

平面曲線の非存在定理について

埼玉大学理学部 酒井文雄

次数  $d$  の平面曲線はどのような特異点を許容するかという古典的な問題を考えてみたい。この問題の答としては存在定理と非存在定理が考えられる。可能な特異点の分類表が完成すれば理想的であるが、 $d$  が大きい場合にはそれは事実上不可能である。5次曲線の特異点の分類については難波氏の著作 [N] を、6次曲線の特異点の分類についてはト部氏の論文 [U] を参照されたい。本稿では平面曲線の総ミルナー数に焦点を合わせて非存在定理について考察する。詳細については、[S] および [MS] を参照していただきたい。

$C$  を  $d$  次の複素平面曲線とする。 $C$  の特異点  $p$  について  $m_p$  で重複度を  $r_p$  で局所分枝の個数を表わすことにする。特異点  $p$  は  $r_p = 1$  の時に尖点と呼ばれる。特に局所的に  $x^2 - y^3 = 0$  で定義される尖点は通常尖点と呼ばれる。

定義 曲線  $C$  の  $p$  における局所定義方程式を  $f(x, y)$  とすると、 $C$  の  $p$  におけるミルナー数は次式で与えられる。

$$\mu_p = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x, y\} / (f_x, f_y)$$

$C$  のすべての特異点のミルナー数の総和を  $\mu(C)$  で表わし  $C$  の総ミルナー数と呼ぶ。次の種数公式がある。

$$\mu(C) = d(d-3) + e(C)$$

ここで  $e(C)$  は  $C$  の位相的オイラー数．したがって， $C$  の既約成分の個数を  $r$  とすれば不等式  $\mu(C) \leq (d-1)(d-2) + r - 1$  が成り立つ．

存在定理について触れておく．平面曲線を構成する方法として次のようなものが知られている．1) 曲線を定義する  $d$  次の3変数斉次多項式を書き下す．2) 双対曲線の利用．3) 高い次元の射影空間からの射影．4) 射影平面の  $BLOW-UP \& BLOW-DOWN$ ．5) 変形理論の援用．6) その他．最近  $tom Dieck$  は4)の方法で3個の尖点を持つ有理尖点曲線の系列を構成した．5) に関して次の結果を引用しておく．

定理 (Shustinn [Sh])  $d$  次平面曲線  $C$  が与えられ， $\mu(C) \leq 4d-5$  が成り立っているとする．このとき， $C$  の各特異点の局所的な変形を実現する  $d$  次曲線が存在する．

## 1. 非存在定理

平面曲線の非存在を証明するには大別すると以下の3通りの手段がある．a) Plücker 関係式 b) 宮岡型不等式 c) 被覆曲面の不変量．この章では b) の宮岡型不等式から得られる存在条件を

2 通り述べる．まず対数的宮岡不等式を引用しておく．

定理 (LOG-宮岡不等式)  $S$  は非特異射影曲面,  $D$  は  $S$  上の正規交差因子であるとする．ある自然数  $n$  について,  $|n(K+D)| \neq \emptyset$  ならば, 次の不等式が成立する．ここで  $K$  は  $S$  の標準因子である．

$$(K+D)^2 \leq 3e(S-D).$$

与えられた  $d$  次平面曲線  $C$  の特異点解消を  $S$  とし,  $C$  の全逆像を  $D$  として上の結果を適用する． $C$  の特異点  $p$  について,  $m_1, \dots, m_n$  で  $p$  の無限近傍点の重複度列を,  $E_p$  で  $p$  上の例外曲線の和を表わす．そこで次の不変量を定義する．

$$\begin{aligned}\eta_p &= \sum (m_i - 1) \\ \omega_p &= -E_p^2 \\ I_p &= \omega_p + r_p - 3 + \eta_p - \mu_p / m_p.\end{aligned}$$

注意 このとき  $I_p \geq 0$  が成立する．また  $C$  の補集合の対数的小平次元を  $\bar{\kappa}$  とすると, 定義から  $\bar{\kappa} = -\infty \iff$  すべての自然数  $n$  について,  $|n(K+D)| = \emptyset$  .

定理 A  $d$  次平面曲線  $C$  について  $C$  の補集合の対数的小平次元が非負ならば次の不等式が成立する．

$$\sum_{p \in \text{Sing}(C)} \left\{ \left(2 + \frac{1}{m_p}\right) \mu_p + I_p \right\} \leq 2d^2 - 3d.$$

系  $\nu$  で  $C$  の特異点の重複度の最大値を表わすことにすると，定理と同じ仮定の元で  $\mu(C)$  に関する次の評価を得る．

$$\mu(C) < \frac{\nu}{2\nu + 1}(2d^2 - 3d).$$

特に  $C$  が既約で特異点を持つ場合にはこの評価は無条件で成り立つ．

Orbifold 版の宮岡不等式がある．[KNS] 参照．これを用いて単純な特異点のみを許容する平面曲線の総ミルナー数の上限が与えられる．

定義 ここでは次のような特異点を単純特異点とすることにする．

L T S (A D E 特異点)

$$\begin{aligned} x^2 + y^{n+1} = 0, \quad y(x^2 + y^n) = 0, \quad x^3 + y^4 = 0, \\ x(x^2 + y^3) = 0, \quad x^3 + y^5 = 0. \end{aligned}$$

この場合には  $z^2 = f(x, y)$  で定義される曲面の特異点は商特異点で  $\mathbb{C}^2 / G(p)$  の形をしている．

L C S

$$x^4 + y^4 = 0, \quad x(x^2 + y^4) = 0 \text{ 等}$$

$z^2 = f(x, y)$  で定義される特異点が単純楕円型又はカスプ型特異点になるもの．

定理 B (小林亮一 - 酒井)  $C$  が単純特異点のみを持つ  $d$  次平面曲線のときには次の不等式が成立する．ただし  $d \geq 6$  とする．

$$\mu(C) \leq \frac{5}{6} d^2 - d + \sum_{p \in \text{LTS}} \frac{1}{|G(p)|} - \#(\text{Sing } C)$$

注意 次数  $d$  が偶数の場合にはこの結果は既知である． [ I ] 参照．

注意 最近宮岡不等式の帰結として通常特異点に有用な評価式が吉原氏によって得られた． [ Y 3 ] 参照．

## 2. 巡回被覆曲面

$C$  を  $d$  次平面曲線， $k$  を  $d$  の約数とする．このとき  $C$  で分岐する射影平面の被覆曲面  $W$  を作ることができる． $\pi: \tilde{W} \rightarrow W$  を  $W$  の特異点除去とすると， $h^{1,1}(\tilde{W}) > \#\{\pi \text{に関する例外曲線}\}$  という事実から不等式

$$\sum_{q \in \text{Sing}(W)} (\mu_q - c_q) < 10 \chi(O_W) - K_W^2 + 2q(\tilde{W})$$

を証明することができる．ここで各項は以下のような意味を持つ．

$$q(\tilde{W}) = \dim H^1(\tilde{W}, O) \quad W \text{ の不正則数}$$

$$\mu_q = q \text{ のミルナー数}$$

$$c_q = 2 \dim (R^1 \pi_* O_{\tilde{W}})_q - \dim H^1(\pi^{-1}(q), \mathbb{R})$$

$W$  の特異点は  $C$  の特異点の上に唯一点載っている． $W$  の特異点  $q$  が  $C$  の特異点  $p$  に対応しているとすると関係式

$$\mu_q = (k - 1)\mu_p$$

が成り立つ．したがってもし  $q(W) = 0$  ということがあらかじめ分かれば上の不等式から  $\mu(C)$  の上限を得ることができる．

定理 C  $C$  は  $d$  次平面曲線とし， $k$ ， $W$  は上のようにとる．もし  $W$  の不正則数が消滅していれば次の不等式が成立する．

$$\mu(C) < \frac{4k+1}{6k} d^2 - \frac{3}{2} d + \frac{k}{k-1} \sum_{q \in \text{Sing } W} c_q.$$

さて  $W$  の不正則数はいつ消滅するのであろうか．

命題 以下の場合に  $W$  の不正則数は消滅する．

- a)  $k = 2$  で  $C$  の特異点は  $ADE$  特異点のみの場合，
- b)  $k$  が素数の中で  $C$  が既約の場合，
- c)  $C$  のすべての特異点  $p$  について局所アレクサンダー多項式

$\Delta_p(t)$  の根は 1 を除いて 1 の  $k$  乗根ではない場合．

a) の場合には  $W$  の特異点は有理 2 重点のみということから不正則数の消滅が従う．b) は Zariski の定理である．

注意 局所アレクサンダー多項式は  $(C, p)$  のミルナー・ファイバーに関するモノドロミーの特性多項式として定義される．[M] 参照．

例えば， $p$  が結節点の時， $\Delta_p(t) = t - 1$ ， $p$  が通常尖点の場合，

$\Delta_p(t) = t^2 - t + 1$  である.

定義  $V = \{x, y, z \in \mathbb{C}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}$  と置く. ここで  $F$  は  $C$  を定義する斉次多項式. このとき,  $\lambda = \exp(2\pi i/d)$  は  $V$  に作用する.  $\lambda$  の  $H^1(V, \mathbb{C})$  への作用の特性多項式  $\Delta_C(t)$  を  $C$  の大域的アレキサンダー多項式と呼ぶ.

c) の証明には以下の事実を使う. 1)  $\Delta_C(t)$  の根は 1 の  $k$  乗根, 2)  $W$  の不正則数  $= \frac{1}{2} \{ \Delta_C(t) = 0 \text{ の根で } 1 \text{ でないものの個数} \}$ , 3)  $\Delta_C(t)$  の根はどれかの  $\Delta_p(t)$  の根. 3) の事実は  $C$  が既約の場合には以前から知られていたが ([L], [K]), 一般の場合にも成立することが最近 [LV] によって証明された. 次の事実は  $C$  が既約の場合には Zariski によって発見された.

系  $C$  が  $d$  次平面曲線で結節点および通常尖点のみを特異点とする場合,  $k$  が 6 の倍数でないならば  $W$  の不正則数は消滅する.

定理 C の系 ([H], [I], [Y1])  $C$  を ADE 特異点のみを持つ  $d$  次平面曲線とする. このとき

$$\mu(C) < \frac{3}{4}d^2 - \frac{3}{2}d + 2 \quad d \text{ 偶数}$$

$$\mu(C) < \frac{3}{4}d^2 - \frac{3}{2}d + \frac{1}{4} \quad d \text{ 奇数}$$

注意 この系の証明は  $d$  が偶数の場合には  $C$  で分岐する 2 重被覆を考えればよいのであるが， $d$  が奇数の場合には適当な直線  $L$  を付け加えて  $C \cup L$  で分岐する 2 重被覆を考えるという吉原氏のアイデアが必要である． $C$  が 3 重尖点，2 重尖点，結節点のみを持つ曲線の場合， $C$  が既約で  $d$  が 3 の倍数の時には 3 重被覆を使った評価式が [Y2] で得られている．証明には上記の命題の b) が使われた．上記の命題の c) を用いると，一般の  $d$  の場合にも適当な直線を加えた所で分岐する 3 重被覆を考えることによって  $C$  の総ミルナー数の評価を得ることが可能である．[S] 参照．

定義 特異点  $p$  を解消した時に現われる例外曲線を  $E_1, \dots, E_n$  とする． $\pi^{-1}(p)$  の近傍で， $\pi^*(C) = \tilde{C} + \sum e_s E_s$ ， $\tilde{K} = \pi^*(K) + \sum f_s E_s$  となるとして，次の不変量を導入する．

$$\xi_p(k, i) = \frac{1}{2} \sum_{s, t} [e_s i / k] (f_t - [e_t i / k]) E_s E_t.$$

$W$  の不正則数の別の表現から次の評価式が得られる．

定理 D  $C$  は  $d$  次平面曲線であるとし， $k$ ， $W$  は上と同様とする．

$W$  の不正則数が消滅していれば，

$$\sum_{p \in \text{Sing } C} \xi_p(k, i) \leq 1 + ie(ie - 3)/2$$

が  $0 < i < k$  の範囲の  $i$  に対して成立する．ただし， $e = d/k$ ．



### 3. 応用

平面曲線の存在条件として，定理 A，定理 B，定理 C，定理 D と多少趣の異なるものが得られた．この章ではこれらの定理の有効性の比較をしたい．

まず通常尖点のみをもつ平面曲線  $C$  を考えてみる． $C$  の通常尖点の個数を  $s(C)$  で表わすことにする． $d$  次曲線における  $s(C)$  の最大値を  $s(d)$  としておく．P l ü c k e r 関係式からは不等式

$$s(d) \leq d(d-1)/3$$

が従う．定理 B を適用すると次のより良い評価が得られる．

$$s(d) \leq \left[ \frac{5}{16}d^2 - \frac{3}{8}d \right]$$

右辺  $M(d)$  は  $d$  が小さい時には次のような値をとる．

|        |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
|--------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $d$    | 6 | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| $M(d)$ | 9 | 12 | 17 | 21 | 27 | 33 | 40 | 47 | 56 |

$d$  が偶数の場合には上の評価は  $[I]$  で得られていることを注意しておく． $d = 7, 8, 13, 14$  の時は定理 D を用いると評価は改善される． $s(7) \leq 10$ ， $s(8) \leq 15$ ， $s(13) \leq 45$ ， $s(14) \leq 55$ ． $[Z, p. 222]$  参照．この問題には定理 A，定理 C からより良い評価は得られない．

次に  $A_n$  型の特異点 1 個のみを持つ  $d$  次曲線  $C$  を考えてみる．このとき定理 B による評価は

$$n + \frac{n}{n+1} \leq \frac{5}{6}d^2 - d$$

であり，これは定理 C の系から得られる評価より悪い．

定理 A の利点はどのような特異点に対しても成り立つことである．尖点のみを許容する曲線（尖点曲線と呼ぶ）に定理 A を適用してみよう．この場合には， $\mu(C) = (d-1)(d-2)$  である事に注意して不等式

$$d < 3\nu + 1 + \frac{4g+2}{3}$$

を示すことができる．ここで  $g$  は  $C$  の幾何種数とする．また  $\nu$  は特異点の重複度の最大値であった． $g=0$  のときすなわち有理尖点曲線の場合上の不等式は  $d \leq 3\nu+1$  になるが，これは次のように改善される（[MS]）．

定理  $d$  次の有理尖点曲線に対しては  $d < 3\nu$  が成立する．

この不等式は単尖点という条件の元で吉原，角田の両氏によって予想された．角田氏は  $d \leq 3\nu+2$  を示し，吉原氏は  $\nu=2$  のときと  $\nu=3$  で  $d$  が 3 の倍数のときに予想を解決した．証明を簡単に振り返ってみよう． $d \geq 3\nu$  と仮定して矛盾を導く．定理 A（尖点曲線ときには等号を含まない不等式が成り立つ）によって可能な場合は

$$\begin{array}{ll} \sum I_p < 5 - \frac{2}{\nu} & d = 3\nu \text{ の場合} \\ \sum I_p < 2 & d = 3\nu + 1 \text{ の場合} \end{array}$$

である．ところで  $I_p < 5$  を満たす特異点は分類することができる．

そこで  $C$  が有理曲線であるという条件を使うと結局以下の場合に曲線の非存在を証明すればよいことが判明する．

$$(a) \quad d = 6, 7 \quad \nu = 2$$

$$(b) \quad d = 9 \quad \nu = 3$$

$$(c) \quad d = 10 \quad (3, 37) \text{型尖点 1 個}$$

$$(d) \quad d = 12 \quad (4, 37) \text{型尖点 1 個と通常尖点 1 個}$$

$$(e) \quad d = 15 \quad (5, 46) \text{型尖点 1 個と通常尖点 1 個}$$

場合 (a) は定理 C の系によって，場合 (b) は定理 C を 3 重被覆に用いることによって除外される．場合 (d) と場合 (e) は定理 C をそれぞれ 4 重被覆と 5 重被覆に適用して矛盾が導かれる．場合 (c) は一度 2 重被覆をとってから  $\log$ -宮岡不等式を用いる事によって除外される．

予想 楕円尖点曲線に対しては  $d \leq 3\nu$  が成立する．

## References

- [H] Hirzebruch, F.: Singularities of algebraic surfaces and characteristic numbers. *Contemp. Math.* **58**, 141–155 (1984)
- [I] Ivinskis, K.: Normale Flächen und die Miyaoka-Kobayashi Ungleichung. Diplomarbeit Bonn (1985)
- [K] Kohno, T.: Differential forms and the fundamental group of the complement of hypersurfaces. *Proc. Symp. Pure Math.* **40**, 655–662 (1983)
- [KNS] Kobayashi, R., Nakamura, S. and Sakai, F.: A numerical characterization of ball quotients for normal surfaces with branch loci. *Proc. Japan Acad.*, **65**, Ser. A, 238–241 (1989)
- [L] Libgober, A.: Alexander polynomial of plane algebraic curves and cyclic multiple planes. *Duke Math. J.* **49**, 833–851 (1982)
- [LV] Loeser, F. and Vaquié, M.: Le polynôme d'Alexander d'une courbe plane projective. *Topology* **29**, 163–173 (1990)
- [M] Milnor, J.: Singular points of complex hypersurfaces. *Ann. Math. Studies* **61** Princeton Univ. Press 1968.
- [MS] Matsuoka, T. and Sakai, F.: The degree of rational cuspidal curves. *Math. Ann.* **285**, 233–247 (1989)
- [N] Namba, M.: Geometry of projective algebraic curves. New York, Basel: Dekker 1984
- [S] Sakai, F.: Singularities of plane curves. Preprint
- [Sh] Shustin, E.: Versal deformations in the space of planar curves of fixed degree. *Func. Anal. Appl.* **21**, 90–91 (1987)
- [U] Urabe, T.: Dynkin Graphs and combinations of singularities on plane sextic curves. *Contemp. Math.* **90**, 295–315 (1989)
- [Y1] Yoshihara, H.: A note on the existence of some curves. In *Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, pp. 801–804. Kinokuniya, Tokyo 1987

- [Y2] Yoshihara, H.: Plane curves whose singular points are cusps and triple coverings of  $\mathbf{P}^2$ . *Manuscripta Math.* **64**, 169–187 (1989)
- [Y3] Yoshihara, H.: Double coverings of  $\mathbf{P}^2$ . *Proc. Japan Acad., Ser. A*, **66**, 233–236 (1990)
- [Z] Zariski, O.: *Algebraic Surfaces (Second Supplemented Edition)*. Springer-Verlag 1971