equiv 1 \pmod{2}$ のとき $m = \frac{1}{2}(d-1)$

よすると Lemma 3.6 より $\mathcal{O}_X(m)$ は non-special

よ、2 R-R より $h^0(\mathcal{O}_X(m)) = md - g + 1 \cdots I$

一方 $h^0(\mathcal{O}_X(m)) - 1 = \dim F_m \geq m(m+2) \cdots II$

I, II より $md - g + 1 \geq m(m+2) + 1$ m に

$\frac{1}{2}(d-1)$ を代入すれば

$$\frac{1}{2}d(d-1) - g + 1 \geq \frac{1}{4}(d-1)(d-3) + 1$$

よ、2

$$g \leq \frac{1}{4}(d^2 - 4d + 3) = \frac{d^2 - 1}{4} - d + 1$$

Q.E.D.

Remark Case 1, Case 2 とともに等号の成り立つのは $\dim F_m = m(m+2)$ のときで $d \geq 5$ ならば $m \geq 2$ であり $S_2 = 5$, $F_2 = 8$ でなければ存しない。

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_X(2) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2) \rightarrow \mathcal{O}_X(2) \rightarrow 0$$

に対し exact 列

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{L}_X(2)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_X(2))$$

を考えると

$\dim H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)) = 10$, $\dim H^0(\mathcal{O}_X(2)) = 9$
 より $H^0(\mathcal{O}_X(2)) \neq 0$ これは X がある quadric
 surface に含まれることを意味する。

Halphen は次のように述べている。

「 $g \leq \frac{1}{6}(d-1)(d-2)$ ならば degree d genus g
 の non-singular curve $X \subseteq \mathbb{P}^3$ で $\mathbb{P}^3$ の cubic
 surface に含まれるものが存在する。 」

この命題の真偽は不明であるが次の Remark から正し
 いとしてもその cubic surface は non-singular とは
 とれない例があることがわかる。

Remark X を genus g degree d の
 non-singular curve $\subseteq \mathbb{P}^3$ で non-singular cubic
 surface に含まれるとすると $g \geq \frac{1}{2}(d-7)$

IHES #36 "Zariski" の Hartshorne
 "curve with high self intersection
 によると

X を genus g の non-singular
 curve で non-singular surface F に含
 まれているとすると、次の 1), 2) のどちらかである。

1) F は $X \times \mathbb{P}^1$ に birational

2) $X^2 \leq 4g+5$ で等号は X が $\mathbb{P}^2$ の

⌊ cubic curve で $g=1$ のとき ⌋

そこで X が genus g で non-singular cubic surface $F \subseteq \mathbb{P}^3$ に含まれているとすると cubic surface は rational であるから (1) は $g=0$ 以外おこり得ない。

$\deg X = d$ とすると $\omega_X = X \cdot (X + \omega_F)$ $\omega_F = \mathcal{O}_F(-1)$
だから $2g-2 = X^2 - d$, $X^2 = d + 2g - 2$ $g \neq 0$ ならば
ば $X^2 \leq 4g + 5$ だから

$$d + 2g - 2 \leq 4g + 5$$

$$d - 7 \leq 2g$$

$$\text{よ, } 2 \quad g \geq \frac{1}{2}(d - 7)$$

§4 smooth deformation を持たない curve

「すべての singular curve は non-singular curve の special case であるか」という問題を考える。

この問題について $\mathbb{P}^3$ の irreducible reduced curve での反例はまだ見つかっていないが、さまざまの形での反例を与えることができる。

Example 4.1. $\mathbb{P}^3$ の non reduced curve で smooth flat deformation を持たないものが存在する。

integer $l \geq 0$ を fix し

$$S = k[x, y, z, w]$$

① homogeneous ideal I を

$$I = \langle x^2, xy, y^2, xz^l - yw^l \rangle$$

とする。そのとき $Y = \text{Proj } S/I \subseteq \mathbb{P}^3$ とすると $\text{supp } Y = \{x=y=0\} = \mathbb{P}^1 \subseteq \mathbb{P}^3$ で、また Y は embedded component を持っていない。 $\deg Y = 2$ であるが P_a を求めよう。 Y の Hilbert polynomial は $h^0(\mathcal{O}_Y(n)) = \alpha n + 1 - P_a$ であるが $\alpha = 2$ で n が十分大のとき

$0 \rightarrow I_n \rightarrow k[x, y, z, w]_n \rightarrow H^0(\mathcal{O}_Y(n)) \rightarrow 0$ となる。そこで $(S/I)_n$ を考えると k -vector space としての basis を

$$\begin{cases} x w^{n-1}, x z w^{n-2}, x z^2 w^{n-3}, \dots, x z^{l-1} w^{n-l} \\ y z^{n-1}, y z^{n-2} w, y z^{n-3} w^2, \dots, y w^{n-1} \\ z^n, z^{n-1} w, z^{n-2} w^2, \dots, w^n \end{cases}$$

ととれるから $(S/I)_n$ の次元は $l + n + n + 1 = 2n + 1 + l$
 よ、 $\varepsilon P_a = -l$ flat deformation は d, P_a
 を保つが degree 2 の non-singular curve は $\mathbb{P}^2$ の
 conic か又は non-singular quadric surface 上の交わ
 らない二直線しか存在しない。

◦ conic のとき $P_a = 0$ で Example ① $l = 0$ の場
 合に specialize できる。

◦ 二直線のとき $P_a = -1$ で $l = 1$ の場合に spe-
 cialize できる。



$l \geq 2$ のときこの Example は smooth flat
 deformation を持たないことがわかる。

Example 4.2. (Szyro) $\mathbb{P}^3$ の reduced
 not irreducible curve の smooth flat deforma-
 tion をもたないもの Y を $\mathbb{P}^2 \subseteq \mathbb{P}^3$ の degree 4 の

non-singular curve とし l を $\mathbb{P}^2$ と Y の一点で交わる line とする。 $Y \cup l$ を考えると $d = 5$ であるが P_a の方は一般に Y_1, Y_2 を curve としたとき

$$P_a(Y_1 \cup Y_2) = P_a(Y_1) + P_a(Y_2) + \#(Y_1 \cap Y_2) - 1$$

だから

$$\begin{aligned} P_a &= P_a(Y) + P_a(l) + 1 - 1 \\ &= 3 + 0 + 1 - 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

ところが §1 の分類表を見ればわかるように degree 4 の non-singular curve の genus は 0, 1, 2, 6 のいずれかであるから $Y \cup l$ は smooth flat deformation を持たないことがわかる。

Example 4.3. (Mumford) reduced irreducible curve で smooth flat deformation をもたないもの

"pinching curve" X を non-singular curve とし P をその一つの点とするとき P の local ring $\mathcal{O}_P$ 任意の subring $R \cong \mathbb{C}$ である n に対し $R \cong \mathbb{C}_P^n$ となるものに対し set としては X と同じ curve X' で $X \xrightarrow{f} X'$ が P 以外で isomorphism P に対応する点を P' としたとき $\mathcal{O}_{P'} = R$ となるものが存在する。

このとき

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{X'} \rightarrow f_* \mathcal{O}_X \rightarrow f_* \mathcal{O}_X / \mathcal{O}_{X'} \rightarrow 0$$

$\downarrow$
 $\mathcal{O}_P/R$

を考えればわかるように

$$P_a(X') = P_a(X) + \ell(\mathcal{O}_P/R)$$

となる。

X を abstract non-singular curve genus $g \geq 2$
 P を X の点 $n > 0$ を integer $t \in \mathcal{O}_P$ を
 uniformizing parameter とする。 そのとき

$$\mathbb{R} \cdot t^n + \mathbb{R} t^{n+1} + \cdots + \mathbb{R} t^{2n+1}$$

の sub vector space V に対し $R = \mathbb{R} + V + M_P^{2n}$ と
 おくと R は subring となり。 それによる pinching curve
 を X_V と書くことにする。 ここで g を fix して
 $\dim V = g$ の場合だけ考えると

$$P_a(X_V) = g + 2n - 1 - g$$

となる。 $V \neq V'$ のとき $X \rightarrow X_V, X \rightarrow X_{V'}$
 に関し X_V と $X_{V'}$ は同型になり得る。 また abstract
 な同型 $X_V \rightarrow X_{V'}$ があれば X の automorphism σ
 があり

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X_V \\ \sigma \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X_{V'} \end{array}$$

となるが $g \geq 2$ だから X の automorphism は有限個。

よ、2任意の V に対し有限個の linear subspace $V_1, \dots, V_r$ があり、 $V' \neq V_i$ ($i=1, \dots, r$) であれば X_V と $X_{V'}$ は abstract curve としても同型でなくなる。 $T =$

$\text{Grass}(n, g)$ とおけば $\dim T = g(n-g)$ である。

そこで n を偶数 $g = \frac{n}{2}$ とすれば $\dim T = \frac{n^2}{4}$ よ、
て n を十分大きくとれば

$$\dim T > 3Pa - 3 = 3(g + 2n - 1 - g) - 3$$

このときある V に対し X_V は smooth flat deformation をもたないことがいえる。

くわしくは Mumford Pathologies IV

肯定的な結果としては次の結果がある。

Thm 4.4. (M. Schaps) X を $\mathbb{A}^3$ の reduced な curve とするとき X は smooth flat deformation をもつ。

§5 P^3 上の curves の liaison について

curve Y とは P^3 にあり, 一次元の closed subscheme として embedded component を持たないとする。今 Y, Y' を curve とする。

定義 5.1. Y と Y' は *lié* である ($Y \sim Y'$ と書く) とは, 次の 2つの条件を満たす時に言う。

1. Y と Y' は共通の既約成分を持たない。(i.e. $\dim(Y \cap Y') \leq 0$)

2. 2つの surfaces (embedded component を持たない) H_1, H_2 があり $Y \cup Y' = H_1 \cap H_2$ (scheme として)。

定義 5.2. $Y \approx Y'$ とは curves $Y_1 (= Y), Y_2, \dots, Y_q (= Y')$ があって 任意の i に対し $Y_i \sim Y_{i+1}$ ($i=1, \dots, q-1$) を満たす時に言う。

この時 ' $\approx$ ' は同値関係である。

例 1. $Y \in$ irreducible reduced curve とする。 Y の generic point ε とすると, $\mathcal{O}_{\varepsilon, Y} = \mathcal{O}_{\varepsilon, P^3} / (f, g)$ であるから f, g に対応して P^3 の 2つの 超曲面 $H_1, H_2 \in$ とすると, $H_1 \cap H_2 = Y \cup Y'$ となる。故に $Y \sim Y'$ 。

例 2. $Y = P^1$ とする。 $Q \in P^3$ の 2次曲面とし, $Y \in (0, 1)$ 型の Q の divisor とする。 Y の定義イデアル $I_Y \in (X_0, X_1)$

$(\subseteq k[x_0, x_1, x_2, x_3])$, Q の P^3 での定義イデアル I_Q を $(x_0x_2 - x_1x_3)$ とする。この時 自然数 e に対し, 次数 e の同次多項式 f ($\notin I_Q$ か $\in I_Q$) が存在して $Q \cap H_e = Y \cup Z$ (H_e は f が定める e 次曲面) となり, Z は $(e, e-1)$ 型の Q の divisor である。逆に任意の Q の $(e, e-1)$ 型の divisor Z に対し ($e-1 \geq 0$) P^3 の e 次曲面 H_e が存在し, $Q \cap H_e = Z \cup Y$ を満たす。(これは $H^0(P^3, \mathcal{O}_{P^3}(e)) \rightarrow H^0(Q, \mathcal{O}_Q(e)) \rightarrow 0$ より明らか)。とくに $e-1 > 0$ なら, $(e, e-1)$ 型の divisor は very ample より, Z は irreducible non-singular curve としてとれる。

命題 5.3 Y を次数 d の irreducible non-singular curve とする。その時次の性質を満たす e 次曲面 H_1, H_2 がある。($d+1 \leq e$) :

$H_1 \cap H_2 = Y \cup Y'$ で Y' は irreducible non-singular curve であり Y と Y' は transversal である。

(証明) $\mathcal{O} = \{ H : \text{degree } e \text{ の曲面} \mid H \supseteq Y \}$ とする。

$X = P^3$ とし, Y を center として blow up する。それと

$\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ とし, $\tilde{\mathcal{O}} = \pi^* \mathcal{O} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\pi^{-1}(Y))$ とすると

claim: $\tilde{\mathcal{O}}$ は closed immersion $i: \tilde{X} \hookrightarrow P^N$

定める (演習問題)

$i(\tilde{X})$ は P^N の non-singular subvariety. Bertini の定理より P^N の超平面 $\bar{H}_1, \bar{H}_2$ が存在して $\tilde{X} \cap \bar{H}_1 \cap \bar{H}_2$ は non-singular irreducible curve $\bar{Z}$ を定める。一方 $\bar{Z} \cap \pi^{-1}(Y)$ は $\coprod_{finite} \text{Spec}(k)$ に同型で, π の同じ fiber に 2 点あることはない。 $H_i = \pi(\tilde{X} \cap \bar{H}_i)$ ($i=1, 2$) とおくと, $H_1 \cap H_2 = Y \cup \pi(\bar{Z})$ で条件を満していることは明らか。(証終)

上の仮定 $e \geq d+1$ がないと, 次のような反例がある。

例. non-singular irreducible curve Y と正整数 a_1, a_2 が次を満すように存在する。即ち 曲面 H_i ($i=1, 2$) の次数は a_i で $H_1 \cap H_2 = Y \cup Y'$ である。その時 このような条件を満す H_1, H_2 をどのようにとっても Y' は可約である。

たとえば Y を plane cubic curve とする。 $a_1=2$ $a_2=4$ とし, $H_1 = \pi \cup \pi'$ (π, π' は超平面), H_2 に対し $H_1 \cap H_2 = (\pi \cap H_2) \cup (\pi' \cap H_2)$ 。 $\pi \cap H_2 = Y \cup \ell$ (ℓ は line) であるので Y' は可約。

これから 次の問題を考える。

$\{P^3 \text{ の curve } \} / \sim$ は どういう set になるか?

そのために 定義より はじめよう。

定義 5.4 γ は P^3 の curve として $S = k[x_0, x_1, x_2, x_3]$ とし $M(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Coker} \left[\bigoplus_{\nu \in \mathbb{Z}} H^0(\mathcal{O}_{P^3}(\nu)) \rightarrow \bigoplus_{\nu \in \mathbb{Z}} H^0(\mathcal{O}_\gamma(\nu)) \right]$ ($\cong \bigoplus H^1(\mathcal{I}_\gamma(\nu))$)。 $M(\gamma)$ は graded S -module。
 任意の ν に対し $M(\gamma)_\nu$ は k 上 finite dimension,
 $\nu < 0$ なら $M(\gamma)_\nu = 0$, $\nu \gg 0$ なら $M(\gamma)_\nu = 0$ 。

定理 5.5 γ, γ' を P^3 の curve. その時 $\gamma \approx \gamma'$ なら ある整数 μ があって 次を満たす。

$$M(\gamma') = M(\gamma)(\mu) \quad \text{or} \quad M(\gamma)'(\mu)$$

但し $M(\gamma)(\mu)$ は $M(\gamma)$ の twisting であり

$$M(\gamma)' = \text{Hom}_k(M(\gamma), k)$$

定理の証明は後にして, まず 定理の系と, 例を述べておこう。

系 5.6 $\dim_k M(\gamma)$ と $M(\gamma)$ の interval ($= \max \{ \nu \mid M_\nu \neq 0 \} - \min \{ \nu \mid M_\nu \neq 0 \}$) は $\approx$ で不変。

例 1) $\gamma = \text{complete intersection} \Rightarrow M(\gamma) = 0$
 (i.e. $\gamma = H_1 \cap H_2$)

$$(\text{証}) \quad I_\gamma = I_{H_1} \oplus I_{H_2} = \mathcal{O}_{P^3}(-H_1) \oplus \mathcal{O}_{P^3}(-H_2)$$

より $H^1(I_\gamma(\nu)) = 0$ 。

2) $Y = \text{two skew lines} \Rightarrow M = k$

(証) exact sequence : $0 \rightarrow I_Y \rightarrow \mathcal{O}_{P^3} \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$

より, 任意の整数 ν に対し

$$0 \rightarrow I_Y(\nu) \rightarrow \mathcal{O}_{P^3}(\nu) \rightarrow \mathcal{O}_Y(\nu) \rightarrow 0 \text{ をとる。}$$

$\nu < 0$ ならば, $H^1(I_Y(\nu)) = 0$ 。 $\nu = 0$ なら, $h^0(\mathcal{O}_Y(\nu))$

$= 2$ より $h^1(I_Y(\nu)) = 1$ 。 $\nu = 1$ なら $h^0(\mathcal{O}_{P^3}(1))$

$= h^0(\mathcal{O}_Y(1)) = 4$ かつ $h^0(I_Y(1)) = 0$ ($\because Y$ を含む plane

はない)。故に $H^0(\mathcal{O}_{P^3}(1)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_Y(1)) \rightarrow 0$ 。 $\therefore$ $h^1(I_Y(1)) = 0$ 。

$\nu > 2$ に対し $H^0(\mathcal{O}_{P^3}(\nu)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_Y(\nu))$

は $H^0(\mathcal{O}_{P^3}(1))$ (resp. $H^0(\mathcal{O}_Y(1))$) により生成されるので

$H^0(\mathcal{O}_{P^3}(\nu)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_Y(\nu)) \rightarrow 0$ 。 よって $H^1(I_Y(\nu))$

$= 0$ ($\nu \geq 2$)。 (証終)

定理 5.5 の証明のため 注意と命題をのべる。

注意 5.7. Y が P^3 の curve の時 ω_Y を次のように

定義する。

$$\omega_Y = \text{Ext}_{\mathcal{O}_{P^3}}^2(\mathcal{O}_Y, \omega_{P^3}) \quad \text{その時}$$

1, F を locally free $\mathcal{O}_Y$ -module $\Rightarrow H^0(Y, F) \perp_{\text{dual}}$

$$H^1(Y, \check{F} \otimes \omega_Y)$$

2, $f: Y' \rightarrow Y$ を finite morphism $\Rightarrow f_* \omega_{Y'} =$

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_Y}(f_* \mathcal{O}_{Y'}, \omega_Y).$$

命題 5.8. $Y \sim Z$ (i.e. $Y \cup Z = H_a \cap H_b$)

$\Rightarrow$ 次の exact sequence がある。

$$0 \rightarrow \omega_Z (4-a-b) \rightarrow \mathcal{O}_{Y \cup Z} \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$$

(証) Y, Z の定義イデアルの sheaf を I_Y, I_Z とする

$$0 \rightarrow I_Y / I_Y \cap I_Z \rightarrow \mathcal{O}_{Y \cup Z} \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$$

一方, $I_Y / I_Y \cap I_Z = \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_{Y \cup Z}}(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_{Y \cup Z})$ である。

$Y \cup Z$ は complete intersection であるので $\omega_{Y \cup Z}$

$$= \mathcal{O}_{Y \cup Z} (a+b-4) \text{ 故に } \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_{Y \cup Z}}(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_{Y \cup Z})$$

$$= \underline{\text{Hom}}(\mathcal{O}_Z, \omega_{Y \cup Z} (4-a-b)) = \omega_Z (4-a-b).$$

(証終)

(定理 5.5 の証明) $Y \sim Z$ なら ある整数 μ に対して $M(Y) = (M(Z))'$ を証明すればよい。

$$\begin{aligned} M(Y) &= \text{Coker} \left[\bigoplus_{v \in \mathbb{Z}} H^0(\mathcal{O}_{Y \cup Z}(v)) \rightarrow \bigoplus_{v \in \mathbb{Z}} H^0(\mathcal{O}_Y(v)) \right] \\ &= \text{Ker} \left[\bigoplus_v H^1(\omega_Z (4-a-b+v)) \rightarrow \bigoplus_v H^1(\mathcal{O}_{Y \cup Z}(v)) \right] \\ &= \text{Coker} \left[\bigoplus_v H^0(\mathcal{O}_{Y \cup Z}(a+b-4-v)) \rightarrow \bigoplus_v H^0(\mathcal{O}_Z(a+b-4-v)) \right]' \\ &= (M(Z)(a+b-4))' \end{aligned}$$

(証終)

命題 5.8. の系 曲線 $Y_1, (Y_2)$ の次数と arithmetic

genus を d_1, p_1 (resp. d_2, p_2) とし $Y_1 \cup Y_2 = H_a \cap H_b$

とする。その時 次の 2つの関係式がある。

$$d_2 = ab - d_1$$

$$p_2 = -\frac{1}{2} ab(a+b-4) + d_1(a+b-4) + p_1$$

(証) Bezout の定理と, Riemann - Roch の定理を使って証明できる。

次の問題を考える。

$$\left\{ \text{curve} \subseteq \mathbb{P}^3 \right\} / \sim \xrightarrow{\Phi} \left\{ \begin{array}{l} \text{graded finite length} \\ S\text{-module } M \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \begin{array}{l} M \rightarrow M(D) \\ \text{(twisting)} \\ M \mapsto M' \text{ (dual)} \end{array}$$

すでにしるべたように 曲線 γ に対し $M(\gamma)$ の class を
対応させる重は well-defined である。この重に対し
2つの問題がある。

- a) Φ は injective か
b) $\text{image}(\Phi)$ は 何か

これについて 次の定理がある。

定理 (Apéry, Gaeta, Peshine - Szpiro)

γ or P^3 of curve $\epsilon + 3$

$$Y \approx \phi \Leftrightarrow Y: \text{projective Cohen Macaulay} \Leftrightarrow M(Y) = 0$$

例1 Y の定義 ideal を I_Y ($\subseteq S = k[x_0, x_1, x_2, x_3]$) とする

S/I_Y は projective Cohen-Macaulay

$\Leftrightarrow \text{depth}(S/I_Y)_P = 2 \Leftrightarrow H_P^i(S/I_Y) = 0$

これは 次の local cohomology の exact sequence から出てくる。

$$0 \rightarrow H_P^0(S/I_Y) \rightarrow S/I_Y \rightarrow \bigoplus_{v \in Z} H^0(\mathcal{O}_Y(v)) \rightarrow H_P^1(S/I_Y) \rightarrow 0$$

$$\parallel$$

$$M(Y)$$

今から E を P^3 上の rank 2 の vector bundle とし、 $H^0(E)$ の元 s に対し $(S)_0$ (下の注意参照) が curve Y を定める時、vector bundle E と $M(Y)$ との関係を調べよう。

注意: $H^0(E)$ の元 s に対し $(S)_0$ は次のように定める。

P^3 の十分小さな affine covering $\{U_\lambda\}_\lambda$ に対し、

$\mathcal{O}_{U_\lambda} \oplus \mathcal{O}_{U_\lambda} \cong E|_{U_\lambda}$ 。左側の base に対し、 $P(U_\lambda, \mathcal{O}_{P^3})$ の元

f_λ, g_λ が決まる。故にこの (f_λ, g_λ) ($\forall \lambda$) に対して

P^3 の subscheme が決まる。 $(S)_0$ の codimension が 2 で

ある時、 Y が locally complete intersection である。

命題 5.9. 上の $E, S, Y (= (S)_0$: 曲線) に対し

$$M(Y) \cong \bigoplus_{v \in Z} H^1(E(c - c_1)) \quad (\text{但し } c_1 H = c_1(E)$$

であり H は P^3 の超平面の rational equivalence class とする)

(証明) s は sheaf の morphism $\mathcal{O}_{P^3} \xrightarrow{s} E$ をみちく。この dual: $\check{E} \xrightarrow{\check{s}} \mathcal{O}_{P^3}$ をとり、その Kernel と Coker を K, c とおく。 $C = \mathcal{O}_Y$ は明らか。又 $\text{codim } Y = 2$

であるから homological theory より K は line bundle.

$\text{rank } E = 2$ より $\check{E} \simeq E(-c_1)$ 。故に $K = \mathcal{O}_{P^3}(-c_1)$ 。

よって 次のような exact sequence がある。

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{P^3}(-c_1) \rightarrow \check{E} \xrightarrow{\check{s}} \mathcal{O}_{P^3} \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccc} & & \nearrow \\ & I_Y & \\ & \nwarrow & \\ 0 & & 0 \end{array}$$

$$\text{故に } M(Y) = \text{Coker} \left(\bigoplus_{\nu} H^0(\mathcal{O}_{P^3}(\nu)) \rightarrow \bigoplus_{\nu} H^0(\mathcal{O}_Y(\nu)) \right)$$

$$= \bigoplus_{\nu} H^1(I_Y(\nu)) = \bigoplus_{\nu} H^1(\check{E}(\nu)) = \bigoplus_{\nu} H^1(E(\nu - c_1))$$

(証終)

系 5.10. 任意の整数 l と $H^1(E(l))$ の元 s に対し,

$$\text{codim } (S)_0 = 2 \text{ なら } M(Y) = \bigoplus_{\nu \in \mathbb{Z}} H^1(E(\nu)) [l - c_1]$$

(但し $Y = (S)_0$)

定理 5.11. E を P^3 上の rank 2 の vector bundle とし

l_1, l_2 を整数とする。 $s_i \in H^0(E(l_i))$ ($i=1, 2$) に対し

$\text{codim } Y_i = 2$ ($Y_i = (s_i)_0$) の時 $Y_1 \simeq Y_2$

この定理を証明するために 次の命題を必要とする。

命題 5.12. curve $Y (\subseteq P^3)$ に対し, I_Y をその定義イ

デアルとする。その時 次の条件を満たす整数 M_0 が存在す

る。 M_0 より大きい任意の整数 M に対し 十分一般の元 s が

($\in H^0(I_Y(M))$) をとると, surface H', H'' (f, g に対応する surface) に対し, $H' \cap H'' = Y \cup X$ であり, Y, X は line である。

(証明) については [11] を見よ。

(定理 5.11. の証明) まず次のような exact sequence がある。

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-c_1-2l_1) \longrightarrow \mathcal{E}(-l_1) \xrightarrow{\tilde{s}_1} I_{Y_1} \longrightarrow 0.$$

但, $c_1(E) = c_1 H$ で H は 超平面の rational equivalent class。上の命題より 十分大きい M に対し $\Gamma(I_{Y_1}(M))$ の元 $\tilde{s}', \tilde{s}''$ が存在して $H' \cap H'' = Y_1 \cup X_1$ である。(H', H'' はそれぞれ $\tilde{s}', \tilde{s}''$ に対応する 超曲面) から Y_1 と X_1 は line である。一方 exact sequence:

$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(c_1-2l_1+M) \longrightarrow \mathcal{E}(-l_1-c_1+M) \longrightarrow I_{Y_1}(M) \longrightarrow 0$ より $\tilde{s}', \tilde{s}''$ ($\in H^0(I_{Y_1}(M))$) に 像をもつ $H^0(\mathcal{E}(-l_1-c_1+M))$ の元 s', s'' とする。今 $S = k[x_0, x_1, x_2, x_3]$ を graded ring を考え, $\mathbb{P}^3$ 上の coherent sheaf $\mathcal{F}$ に対し, $\Gamma_*(\mathcal{F}) = \bigoplus_i H^0(\mathcal{F}(i))$ を考える時, これは graded S -module となる。そこで s_1 により graded S -module の homomorphism $\Gamma_*(\mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma_*(I_{Y_1})$ ができる。その時 次の事実を必要とする。

Claim: $I_{X_1} = \text{Ann}(\Gamma_*(E)/(s_1, s', s''))$ (I_{X_1} は X_1 の定義 ideal)

(証明) $H' \cap H''$ の homogeneous ideal $I_{H' \cap H''} = S/(\bar{s}, \bar{s}'')$
 $\Gamma_*(I_{Y_1})$ は Y_1 の homogeneous ideal であり X_1 と Y_1 は lie より $I_{X_1} = \text{Ann}(I_{Y_1}/I_{H' \cap H''})$ 。これより明らか。

(定理 5.11 の証明の続き) 今 上の証明において s_1 の代りに s' を考えて 同じ議論 を続けると次のことを得る。まず $Y' = (s')$ とし exact sequence:

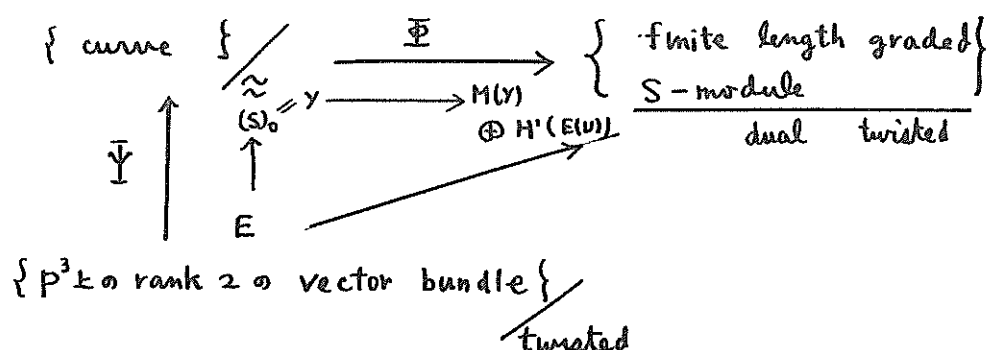
$$0 \longrightarrow 0(c_1 + 2l_1 - 2m) \longrightarrow \check{E}(l_1 + c_1 - m) \longrightarrow I_{Y'} \longrightarrow 0$$

より導かれる exact sequence により s_1 に対して $\bar{s}_1 \in H^0(I_{Y'}(m))$, s'' に対して $\bar{s}'' \in H^0(I_{Y'}(2m - 2l_1 - c_1))$ が対応する。 $\bar{s}_1, \bar{s}''$ の超曲面を $\bar{H}_1, \bar{H}''$ とする時,
 $\bar{H}_1 \cap \bar{H}'' = Y' \cup Z$ であり Y' と Z は lie。

一方 上の claim より $I_Z = \text{Ann}(\Gamma_*(E)/(s', s_1, s''))$ であるので $Z = X_1$ 。故に $Y_1 \approx Y'$ 。次に s_1, s', s'' の代りに s_2, s', s'' を考える。すると議論の前半から Y_2 と X_2 は lie が出る。 $(I_{X_2} = \text{Ann}(\Gamma_*(E)/(s_2, s', s'')))$ 。後半から X_2 と Y' は lie。よって $Y_1 \approx Y_2$ 。

(証明終)

上の定理により 次のような diagram をえる。



問題 c) Ψ は surjective か

注意 Ψ は injective ではない

例: $E = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(k)$, $E' = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(n)$ とおき, $k \neq \pm n$ とする。この時 任意の整数 ν に対し, $E \perp E'(\nu)$ であり, $\gamma_k \approx \gamma_n$ 。

今 $M(\gamma) = k$ とする curve γ の例をあげる。

- i) $\gamma = 2$ disjoint lines (既に述べた)
- ii) $\deg \gamma = 4$ で $g(\gamma) = 0$ なる irreducible non-singular curve.

(証明) $0 \rightarrow I_Y(\nu) \rightarrow \mathcal{O}_{p^3}(\nu) \rightarrow \mathcal{O}_Y(\nu) \rightarrow 0$

に対し $\nu=0$ の時 $H^1(I_Y) = 0$ 。 $\nu=1$ なら $h^0(\mathcal{O}_{p^3}(1)) = 4$
 $h^0(\mathcal{O}_Y(1)) = 5$ で $\gamma \in$ 含む plane はないから $h^1(I_Y) = 1$ 。

$\nu=2$ なら $h^0(\mathcal{O}_{P^3}(1))=10$, $h^0(\mathcal{O}_Y(2))=9$. 今 Y を含む quadric surface Q の存在を調べる. Q が non-singular の時, $Y = (1, 3)$ 型 ($\sim (2, 0)$ 型) ならよく, このような Q は unique (unique でないなら, Y の genus は 1 になる). Q が singular の時, 条件を満たす non-singular curve はない. よって (ii) より明らか.

iii) $\deg Y = 5$ で $\text{genus}(Y) = 1$ の irreducible non-singular curve.

(証明) まず Y は P^2 に含まれていない. 一方 exact sequence:

$$0 \longrightarrow H^0(I_Y(\nu)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{P^3}(\nu)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_Y(\nu)) \longrightarrow H^1(I_Y(\nu))$$

がある. $\omega_Y = \mathcal{O}_Y$ より $h^0(\mathcal{O}_Y(\nu)) = 5\nu$ ($\nu \geq 1$). $\nu=0$ の時 $h^1(I_Y) = 0$. $\nu=1$ の時 $h^0(\mathcal{O}_{P^3}(1)) = 4$, $h^0(\mathcal{O}_Y(1)) = 5$ かつ $Y \not\subset P^2$ より, $h^1(I_Y(1)) = 1$. $\nu=2$ の時, Y を含む 2次曲面 ない. ($\because Q$ が non-singular なら, degree と genus の関係式より存在せず, 同様に singular の時もない. よって $h^1(I_Y(2)) = 0$. 次に $\nu \geq 3$ に対して $h^1(I_Y(\nu)) = 0$ を証明すればよい. そのために次を示せばよい.

Claim: $\nu \geq 3$ に対し, $\bigoplus^4 \mathcal{O}_{P^3}(\nu-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{P^3}(\nu)$

$(\mathcal{O}_{P^3}(\nu-1) \xrightarrow{x_i} \mathcal{O}_{P^3}(\nu) \quad i=0, 1, 2, 3)$ は surjective

(証明) $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ の Koszul complex を考える。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \begin{array}{c} \downarrow 0 \\ \nearrow 0 \end{array} & & & \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \bigoplus^4 \mathcal{O}(-2) & \longrightarrow & \bigoplus^6 \mathcal{O}(-1) \longrightarrow \bigoplus^4 \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}(1) \longrightarrow 0 \\
 & & & \nearrow & & \searrow & \nearrow \\
 & & & \mathcal{F} & & \mathcal{E} & \\
 & & & & & \downarrow 0 & \nearrow 0
 \end{array}$$

よって $H^1(\mathcal{E}(\nu-1)) = 0$ をいえばよいが、これは

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \bigoplus^4 \mathcal{O}(-2) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0 \quad \text{より明らか。}$$

(証明終)

References

1. Bertini, Intorno ad alcuni problemi... Atti Acc. Sci. Torino 26 (1890)
2. Castelnuovo, G., Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenente ad una curva algebrica. Rend. Circ. Mat. Palermo 7 (1893)
3. Enriques, F. and Chisini, O., Courbes et fonctions algébriques d'une variable. Paris, Gauthier-Villars (1926)
4. Halphen, G., Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques. J. éc. polyt. 52 (1882) 1-200
5. Hartshorne, R., Residues and Duality. Springer Lecture Notes 20 (1966)
6. Hartshorne, R., Curves with high self-intersection on algebraic surfaces. Publ. Math. IHES 36 (1969) 111-125
7. Kleiman, S. L., Geometry on Grassmannians and applications to splitting bundles and smoothing cycles. Publ. Math. IHES 36 (1969) 281-298
8. Manin, Yu. I., Cubic forms. Algebra, Geometry Arithmetic. North-Holland, Amsterdam (1974)
9. Mumford, D., Pathologies IV. Amer. J. Math. 97 (1975) 847-849
10. Noether, M., Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven. Kon. Ak. Wiss. Berlin (1883)
11. Peskine, C. and Szpiro, L., Liaison des variétés algébriques, I. Invent. Math. 26 (1974) 271-302
12. Saint-Donat, B., On Petri's analysis of the linear system of quadrics through a canonical curve. Math. Ann. 206 (1973) 157-175
13. Samuel, P., Old and new results on algebraic curves, Tata Inst. Lecture Notes
14. Schaps, M., Non-singular deformations of space curves, using determinantal schemes, Thesis, Harvard Univ. (1972)
15. Serre, J. -P., Groupes algébriques et corps de classes. Hermann, Paris (1959)
16. Severi, F., Vorlesungen über algebraische Geometrie (tr. E. Löffler) Leipzig (1921)

発行者 数理解析レクチャー・ノート刊行会

連絡先 〒 606 京都市左京区北白川追分町

京大数理解析研究所

210号室 気付

