

線形-2 次計画法に基づく日本国債取引のイクセキューションモデル

電気通信大学・システム工学科 宮崎 浩一 (Koichi Miyazaki)

Department of Systems Engineering,
University of Electro-Communications

1. はじめに

株式市場において、売却サイズの価格へのインパクトに関する研究（株式市場におけるマイクロストラクチャーの研究）は 1970 年代の古くから行なわれてきた（Kraus and Stoll[8]）が、このような研究が株式取引（株式イクセキューション）の最適化に関する研究に応用されるようになったのは最近のことである。（Almgren[1], Almgren and Chriss[2], Almgren and Chriss[3], Almgren and Chriss[4], Barra[5], Konishi and Makimoto[7], Holthausen R, R Leftwich and D Mayers[6]）このような研究が近年盛んになってきた背景には、株式市場においてプログラム取引の全取引における割合が拡大していることがある（Almgren and Chriss[4], New York Stock Exchange [11]）。

株式市場における最適なイクセキューションに関する研究は上記のように、近年盛んに研究され始めたが、債券市場における最適なイクセキューションに関する研究は見当たらない。この理由は、通常、債券市場のビットオファーは小さいと考えられていること、また、債券市場では株式市場のようなプログラム取引は事実上存在しないことがあげられる。しかしながら、近年、VAR に基づく債券ポートフォリオの管理の影響で、債券市場においてもブロックサイズでの売却の機会が増しており、モデルを用いた具体的なイクセキューション法を検討する必要がでてきた。

株式市場における最適イクセキューションの先行研究のなかで、モデル化に関して具体的かつ包括的な記述が見られるのは Almgren and Chriss[3]である。そこでは、モデル化の枠組みとしてマーコビッツモデル（Markowitz[9]）のような線形・2 次計画法は採用せずに、平均と分散から構成した効用関数を用いた変分法を採用している。売却サイズとマーケットインパクトに非線形な関数を導入した論文 Almgren[1]においても同様である。本論文では、債券の最適イクセキューションモデルの定式化を明快に線形-2 次計画法に基づいて行なう。

本論文の構成は以下の通り。次章では、1 債券ポートフォリオの最適イクセキューションを取り扱う。3 章では、2 章のモデルを複数債券の扱いが可能となるように拡張する。4 章では、3 章の複数債券に関するモデルに、日本銀行の輪番オペレーションの影響を組み込んだモデルを示す。5 章では、証券会社におけるブロック取引の収益に関する考察を与え、2 章のモデルをブロック取引の収益最大化モデルとして定式化し直す。6 章では、現実的なパラメータ設定の下での数値例を示した上で、そのインプリケーションを与える。最終章では、まとめと結語を付す。

2. 1 債券ポートフォリオの最適イクセキューションモデル

1 債券ポートフォリオの最適イクセキューションモデルにおいては、まず、対象年限の利回りの変動を Ornstein-Uhlenbeck プロセス (OU プロセス) に基づいてモデル化する。その年限の債券をブロックサイズで購入した時点をも 0 時点として、イクセキューション完了時点までの各離散時点までの利回り変化の期待値と分散に基づいて最適イクセキューションモデルを構築する。

2.1 利回り変動と価格変動のモデル化

利回り変動モデル

$$dy(t) = a(\bar{y} - y(t))dt + \sigma dB(t) \quad y(0) = y, \quad (1)$$

ここで、 $a, \bar{y}, \sigma$ は、それぞれ、平均回帰係数、平均値、ボラティリティーを表す。

確率微分方程式(1)を解いて、利回り $y(t)$ は、次で与えられる。

$$y(t) = \bar{y} + (y - \bar{y})\exp(-at) + \sigma \int_0^t \exp(-a(t-s))dB(s) \quad (2)$$

イクセキューションは、通常 5 営業日程度を目処に行なうことが多いため、その間の利回り変化は極端に大きくはならず、利回り変化から価格変化を求める場合にコンベキシティーの影響は無視できるくらい小さい。よって、イクセキューションに伴う価格変化を利回り変化から導出するには、利回り変化にデュレーション D を乗じておけば良い。

2.2 イクセキューションモデルにおける主な記法

時刻 0 において満期 T の国債をブロックサイズ (X 単位) で顧客から購入した証券会社が、時刻 T^{end} (通常 5 営業日目を目処) までに国債市場でイクセキューションする際に、所与のリスク水準の下で、イクセキューションコストが最小になる最適イクセキューションを導出するモデルを提案する。本論文におけるイクセキューションモデルとしては、離散型モデルを取り上げる。期間 T^{end} を N 区間に分割して 1 単位期間の長さを T^{end}/N (ここでは 1 営業日) とし、離散時間を $t_k = k\tau$ ($k = 0, \dots, N$) と定義する。時刻 t_k における保有単位を x_k で記述し、売却の軌跡を $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_N)$ で表す。初期保有単位が X 単位であり、最終時刻では 0 単位となる。よって、記法 x_k では、 $x_0 = X, x_N = 0$ となる。売却を行なう軌跡は、時刻 t_{k-1} から時刻 t_k までに売却する単位数 $n_k = x_{k-1} - x_k$ を用いた $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)$ で表すことができる。よって、 x_k と n_k は、

$$x_k = X - \sum_{j=1}^k n_j = \sum_{j=k+1}^N n_j \quad k = 0, \dots, N$$

のように関係付けられる。ここでの記法は、Almgren and Chriss[3]に従った。

2.3 イクセキューションコストのモデル化

イクセキューションのインパクトは、当該銘柄を売却することによって生じる利回りの上昇として観測される。ここでは、利回り変動モデルのドリフト項がイクセキューション額に応じて線形に上昇するようなモデル化を行なう。つまり、時刻 t における $n(t)$ 単位売却が利回り $y(t)$ のドリフト項に与えるインパクトを $\gamma \cdot n(t)$ とする。このようなイクセキューションのインパクトによるドリフト項の上昇も考慮すると、利回り変動モデル(1)、及びその解(2)は、それぞれ、次のよう

になる。

イクセキューションのインパクトを考慮した利回り変動モデル

$$dy = (a(\bar{y} - y) + \gamma \cdot n(t))dt + \sigma dB(t) \quad y(0) = y, \quad (1')$$

ここで、 $a, \bar{y}, \sigma$ は、(1)と同様、 γ は単位売却枚数当たりのドリフト変化の寄与度。

確率微分方程式(1')を解いて、イクセキューションのインパクトを考慮した利回り変動 $y(t)$ は、次で与えられる。

$$y(t) = \bar{y} + (y - \bar{y})\exp(-at) + \gamma \int_0^t n(s)\exp(-a(t-s))ds + \sigma \int_0^t \exp(-a(t-s))dB(s) \quad (2')$$

また、(2')の期待値 $E(y(t))$ は、(3)式で与えられる。

$$E(y(t)) = \bar{y} + (y - \bar{y})\exp(-at) + \gamma \int_0^t n(s)\exp(-a(t-s))ds \quad (3)$$

$E(y(t))$ を離散化した y_k は、(3')となる。

$$y_k = \bar{y} + (y - \bar{y})\exp(-ak\tau) + \gamma\tau \sum_{j=1}^k n_j \exp(-a\tau(k-j)) \quad (3')$$

ここで、イクセキューションコストの期待値 $E(x)$ とその分散 $V(x)$ を導出する。 x_k と n_k には節2.2で示したような関係があるため、 $\mathbf{x}$ の代わりに $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)$ を用いて、 $E(\mathbf{x})$ を $E(\mathbf{n})$ の形、 $V(\mathbf{x})$ を $V(\mathbf{n})$ の形で記述することができる。

$E(\mathbf{n})$ 、 $V(\mathbf{n})$ は、それぞれ、次式で与えられる。導出法の詳細は、Miyazaki[10]を参照のこと。

$$E(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_0 + \mathbf{nA}_1\mathbf{n}^T, \quad V(\mathbf{n}) = \mathbf{nA}_2\mathbf{n}^T,$$

ここで、 $\mathbf{A}_0 = (D(y_0 - \bar{y})(\exp(-a \cdot 1) - 1), \dots, D(y_0 - \bar{y})(\exp(-a \cdot N) - 1))^T$,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} \gamma \exp(-a \cdot 0) & \gamma \exp(-a \cdot 1) & \dots & \gamma \exp(-a \cdot (N-1)) \\ 0 & \gamma \exp(-a \cdot 0) & \gamma \exp(-a \cdot 1) \dots & \gamma \exp(-a \cdot (N-2)) \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \dots & 0 & \gamma \exp(-a \cdot 0) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} D^2 \sigma^2 e^{-2a(N-1)} & 2D^2 \sigma^2 e^{-2a(N-1)} & \dots & 2D^2 \sigma^2 e^{-2a(N-1)} \\ 0 & D^2 \sigma^2 e^{-2a(N-2)} & 2D^2 \sigma^2 e^{-2a(N-2)} \dots & 2D^2 \sigma^2 e^{-2a(N-2)} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \dots & 0 & 2D^2 \sigma^2 e^{-2a(0)} \end{pmatrix}.$$

$E(\mathbf{n})$ 、 $V(\mathbf{n})$ を用いて、1債券ポートフォリオの最適イクセキューションモデルを得る。

1債券ポートフォリオの最適イクセキューションモデル (モデル1)

$$\underset{\mathbf{n}}{Min} \quad \mathbf{nA}_0 + \mathbf{nA}_1\mathbf{n}^T$$

$$\mathbf{n} \mathbf{A}_2 \mathbf{n}^T \leq Risk$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{1} = X$$

$$\mathbf{n} \geq 0$$

ここで, $Risk$ は, 初与のリスク許容量.

3. 複数債券ポートフォリオの最適イクセキューションモデル

3.1 利回り変動と価格変動のモデル化

各年限の利回り変動モデルの拡散項に相関構造を与えてモデル化を行なう. 各年限の類別を右上括弧内に示す. 例えば, 1年債から M 年債までの利回りを $y^{(1)}(t), \dots, y^{(M)}(t)$ とする. 各銘柄の利回り変動は, 次のようにモデル化される.

複数債券の利回り変動モデル

$$dy^{(i)}(t) = a^{(i)}(\bar{y}^{(i)} - y^{(i)}(t))dt + \sigma^{(i)}dB^{(i)}(t), \quad y^{(i)}(0) = y^{(i)}, i = 1, \dots, M \quad (4)$$

$$dB^{(i)} \cdot dB^{(j)} = \rho^{(i,j)} dt \quad (5)$$

ここで, $a^{(i)}, \bar{y}^{(i)}, \sigma^{(i)}, \rho^{(i,j)}$ は, それぞれ, 年限 i の利回り変動に関する平均回帰係数, 平均値, ボラティリティー, 年限 i と年限 j の利回り変動の相関係数を表す.

3.2 イクセキューションモデルの記法

基本的なイクセキューションモデルの記法は, 節 2.2 と同様である. 上記の利回り変動モデルで用いた, 各年限の類別を右上括弧内に示すという記法をここでも採用する.

時刻 0 における年限 i の債券の購入サイズ: $X^{(i)}$ 単位, イクセキューション完了時刻: 時刻 T^{end} (年限毎にイクセキューションの完了時期が異なる枠組み $T^{(i)end}$ に容易に拡張可能であるが, ここでは記法の簡便さのため, 完了時点は全ての年限に共通の時刻 T^{end} とした.), 年限 i のイクセキューション時刻 t_k における保有単位: $x_k^{(i)}$, 年限 i のイクセキューションの軌跡: $x_0^{(i)}, \dots, x_N^{(i)}$,

時刻 t_{k-1} から時刻 t_k までに年限 i をイクセキューションする単位数: $n_k^{(i)} = x_{k-1}^{(i)} - x_k^{(i)}$, $x_k^{(i)}$ と $n_k^{(i)}$ と

の関係: $x_k^{(i)} = X^{(i)} - \sum_{j=1}^k n_j^{(i)} = \sum_{j=k+1}^N n_j^{(i)} \quad k = 0, \dots, N.$

3.3 イクセキューションコストのモデル化

ある年限の債券をイクセキューションするインパクトは, 当該債券のみならず, マグニチュードの違いこそあれ他の年限の債券にも及ぶ. そこで, 時刻 t における年限 i の $n^{(i)}(t)$ 単位の売却が,

年限 j の利回り変動のドリフト項に与えるインパクトを $\gamma_j^{(i)} n^{(i)}(t)$ とする. これを用いて, イクセ

キューションコストの期待値 $E(\mathbf{x})$ とその分散 $V(\mathbf{x})$ を導出する. $\mathbf{x}_k$ (1年から M 年までの債券の t_k における残高を表現する M 次元ベクトル) と $\mathbf{n}_k$ (1年から M 年までの債券を時刻 t_{k-1} から時刻 t_k までに売却する単位数を表現する M 次元ベクトル) には節 2.2 で示したような関係があるため, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ の代わりに $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_N)$ を用いて, $E(\mathbf{x})$ を $E(\mathbf{n})$ の形, $V(\mathbf{x})$ を $V(\mathbf{n})$ の形

で記述することができる。導出法の詳細は、Miyazaki[10]を参照のこと。

$$E(\mathbf{n}) = \mathbf{nB}_0 + \mathbf{nB}_1\mathbf{n}^T, \quad V(\mathbf{n}) = \mathbf{nB}_2\mathbf{n}^T,$$

$$\text{ここで, } \mathbf{n} = (\mathbf{n}^{(1)} \dots \mathbf{n}^{(M)}), \quad \mathbf{B}_0 = (\mathbf{B}_0^{(1)} \dots \mathbf{B}_0^{(M)}), \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1^{(1,1)} & \dots & \mathbf{B}_1^{(1,M)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_1^{(M,1)} & \dots & \mathbf{B}_1^{(M,M)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_0^{(i)} = (D^{(i)}(y_0^{(i)} - \bar{y}^{(i)}) \exp(-a^{(i)} \cdot 1) - 1, \dots, D^{(i)}(y_0^{(i)} - \bar{y}^{(i)}) \exp(-a^{(i)} \cdot N) - 1)^T, \quad \mathbf{B}_2 = (\mathbf{B}_2^{(i,j)}),$$

$\mathbf{B}_1^{(j,i)}$ は, $\mathbf{A}_1$ における $\gamma \exp(-a(k-j))$ の代わりに $\gamma_i^{(j)} \exp(-a^{(i)}(k-l))$ を採用した行列, $\mathbf{B}_2^{(i,j)}$

は, (k,k) 成分, (k,l) 成分 ($l > k$) (l,k) 成分 ($l > k$) が全て

$D^{(i)} D^{(j)} \rho^{(i,j)} \sigma^{(i)} \sigma^{(j)} \exp(-(a^{(i)} + a^{(j)})(N-k)\tau)$ となる行列である。

$E(\mathbf{n})$, $V(\mathbf{n})$ を用いて, 複数債券ポートフォリオの最適イクセキューションモデルを得る。

複数債券ポートフォリオの最適イクセキューションモデル (モデル2)

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{n}} \quad & \mathbf{nB}_0 + \mathbf{nB}_1\mathbf{n}^T \\ & \mathbf{nB}_2\mathbf{n}^T \leq \text{Risk} \\ & \mathbf{n} \cdot \mathbf{1} = X \\ & \mathbf{n}^{(i)} \cdot \mathbf{1}^{(i)} = X^{(i)} \quad i=1, \dots, M \\ & \mathbf{n}^{(i)} \geq 0 \quad i=1, \dots, M \end{aligned}$$

ここで, Risk は, 初与のリスク許容量。

4. 日本銀行による輪番オペレーションを考慮したイクセキューションモデル

日本銀行による輪番オペレーション (輪番と略す) とは, 日本国債の買い切りオペレーションのことをいう。イクセキューションモデルにおける輪番の最も重要な影響は, 市場でのイクセキューションが市場の国債価格にインパクトを与えるのに対し, 輪番におけるイクセキューションが市場の国債価格に影響を与えないことである。

年限 i の債券が輪番で落札されるために必要な利回り変化幅

年限 i の $k^* - 1$ 時点から k^* 時点までの利回り変化は, 式(6)で表される。

$$\begin{aligned} & y_{k^*}^{(i)} - y_{k^*-1}^{(i)} \\ & = (y_0^{(i)} - \bar{y}^{(i)}) \left(\exp(-a^{(i)} k^*) - \exp(-a^{(i)} (k^* - 1)) \right) + \sum_{j=1}^M \gamma_i^{(j)} n_k^{(j)} \exp(-a^{(i)} \cdot 0) \end{aligned} \quad (6)$$

輪番における入札では, 殆ど全ての国債が対象となり, BB の前日引けの利回りを基準にして最も高い利回りで入札された満期の国債が落札されるため, 落札される年限は, 式(6)の値が最大

になるような $\hat{i}$ である。よって、年限 $\hat{i}$ 以外の他の年限を落札するためには、入札における利回りとして、 $y_k^{(i)}$ ではなく、 $y_{k^*-1}^{(i)} + (y_k^i - y_{k^*-1}^i)$ をでなければならない。よって、 k^*-1 時点から k^* 時点の間で行なわれる輪番において年限 i を $\bar{n}_k^{(i)}$ 枚イクセキューションする場合の期待イクセキューションコストは、次のようになる。

$$E(\bar{n}_k^{(1)}, \dots, \bar{n}_k^{(M)}) = \bar{\mathbf{n}}\mathbf{C}_0 + \mathbf{n}\mathbf{C}_1\bar{\mathbf{n}}^T,$$

ここで、 $\bar{\mathbf{n}} = (\bar{\mathbf{n}}^{(1)} \dots \bar{\mathbf{n}}^{(M)})$, $\mathbf{C}_0 = (\mathbf{C}_0^{(1)} \dots \mathbf{C}_0^{(M)})$, $\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1^{(1,1)} & \dots & \mathbf{C}_1^{(1,M)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_1^{(M,1)} & \dots & \mathbf{C}_1^{(M,M)} \end{pmatrix}$. ベクトル $\mathbf{C}_0^{(i)}$ は、

ベクトル $\mathbf{B}_0^{(i)}$ において、 $D^{(i)}(y_0^{(i)} - \bar{y}^{(i)})(\exp(-a^{(i)}k) - 1)$ を

$$D^{(i)}((y_0^{(i)} - \bar{y}^{(i)})(\exp(-a^{(i)}(k-1)\tau) - 1) + (y_0^{(i)} - \bar{y}^{(i)})(\exp(-a^i k\tau) - \exp(-a^i(k-1)\tau)))$$

に置き換えたもの、 $\bar{\mathbf{n}}^{(i)}$ は、第 k^* 番目が $\bar{n}_k^{(i)}$ でその他が0となる行ベクトル、 $\mathbf{C}_1^{(j,i)}$ は、 $\mathbf{B}_1^{(j,i)}$ の対角成分 $\gamma_i^{(j)} \exp(-a^{(i)} \cdot 0)$ を $\gamma_i^{(j)} \exp(-a^{(i)} \cdot 0)$ で置き換えたもの。

以上から、次の輪番を考慮した複数債券ポートフォリオの最適イクセキューションモデルを得る。
輪番を考慮した複数債券ポートフォリオの最適イクセキューションモデル (モデル3)

$$\underset{\mathbf{n}, \bar{\mathbf{n}}}{Min} \quad \mathbf{n}\mathbf{B}_0 + \mathbf{n}\mathbf{B}_1\bar{\mathbf{n}}^T + \bar{\mathbf{n}}\mathbf{C}_0 + \mathbf{n}\mathbf{C}_1\bar{\mathbf{n}}^T$$

$$(\mathbf{n} + \bar{\mathbf{n}})\mathbf{B}_2(\mathbf{n} + \bar{\mathbf{n}})^T \leq Risk$$

$$(\mathbf{n} + \bar{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{1} = X$$

$$(\mathbf{n}^{(i)} + \bar{\mathbf{n}}^{(i)}) \cdot \mathbf{1}^{(i)} = X^{(i)} \quad i = 1, \dots, M$$

$$\mathbf{n}^{(i)}, \bar{\mathbf{n}}^{(i)} \geq 0 \quad i = 1, \dots, M$$

5. 証券会社にとってのブロック取引の収益認識と収益最大化モデル

最もイクセキューションのリスク量を小さくするイクセキューションの期待コストと最適イクセキューションコストとの差額を証券会社の収益と定義すれば、2章から4章におけるモデル1からモデル3は、収益最大化イクセキューションモデルとして次のように定式化し直すことができる。

1 債券ポートフォリオの収益最大化イクセキューションモデル (モデル 1')

$$\begin{aligned}
 \text{Max}_n \quad & (\mathbf{n}^* - \mathbf{n})\mathbf{A}_0 + (\mathbf{n}^* - \mathbf{n})\mathbf{A}_1(\mathbf{n}^* - \mathbf{n})^T \\
 & \mathbf{n}\mathbf{A}_2\mathbf{n}^T \leq \text{Risk} \\
 & \mathbf{n} \cdot \mathbf{1} = X \\
 & \mathbf{n} \geq 0
 \end{aligned}$$

ここで, $\mathbf{n}^* = (X, 0, \dots, 0)$, Risk は, 初与のリスク許容量.

複数債券ポートフォリオの収益最大化イクセキューションモデル (モデル 2')

$$\begin{aligned}
 \text{Max}_n \quad & (\mathbf{n}^* - \mathbf{n})\mathbf{B}_0 + (\mathbf{n}^* - \mathbf{n})\mathbf{B}_1(\mathbf{n}^* - \mathbf{n})^T \\
 & \mathbf{n}\mathbf{B}_2\mathbf{n}^T \leq \text{Risk} \\
 & \mathbf{n} \cdot \mathbf{1} = X \\
 & \mathbf{n}^{(i)} \cdot \mathbf{1}^{(i)} = X^{(i)} \quad i = 1, \dots, M \\
 & \mathbf{n}^{(i)} \geq 0 \quad i = 1, \dots, M
 \end{aligned}$$

ここで, $\mathbf{n}^* = (X^{(1)}, 0, \dots, 0, X^{(2)}, 0, \dots, 0, \dots, X^{(M)}, 0, \dots, 0)$, Risk は, 初与のリスク許容量.

輪番を考慮した複数債券ポートフォリオの収益最大化イクセキューションモデル (モデル 3')

$$\begin{aligned}
 \text{Max}_{\mathbf{n}, \bar{\mathbf{n}}} \quad & (\mathbf{n}^* - \mathbf{n})\mathbf{B}_0 + (\mathbf{n}^* - \mathbf{n})\mathbf{B}_1(\mathbf{n}^* - \mathbf{n})^T - \bar{\mathbf{n}}\mathbf{C}_0 - \mathbf{n}\mathbf{C}_1\bar{\mathbf{n}}^T \\
 & (\mathbf{n} + \bar{\mathbf{n}})\mathbf{B}_2(\mathbf{n} + \bar{\mathbf{n}})^T \leq \text{Risk} \\
 & (\mathbf{n} + \bar{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{1} = X \\
 & (\mathbf{n}^{(i)} + \bar{\mathbf{n}}^{(i)}) \cdot \mathbf{1}^{(i)} = X^{(i)} \quad i = 1, \dots, M \\
 & \mathbf{n}^{(i)}, \bar{\mathbf{n}}^{(i)} \geq 0 \quad i = 1, \dots, M
 \end{aligned}$$

ここで, $\mathbf{n}^* = (X^{(1)}, 0, \dots, 0, X^{(2)}, 0, \dots, 0, \dots, X^{(M)}, 0, \dots, 0)$, Risk は, 初与のリスク許容量.

6. 数値例

本章では, 紙面の都合上, モデル 1 に関する数値例とその考察のみを与える. インプットデータとモデルのパラメータ推定結果, モデル 2', モデル 3 に基づく興味深い分析結果に関しては, Miyazaki[10]を参照のこと.

最もリスク量を小さくするイクセキューションは, 1 日目に全額を売却するイクセキューションであり, 逆に最もリスク量が大きくなるイクセキューションは最終日 (5 日目) に全額売却するイクセキューションである. よって, この両者のイクセキューションの期待コストとリスク量との関係を 3 つの初期利回りケースについて図 1 に示した. 3 つの初期利回りとは, 分析期間の平均, 平均 $\pm \alpha BP$ であり, αBP は年限に依存する. リスク量は 1 標準偏差で計量し, 単位はコスト, リスク共に, 百万円である. また, 図 2 には初期利回りケースが平均利回りに等しいケースを除くケースに関する最適イクセキューションの具体的な方法を示した.

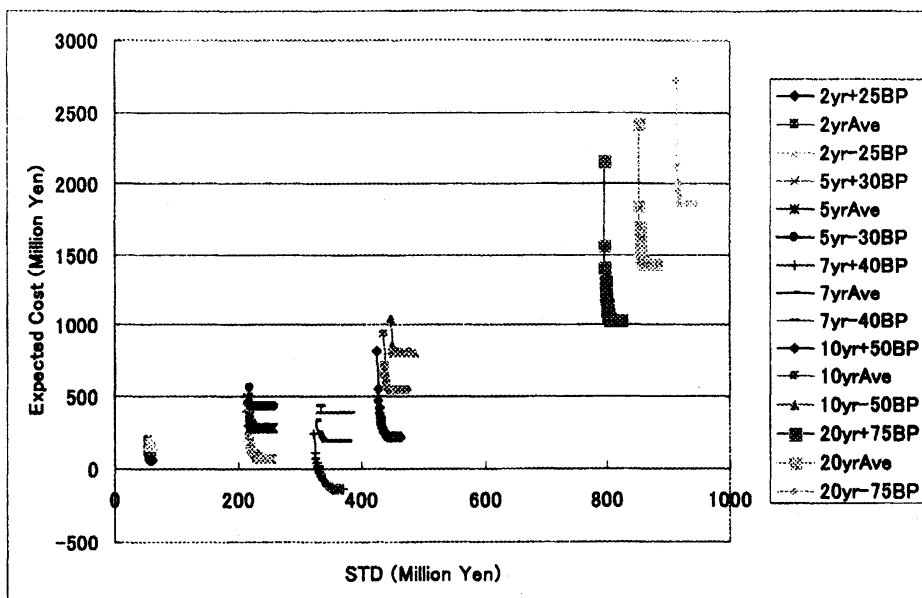


図1 1債券ポートフォリオの最適イクセキューションの期待コストとリスク

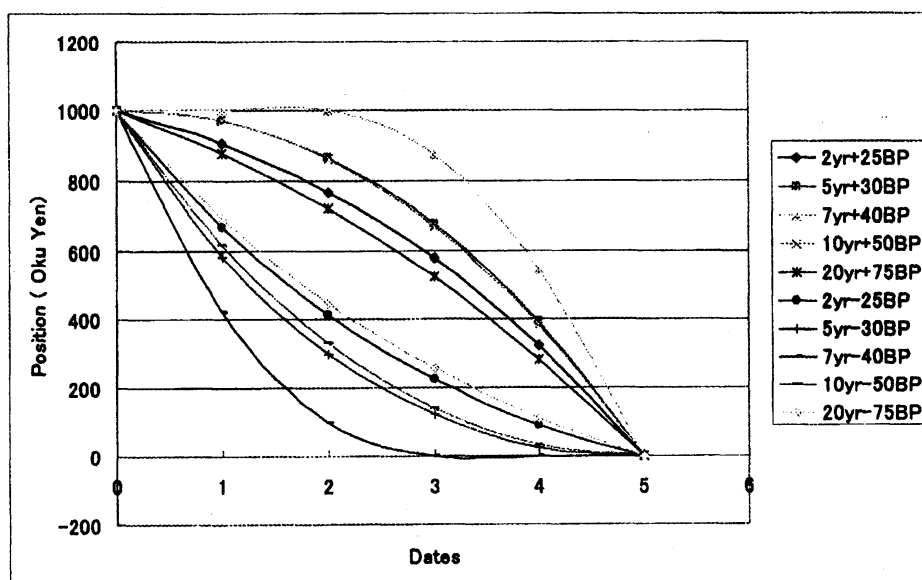


図2 1債券ポートフォリオの最適イクセキューションの軌跡

図1から主に次の4点が読み取れる。(1)いずれの年限に関しても最小期待コストを比較した場合、初期利回りが平均利回りよりも高いときに最小コストは小さくなる。(2)最もリスク量を小さくするイクセキューションの期待コストと最小期待コストとの差は20年債が他の年限の債券と比較して極めて大きい。特に、初期利回りが平均利回りよりも低い場合に、その傾向は顕著に表れる。(3)リスクに関しては、先に、確認したように年限に関してほぼ比例したものになっている。(4)初期利回りのケースに関するリスク水準をみると、20年債では、初期利回りが平均よりも低いときのリスクの方が高いときのリスクよりも大きくなっているのに対し、2年債や5年債では殆ど変わらない。(4)に関しては、その理由を検討しておく。最適イクセキューションの具体的な方

法を示す図 2 によれば、何れの年限においても初期利回りが平均よりも低いときの方が、高いときよりも早い段階でイクセキューションを行なうために、直感的にはリスク量は小さくなると考えられる。しかし、20 年債では、初期利回りが平均よりも低いときのリスクの方が高いときのリスクよりも大きくなっている。これは、20 年債に関しては、早く売却することによるリスクの低減効果よりも、初期利回りが低いことによってデュレーションが大きいことのリスク要因が勝るためである。このトレードオフは、年限が短くなるに従って前者が後者よりも勝り図 1 では確認しにくい、2 年債では逆転している。このトレードオフは、債券特有の興味深い現象である。

7. まとめと結語

本論文では、債券に関する最適イクセキューションモデルを提案した。モデルでは、日銀の輪番が最適イクセキューションに与える影響も考慮した。本モデルによって、各年限の債券やそれらのポートフォリオを最適にイクセキューションした場合の、リスク許容量に応じた期待イクセキューションコストが計量可能となった。現実的なパラメータ設定の下で、最適イクセキューションにおけるリスクと期待コストの関係に関して数値例を用いて考察し、数値結果の裏付けとそのファイナンスにおける具体的な意味を明らかにした。

参考文献

- [1] R. Almgren: Optimal execution with nonlinear impact functions and trading-enhanced risk. *Applied Mathematical Finance*, **10** (2003) 1-18.
- [2] Almgren, R. and N. Chriss: Value under liquidation. *Risk* December, (1999) 61-63.
- [3] Almgren, R. and N. Chriss: Optimal execution of portfolio transactions Value. *Journal of Risk*, **3** (2), (2000) 5-39.
- [4] Almgren, R. and N. Chriss: Value under liquidation. *Risk* June, (2003) 97-102.
- [5] Barra: *Market impact model handbook*, (1997)
- [6] Holthausen R, R Leftwich and D Mayers: Large-block transactions, the speed of response, and temporary and permanent stock-price effects, *Journal of Financial Economics*, **26** (1990) 71-95.
- [7] Konishi, H. and N. Makimoto: Optimal Slice of a block trade, *Journal of Risk*, **3** (4), (2001) 33-51.
- [8] Kraus, A. and H. Stoll: Price impacts of block trading on the New York Stock Exchange, *Journal of Finance*, **27** (1972) 569-588.
- [9] H.Markowitz: *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment*, John Wiley & Sons, New York, (1959)
- [10] K. Miyazaki: Simple execution models of Japanese government bond based on linear-quadratic programming. *Working Paper, University of Electro-Communications*, (November 2003).
- [11] New York Stock Exchange, Press release (2002).