

CLASSIFICATION OF TORIC MANIFOLDS OVER AN n -CUBE WITH ONE VERTEX CUT

大阪市立大学・大学院理学研究科 栢田幹也 (Mikiya Masuda)

Graduate School of Science

Osaka City University

蓮井翔, 鋤田英也, Seonjeong Park の3氏との共同研究 ([10]) の結果を紹介する.

1. 背景および研究の動機

本稿では, トーリック多様体と言えばコンパクトで非特異を仮定し, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, S^1 を長さ1の複素数全体とする. 定義より複素 n 次元のトーリック多様体 X は $(\mathbb{C}^*)^n$ 作用をもつが, X の $(S^1)^n$ 作用による軌道空間 $X/(S^1)^n$ は, それ自身およびそのすべての面が可縮な n 次元角付多様体となる. X が射影的である場合, モーメント写像を通して軌道空間は単純凸多面体と同一視できる. 射影的でなくても軌道空間が単純凸多面体 (と角付多様体として同相) になることは多々ある. 例えば $n \leq 3$ のときはその場合であるが, 一般には必ずしも単純凸多面体となるとは限らない ([17]). 軌道空間が角付多様体 Q であるトーリック多様体を, Q 上のトーリック多様体とよぶ.

[代数多様体としての分類]. トーリック多様体の代数多様体としての分類 (双正則による分類) は扇の分類に帰着され, その事実を用いてトーリック多様体の代数多様体としての分類がある条件下でなされている. 例えば $n = 1$ の場合 (Q は閉区間), X は $\mathbb{C}P^1$ しかない. $n = 2$ の場合 (Q は多角形), X は $\mathbb{C}P^2$ または Hirzebruch 曲面 F_a (a : 自然数) を何度か blow-up したものしかない ([15] 参照). $n = 3$ ではピカル数が5以下の場合 [15] に分類結果があるが, 一般には分類されていないようである. 一方, 次元に関わらずピカル数が1のとき (Q が n 単体と同値) X は $\mathbb{C}P^n$ しかなく, ピカル数が2のとき (Q が二つの単体の積と同値) X は射影空間上の射影空間束の全空間となり, 代数多様体として分類がなされている ([11]). ピカル数が3のとき (Q が三つの単体の積は例であるがそれ以外にもある) も分類されている ([6] 参照). その他の場合のトーリック多様体の代数多様体としての分類に関しては [14], [16] を参照.

[微分可能多様体としての分類]. Hirzebruch 曲面 F_a (a : 自然数) たちは, a が異なれば代数多様体として同型ではないが, F_a と F_b が微分同相である必要十分条件は $a \equiv b \pmod{2}$ である. この例が示すように, 微分同相での分類は代数多様体としての分類より一般に粗い. 微分同相による分類に関しては, ポアンカレ予想のトーリック多様体版と言える以下の問題がある.

コホモロジー剛性問題 ([13]). 整係数のコホモロジー環が (次数付環として) 同型であるトーリック多様体は微分同相か.

トーリック多様体に限らなければ, 整係数コホモロジー環が同型だが微分同相でない閉多様体の例は沢山あるが, トーリック多様体という非常に対称性が高い多様体に限れば, 整係数コホモロジー環が微分同相を判定する完全な不変量かも知れない. 上記の問題に関して部分的肯定的結果は幾つか知られているが, 反例は知られていない.

Hirzebruch 曲面は $\mathbb{C}P^1$ 上の 2 つの直線束の射影化として得られるが, この一般化として $\mathbb{C}P^1$ 射影化を繰り返して得られる Bott tower

$$B_n \rightarrow B_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow B_2 \rightarrow B_1 \rightarrow B_0 = \{1 \text{ 点} \}$$

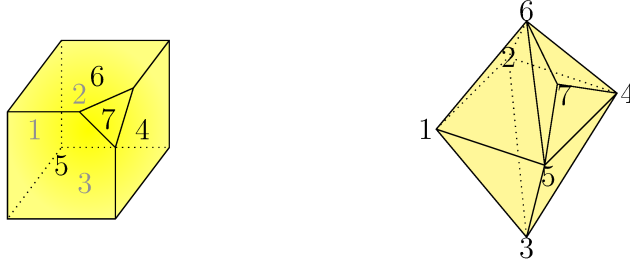
がある ([9]). ここで, 各 $B_k \rightarrow B_{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) は B_{k-1} 上の 2 つの直線束を射影化して得られる $\mathbb{C}P^1$ 束である. 多様体 B_k を Bott 多様体とよぶ. B_2 は Hirzebruch 曲面. Bott 多様体の族に対してコホモロジー剛性問題がよく研究され, 多くの肯定的結果が得られているが, 完全な解決には至っていない ([3], [5], [12], [13]). なお, Bott 多様体 B_n は n -cube I^n 上のトーリック多様体で, I^n 上のトーリック多様体はすべて Bott 多様体である. また, Bott 多様体はすべて射影的である.

複素 1 次元または 2 次元のトーリック多様体はすべて射影的であるが, 複素 3 次元になると射影的でないトーリック多様体が沢山存在する ([1], [7], [18] 参照). 射影的でないトーリック多様体で, 最初に発見されかつ一番簡明なものは Oda's 3-fold とよばれるもので, 立方体 I^3 の頂点カット $\text{vc}(I^3)$ 上のトーリック多様体である.

上で述べたように, I^n 上のトーリック多様体はすべて Bott 多様体である. それを一つの不動点で blow-up したものは, n -cube I^n の頂点カット $\text{vc}(I^n)$ 上のトーリック多様体となるが, Bott 多様体は射影的ゆえ, その 1 点 blow-up も射影的である. したがって, Oda's 3-fold は Bott 多様体の blow-up としては得られない $\text{vc}(I^3)$ 上のトーリック多様体ということになる. そこで, 一般に $\text{vc}(I^n)$ 上のトーリック多様体を分類するのは意味があることと思ひ, それを実行したのが, 蓮井翔, 鋤田英也, Seonjeong Park の 3 氏との共同研究 ([10]) である.

2. 主結果

以下 $n \geq 3$ とする. n -cube I^n の頂点カット $\text{vc}(I^n)$ の双対である単体的凸多面体は, 十字多面体 (cross polytope) の一つの facet の中心を引っ張り上げて得られるもので, その境界複体 $\mathcal{C}_n$ は $2n+1$ 個の頂点をもつ. この $2n+1$ 個の頂点に番号をふる. まず,引っ張り上げて生じた頂点は I^n の頂点をカットして得られた facet に対応するが, それに番号 $2n+1$ をふる. $\mathcal{C}_n$ には, 番号 $2n+1$ の頂点の $\mathcal{C}_n$ におけるリンクと交わりをもたない $(n-1)$ 単体 σ がただ一つだけある. その頂点に番号 $1, 2, \dots, n$ をふる. 残りの n 個の頂点の番号 $n+1, n+2, \dots, 2n$ は, 番号 i ($1 \leq i \leq n$) の頂点と番号 $n+i$ の頂点が 1 単体を張らないように決める. このようにすれば, 残りの n 個の頂点の番号は単体 σ の番号を決めればただ一通りに決まる ($n=3$ の下図参照).

FIGURE 1. $\text{vc}(I^3)$ と $\mathcal{C}_3 = \partial(\text{vc}(I^3))^*$

X を $\text{vc}(I^n)$ 上のトーリック多様体とする. X の扇 Δ_X を定める単体複体は $\mathcal{C}_n$ である. $\mathcal{C}_n$ の頂点 i に対応する Δ_X の 1 次元錐を定める素な整数ベクトルを $\mathbf{v}_i$ と表すと, $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ は扇 Δ_X が存在している格子の基となっているので, 整数を成分とする n 次行列 A_X が

$$(\mathbf{v}_{n+1}, \mathbf{v}_{n+2}, \dots, \mathbf{v}_{2n}) = -(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)A_X$$

として定まる. 容易に, $\det A_X = 1$ である必要十分条件は X が Bott 多様体の 1 点 blow-up の場合であることが分かる. またこの Bott 多様体は, Δ_X から頂点 $2n+1$ に対応する 1 次元錐を除いて得られる扇に対応するものになっている. 我々の最初の主結果は, 次の微分同相による分類結果である.

定理 2.1 ([10]). $n \geq 3$ とする. $\text{vc}(I^n)$ 上のトーリック多様体 X と X' の整数係数コホモロジー環が次数付環として同型ならば $\det A_X = \det A_{X'}$ であり, 任意の整数 q に対して $\det A_X = q$ となる $\text{vc}(I^n)$ 上のトーリック多様体 X が存在する. さらに, この行列式の値が 1 でないときは, もっと詳しく次の 3 つが同値.

- (1) X と X' は微分同相.
- (2) $H^*(X; \mathbb{Z})$ と $H^*(X'; \mathbb{Z})$ は次数付環として同型.

(3) $\det A_X = \det A_{X'}$.

特に, 1 でない各整数 q に対して, $\det A_X = q$ となる $\text{vc}(I^n)$ 上のトーリック多様体 X の微分同相型はただ一つである.

注意. $\det A_X = 1$ の場合, $\text{vc}(I^n)$ 上のトーリック多様体の微分同相型は一つではない. またコホモロジー剛性問題が肯定的かどうかは未解決であるが, $\det A_X = 1$ なるトーリック多様体 X たちに対してコホモロジー剛性問題が肯定的であることと Bott 多様体に対してコホモロジー剛性問題が肯定的であることは同値である.

代数多様体としての分類としては, 次が得られた.

定理 2.2 ([10]). $n \geq 3$ とする. $\det A_X = q$ となる $\text{vc}(I^n)$ 上のトーリック多様体 X たちの代数多様体としての同型類を $\mathcal{VAR}^n(q)$ と表す. このとき次が成立する.

- (1) $q \neq 0, 1, 2$ のとき, $\mathcal{VAR}^n(q)$ はただ一つの元からなる.
- (2) $\mathcal{VAR}^n(0)$ は, $\sum_{i=1}^n b_i = 1$ をみたす整数列 $(b_1, \dots, b_n)$ の集合を巡回置換で割った商集合と 1 対 1 に対応する.
- (3) X と X' が $\mathcal{VAR}^n(1)$ の元として同じならば, X と X' に対応する Bott 多様体が代数多様体として同型である.
- (4) $\mathcal{VAR}^n(2)$ は, 1 と -1 の長さ n の列で 1 が奇数個であるものの集合を巡回置換で割った商集合と 1 対 1 に対応する.

さらに, $q \neq 2$ のとき $\mathcal{VAR}^n(q)$ のすべての元は射影的で, $\mathcal{VAR}^n(2)$ にある一つの元は射影的だが, その他の元はすべて射影的ではない. 射影的な元は, 上記 (4) において 1 が一つだけの列に対応する.

注意. Oda's 3-fold は $\mathcal{VAR}^3(2)$ に属し, 上の定理の (4) では列 $(1, 1, 1)$ に対応する. $\mathcal{VAR}^3(2)$ には $(1, -1, -1)$ に対応するもう一つの元がある. 上の定理の (4) より, $\mathcal{VAR}^n(2)$ の元の数, 0 と 1 からなる長さ n のネックレスで 0 が奇数個のもの数と等しく, 組合せ論で研究されている. [19, A000016] 参照. 実際その数は

$$\frac{1}{2n} \sum_{\substack{d|n \\ d:\text{odd}}} \varphi(d) 2^{n/d}.$$

ここで, φ は Euler's totient function. したがって, 上の数は n が無限大に近づけば無限大に発散するから, n が大きくなれば $\text{vc}(I^n)$ 上には射影的でないトーリック多様体が沢山ある.

上記の定理 2.1 と 2.2 を併せると, 幾つか面白いことが分かる. まず, $q \neq 0, 1, 2$ なる族では,

- (1) コホモロジー環が同型であること,
- (2) 微分同相であること,
- (3) 代数多様体として同型であること,

の3つが同じである．このように，族によっては，コホモロジー環が微分同相型のみならず代数多様体としての同型類も決めてしまう．このような性質をもつトーリック多様体の自然な族を探すのは面白いと思う．

$q = 0$ のとき，微分同相型はただ一つであるが，代数多様体としては無限に沢山ある．このような現象は Hirzebruch 曲面の族に既に現れている．実際，Hirzebruch 曲面 F_a (a : 自然数) の族では，代数多様体としては互いに同型ではないが，微分可能多様体としては $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ (a が偶数の場合) と $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ (a が奇数の場合) の2つである（ここで $\overline{\mathbb{C}P^2}$ は $\mathbb{C}P^2$ の向きを入れ替えたもの）．したがって，これら2つの微分可能多様体もそれぞれ無限に沢山の代数多様体としての構造をもつ．

$q = 2$ のときも微分同相型はただ一つであるが，この上に，射影的な代数多様体としての構造が一つ，射影的でない代数多様体としての構造が沢山ある．このように，射影的な構造と射影的でない構造の両方を許す微分可能多様体の例となっている．

REFERENCES

- [1] A. Ayzenberg, *Toric manifolds over 3-polytopes*, arXiv:1607.03377.
- [2] V. M. Buchstaber and T. E. Panov, *Torus Actions and Their Applications in Topology and Combinatorics*, University Lecture Series, vol. 24, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2002.
- [3] S. Choi, M. Masuda, and S. Murai, *Invariance of Pontrjagin classes for Bott manifolds*, Algebr. Geom. Topol. 15 (2015), no. 2, 965–986.
- [4] S. Choi, M. Masuda and D. Y. Suh, *Quasitoric manifolds over a product of simplices*, arXiv:0803.2749.
- [5] S. Choi, M. Masuda and D. Y. Suh, *Topological classification of generalized Bott towers*, arXiv:0807.4334.
- [6] S. Choi and H. Park, *Wedge operations and torus symmetries*, Tohoku Math. J. (2), 68(1) (2016), 91–138.
- [7] C. Delaunay, *On hyperbolicity of toric real threefolds*, IMRN 51 (2005), 3191–3201.
- [8] W. Fulton, *An Introduction to Toric Varieties*, Ann. of Math. Studies, vol. 113, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1993.
- [9] M. Grossberg and Y. Karshon, *Bott towers, complete integrability, and the extended character of representations*, Duke Math. J 76 (1994), 23–58.
- [10] S. Hasui, H. Kuwata, M. Masuda, and S. Park, *Classification of toric manifolds over an n -cube with one vertex cut*, arXiv:1705.07530.
- [11] P. Kleinschmidt, *A classification of toric varieties with few generators*, Aequationes Mathematicae 35 (1988), 254–266.
- [12] M. Masuda and T. Panov, *Semifree circle actions, Bott towers, and quasitoric manifolds*, Sbornik Math. 199:8, (2008), 1201–1223,
- [13] M. Masuda and D. Y. Suh, *Classification problems of toric manifolds via topology*, Proc. of Toric Topology, Contemp. Math. 460 (2008), 273–286, arXiv:0709.4579.

TORIC MANIFOLDS OVER AN N -CUBE WITH ONE VERTEX CUT

- [14] M. Øbro, *An algorithm for the classification of smooth Fano polytopes*, arXiv:0704.0049.
- [15] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry. An Introduction to the Theory of Toric Varieties*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), 15, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [16] H. Sato, *Smooth toric Fano five-folds of index two*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 82 (2006), 106–110.
- [17] Y. Suyama, *Examples of toric manifolds which are not quasitoric manifolds*, Algebr. Geom. Topol. 14 (2014), 3097–3106.
- [18] Y. Suyama, *Simplicial 2-spheres obtained from non-singular complete fans*, Del’nevost. Mat. Zh. 15, no. 2 (2015), 277–288.
- [19] The on-line encyclopedia of integer sequences, available at <https://oeis.org/>.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, OSAKA CITY UNIVERSITY, SUMIYOSHI-KU,
 OSAKA 558-8585, JAPAN.

E-mail address: masuda@sci.osaka-cu.ac.jp