

## 概均質ベクトル空間 入門

筑波大 数学系 木村達雄 (Tatsuo KIMURA)

本稿は, 概均質ベクトル空間の理論の基礎的部分 (ゼータ関数の話の前まで) をまとめたものである。その殆どが, 佐藤幹夫氏によって作られた。

$K$  = 体,  $\bar{K}$  =  $K$  の代数閉包, とする。

$$GL_n(\bar{K}) \stackrel{\text{def}}{=} \{X \in M_n(\bar{K}) ; \det X \neq 0\} \quad \text{closed} \\ \simeq \{(X, t) \in M_n(\bar{K}) \oplus \bar{K} ; t \det X - 1 = 0\} \subset \bar{K}^{n^2+1}$$

は affine variety 中へ,  $GL_n(\bar{K})$  の Zariski-closed subset も affine variety になる。

$GL_n(\bar{K}) \supset G$  = 部分群 が linear algebraic group defined over  $K$  ( $K$  上定義された線型代数群) とは

$$\exists f_\lambda(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn}) \in K[x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn}] \quad \text{s.t.}$$

$$G = \{\xi = (\xi_{ij}) \in GL_n(\bar{K}) ; f_\lambda(\xi) = 0 \quad (\lambda \in \Lambda)\} \quad (\text{注1参照})$$

代数群  $G$  については, 連結  $\iff$  既約 (多様体)

$$\iff G \supset H = \text{algebraic subgroup s.t. } [G:H] < +\infty \text{ なる } H = G, \text{ はすべて同値である。}$$

$\mathcal{O} = \text{Lie}(G) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \xi = (\xi_{ij}) \in M_n(\bar{K}) ; \sum_{i,j=1}^n \xi_{ij} \frac{\partial f_1}{\partial x_{ij}}(I_n) = 0 \ (\lambda \in \Lambda) \right\}$   
 は  $[X, Y] = XY - YX$  により Lie 環になる。

これを  $G$  の Lie 環  $\text{Lie}(G)$  とする。

例)  $SL_n(\bar{K}) = \{ X \in GL_n(\bar{K}) ; \det X = 1 \}$  の

Lie 環は  $\mathfrak{sl}_n(\bar{K}) = \{ \xi = (\xi_{ij}) \in M_n(\bar{K}) ; \text{tr } \xi = 0 \}$

$G = \text{simple algebraic group}$  (単純代数群) とは

(1) 連結

(2)  $G \supset H \Rightarrow H = G$  または  $\#H < +\infty$

(3)  $\dim G \geq 3$  ( $\Rightarrow G \neq GL_1, \{1\}$ )

$G = \text{semisimple algebraic group}$  (半単純代数群) とは

$G^0 = G_1 \times \cdots \times G_n / (\text{center 内の有限群})$

但し  $G^0$  は  $G$  の単位元の連結成分 (これは常に  $G$  の正規部分群で  $[G : G^0] < +\infty$ ),  $G_1, \dots, G_n = \text{simple alg. group}$  である。

$G = \text{reductive algebraic group}$  とは

$G^0 = G_1 \times \cdots \times G_n / (\text{center 内の有限群})$

但し  $G_1, \dots, G_n$  は simple alg. gp 又は  $GL_1$

特に  $GL_n(\mathbb{C}) \supset G = \text{reductive algebraic group}$  に

ついては  $G \supset K = \text{maximal compact subgroup s.t. } G = \bar{K}$ .

$\exists A \in GL_n(\mathbb{C})$  s.t.  $A^{-1}KA \subset U_n = \{g \in G; {}^t\bar{g}g = I_n\}$   
 $\left( \because K \text{ の Haar measure } \in dx \text{ と } C = \int_K {}^t\bar{x}x dx \text{ を考} \right)$   
 $\left( \text{る} \right), K \text{ は unimodular かつ } {}^t\bar{g}Cg = C \text{ for } g \in K. \text{ により.}$

$V = \bar{K}$  上の有限次元ベクトル空間で  $K$ -structure  $V_K$  をもつもの  
 即ち  $V = V_K \otimes_{\bar{K}} \bar{K}$ , とする.

$GL_m(\bar{K}) \supset G = \text{連結線型代数群} / K$ , とする.

$\rho: G \rightarrow GL(V)$  homom. を  $K$ -rational representation

とは,  $V_K$  の base をとって  $V \simeq \bar{K}^n \supset K^n = V_K$  とするとき

$$\begin{array}{ccc}
 M_m(\bar{K}) & & M_n(\bar{K}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 GL_m(\bar{K}) & & GL_n(\bar{K}) \\
 \downarrow & \xrightarrow{\rho} & \downarrow \\
 G & \longrightarrow & GL(V) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 x = (x_{ij}) & \longmapsto & \rho(x) = (\rho(x)_{ij})
 \end{array}$$

ここで  $\rho(x)_{ij} = f_{ij}(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{mm}) \in K(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{mm})$

と表わせること. このとき  $(G, \rho, V) = \text{defined over } K$  とする.

$(G, \rho, V)$  が 概均質ベクトル空間 (Prehomogeneous Vector space 略して P.V.) とは

$\exists v_0 \in V$  s.t.  $\overline{\rho(G)v_0} = V$  (— は Zariski-closure).

$G_{v_0} = \{g \in G; \rho(g)v_0 = v_0\}$  とおくと  $\rho(G)v_0 \simeq G/G_{v_0}$

かつ これは  $\dim V = \dim \rho(G)v_0 = \dim G - \dim G_{v_0}$  と同値.

即ち  $(G, p, V) = P.V.$

$$\Leftrightarrow \exists v_0 \in V \text{ s.t. } \dim G_{v_0} = \dim G - \dim V$$

さて  $\text{ch}(K) = 0$  のときは,  $\dim \text{Lie}(G_{v_0}) = \dim G_{v_0}$  かつ

$$\Leftrightarrow \exists v_0 \in V \text{ s.t. } \dim \text{Lie}(G_{v_0}) = \dim G - \dim V$$

$\text{ch}(K)=0$  例えは  $\mathbb{C}$  上の  $(G, p, V)$  が  $P.V.$  である事を示す  
のにこれを使う事が多い.  $\dim \text{Lie}(G_{v_0})$  は 線型代数で  
計算できるからである. 一般に軌道  $p(G)v_0$  については

$$p(G)v_0 = \overline{p(G)v_0} - (\overline{p(G)v_0} - p(G)v_0) \quad (- \text{は Zariski 閉包})$$

が成り立つから,  $(G, p, V) = P.V.$

$$\Leftrightarrow V \supset \exists S = \text{Zariski-closed set s.t. } V - S = p(G)v_0$$

このとき  $S$  を  $(G, p, V)$  の singular set (特異集合),  
 $V - S \ni \forall y$  を generic point といい, そこにおける

isotropy 部分群  $G_y = \{g \in G; p(g)y = y\}$  for  $y \in V - S$   
を generic isotropy subgroup という。

$G_{p(g)y} = g G_y g^{-1}$  かつ, これらはすべて同型である。

(例)  $G = GL_n(\bar{K}), V = \{x \in M_n(\bar{K}); {}^t x = x\}$

$p(g)x = gx {}^t g$ , とする.  $y = I_n$  における isotropy

部分群は定義から  $G_y = O_n$ . として

$$\dim O_n = \frac{n(n-1)}{2} = \underbrace{\dim G}_{n^2} - \underbrace{\dim V}_{\frac{n(n+1)}{2}}, \quad \text{行って}$$

$(G, p, V) = P.V.$  となる. //

有理関数  $f(x) \neq 0$  が 相対不変式 (relative invariant) とは,  $f(P(g)x) = \chi(g)f(x)$  ( $\forall g \in G$ ) 但し  $\chi: G \rightarrow GL_1$  有理準同型. このとき  $f \leftrightarrow \chi$  と記す. 特に  $f \leftrightarrow 1$  のとき,  $f$  は 絶対不変式 (absolute invariant) といふ。

Proposition 1  $(G, \rho, V) = \text{P.V.}$  とする.

(1) 絶対不変式は定数である.

(2)  $f_1 \leftrightarrow \chi, f_2 \leftrightarrow \chi \Rightarrow \exists c = \text{定数 s.t. } f_1 = cf_2$

∵ (1) 絶対不変式  $f$  は  $Gv_0 = V - S$  上定数ゆえ

$V = \overline{G \cdot v_0}$  上でも定数である.

(2)  $\frac{f_1}{f_2}$  は絶対不変式ゆえ定数である. //

注) これが, 概均質ベクトル空間の理論のすべての出発点である. 逆にこの Prop 1 が概均質ベクトル空間を特徴づけることも知られている.

Corollary  $(G, \rho, V)$  に於て non-constant absolute invariant  $f$  が存在すれば,  $(G, \rho, V) \neq \text{P.V.}$

与えられた  $(G, \rho, V)$  が P.V. ではない事を示すときは, この Corollary がよく使われる. 例を示そう.

$$G = GL_1^4 \times SL_n \ni g = (\alpha, \beta, \sigma, \delta; A)$$

$$V = \bar{K}^n \oplus \bar{K}^n \oplus \bar{K}^n \oplus \bar{K}^n \ni \hat{x} = (x, y, z, w)$$

$$p(g)\hat{x} = (\alpha Ax, \beta Ay, \gamma^t A^t z, \delta^t A^t w)$$

$$\text{このとき, } \langle x, z \rangle = {}^t x z \mapsto \alpha \gamma \langle x, z \rangle$$

$$\langle x, w \rangle \mapsto \alpha \delta \langle x, w \rangle$$

$$\langle y, z \rangle \mapsto \beta \gamma \langle y, z \rangle$$

$$\langle y, w \rangle \mapsto \beta \delta \langle y, w \rangle$$

$$\Rightarrow f(\hat{x}) = \frac{\langle x, z \rangle \langle y, w \rangle}{\langle x, w \rangle \langle y, z \rangle} \text{ は 絶対不変式.}$$

$$x=y=z=w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(\hat{x}) = 1 \quad \text{であるが}$$

$$x=w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y=z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(\hat{x}) = 0, \quad \text{よって}$$

$$f \neq \text{定数.} \quad \text{よって } (G, p, V) \neq \text{P.V.} \quad //$$

Proposition 2  $(G, p, V) = \text{P.V.}$  の singular set  $S$  の既約分解を  $S = \{f_1=0\} \cup \dots \cup \{f_\ell=0\} \cup S'', \text{codim } S'' \geq 2$  とすると,  $f_1 \leftrightarrow \chi_1, \dots, f_\ell \leftrightarrow \chi_\ell$  は相対不変式で, 逆に任意の相対不変式  $f$  は  $f(x) = c f_1(x)^{m_1} \dots f_\ell(x)^{m_\ell}$ , ただし  $c \in \bar{K}^\times, (m_1, \dots, m_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell$ , と表わされる.

$\therefore$  一般に  $X, Y = \text{irreducible varieties}, \varphi: X \times Y \rightarrow Z$  は morphism とすると  $\overline{\varphi(X \times Y)} = \text{irreducible}$ , これを  $X=G$  (連結を仮定している!),  $Y = \{f_i=0\}, Z=V$ ,  $\varphi(g, x) = p(g)x$ , に適用して

$$\underbrace{\{f_i=0\}}_{\text{既約, codim}=1} \subset \underbrace{p(G) \cdot \{f_i=0\}}_{\text{既約}} \subset S \subset V \quad \text{とあるから}$$

$P(G) \cdot \{f_i = 0\} = \{f_i = 0\}$  よって Hilbert 零点定理により  $f_i(P(g)x) \sim f_i(x)$  は定数倍を除いて一致する:

$$f_i(P(g)x) = \chi_i(g) f_i(x) \quad (i=1, \dots, l)$$

後半は, 任意の相対不変式  $f(x)$  の既約分解  $f(x) = \prod_i R_i(x)$

を考えると, まず  $R_i(x)$  たち自身も相対不変式になる事を示そう.

$$\prod_i R_i(P(g)x) = \chi(g) \prod_i R_i(x) \quad \text{であるが, } R_i(P(g)x)$$

は既約 ( $R_i(P(g)x) = A(x)B(x) \Rightarrow R_i(x) = A(P(g^{-1})x)B(P(g^{-1})x)$  矛盾) ゆえ

$$\exists f \text{ s.t. } R_i(P(g)x) = \text{const.} \cdot R_j(x)$$

今  $i$  を fix して,  $G_i = \{g \in G : R_i(P(g)x) = \text{const.} \cdot R_j(x)\}$

とみると, これは  $\neq \emptyset$  なる,  $= \chi_i(g) \cdot G_i$  と表わせる.

一方  $G_i \ni e (\Rightarrow G_i \neq \emptyset)$  ゆえ  $G_i$  は  $G$  の index finite な部分代数群.  $G = \text{連結}$  を仮定しているから

$$G = G_i \quad \text{即ち } R_i(P(g)x) = \chi'_i(g) R_i(x).$$

よって  $f(x) = \prod_i \text{既約相対不変多項式}$ , とよい.

$\{f=0\}$  は  $G$  不変な codim 1 の既約集合ゆえ

$\{f=0\} \subset S$ . 即ち  $\{f=0\}$  は  $S$  の既約成分ゆえ

$$\{f=0\} = \bigcup_i \{f_i=0\} \quad \text{即ち } f = \text{const.} \cdot f_i \quad //$$

さて  $K[x_1, \dots, x_n] = \text{U.F.D.}$  (素元一意分解整域) ゆえ

$\chi_1, \dots, \chi_l$  たちは乗法独立である.

注) これから  $f_1, \dots, f_\ell$  は代数独立 であることが  
 次のようにしてわかる. 代数従属と仮定して  $M_1, \dots, M_s$   
 を  $f_1, \dots, f_\ell$  の単項式  $f_1^{a_1} \dots f_\ell^{a_\ell}$  として (従て各  $M_i$  は  
 相対不変式,  $M_i(\rho(\theta)x) = \mu_i(\theta)M_i(x)$  とする),  
 $c_1 M_1 + \dots + c_s M_s = 0$  ( $\forall c_i \neq 0$ ) なる最小の  $s$  をとる.  
 $\chi_1, \dots, \chi_\ell$  の乗法独立性より  $\mu_1, \dots, \mu_s$  はすべて異なり,  
 $\theta$  を作用させて  $c_1 \mu_1(\theta) M_1 + c_2 \mu_2(\theta) M_2 + \dots + c_s \mu_s(\theta) M_s = 0$   
 一方,  $\mu_1(\theta)$  をかけて,  $c_1 \mu_1(\theta) M_1 + c_2 \mu_1(\theta) M_2 + \dots + c_s \mu_1(\theta) M_s = 0$   
 差をとって  $\underbrace{c_2(\mu_1(\theta) - \mu_2(\theta)) M_2 + \dots + c_s(\mu_1(\theta) - \mu_s(\theta)) M_s}_{\neq 0} = 0$   
 これは  $s$  の最小性に反する. //

$$X(G) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \chi: G \rightarrow GL_1, \text{ rational characters } \}$$

$$X_1(G) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \chi \in X(G); \chi \leftrightarrow \exists f = \text{相対不変式} \}$$

$\langle \chi_1, \dots, \chi_\ell \rangle$ ; rank  $\ell$  の free abelian group,  
 がわかった。

(仮定)  $(G, \rho, V) = P.V.$   $V-S \ni x$  に対し

$G \rightarrow V$  は常に separable dominant morphism  
 $\downarrow \quad \downarrow$   
 $\theta \mapsto \rho(\theta)x$  であることを仮定する. これは

$\{ d\rho(A)x; A \in \text{Lie}(G) \} = V$  と同値である.

但し  $d\rho$  は  $\rho$  の微分表現. (12頁参照)

この仮定は  $\mathbb{C}$  など標数0の時は常に満たされている。正標数のとき P.V. では常にこの条件を仮定することにする。そうすると  $G/G_x = V-S$  と思てよい。

Proposition 3  $(G, P, V) = \text{P.V.}$   $V-S \ni y$   
 $\Rightarrow X_1(G) = \{ \chi \in X(G); \chi|_{G_y} = 1 \}$

$\because$   $\chi \leftrightarrow f = \text{相対不変式}$ ,  $g \in G_y$  ならば

$$f(p(g)y) = \chi(g)f(y)$$

$$\stackrel{||}{f(y)} (\neq 0, \infty)$$

$$\Rightarrow \chi(g) = 1$$

$$\text{i.e. } \chi|_{G_y} = 1.$$

逆に  $\chi|_{G_y} = 1$  ならば

$$\chi : G/G_y = p(G)y = V-S \rightarrow GL_1 \text{ として}$$

$$(x = p(g)y = p(g')y \Rightarrow \chi(g) = \chi(g') \text{ かつ } x = f(x) \text{ と}$$

$$\text{ある}) \quad f(p(g_0)x) = \chi(g_0 g) = \chi(g_0)\chi(g) = \chi(g_0)f(x)$$

即ち  $f$  は  $V$  上の rational function  $\leftrightarrow \chi$  //

注)  $G_{p(g)y} = g G_y g^{-1}$  かつ  $[G, G] \cdot G_{p(g)y}$

$$= [G, G] \cdot G_y \quad \text{即ち } G_1 \stackrel{\text{def}}{=} [G, G] \cdot G_y \text{ は}$$

$$y \in V-S \text{ のとり方による。 } \chi([a, b]) =$$

$$\chi(a^{-1}b^{-1}ab) = \chi(a)^{-1}\chi(b)^{-1}\chi(a)\chi(b) = 1 \text{ かつ}$$

$$\chi|[G, G] = 1, \text{ よって}$$

$$X_1(G) = \{ \chi \in X(G); \chi|_{G_1} = 1 \} \text{ とも表わせる.}$$

さて一般に  $(G, \rho, V) = P.V.$  てもその dual  $(G, \rho^*, V^*)$  は P.V. とは限らない。但し  $V^*$  は  $V$  の dual ベクトル空間,  $\rho^*$  は  $\rho$  の反傾表現。例えば  $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \right\}$ ,  $V = \mathbb{K}^2$ ,  $\rho(g) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + bx_2 \\ ax_2 \end{pmatrix}$  なら  $S = \{x_2 = 0\}$  で  $(G, \rho, V)$  は P.V. しか  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ by_1 + ay_2 \end{pmatrix}$  中  $y_1$  が non-const. absolute invariant となり  $(G, \rho^*, V^*) \neq P.V.$  ここでは具合が悪いので "良い条件" を探そう。  
 $f = \text{相対不変式} \leftrightarrow \chi$ , とするとき,

$\varphi_f = \text{grad log } f : V - S \longrightarrow V^*$  なる map を  
 考えよう。  

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{f(x)} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{1}{f(x)} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Proposition 4 (1)  $\varphi_f(\rho(g)x) = \rho^*(g)\varphi_f(x)$

(2)  $\left( \frac{\partial^2 \log f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right) = {}^t \rho(g) \left( \frac{\partial^2 \log f}{\partial x_i \partial x_j}(\rho(g)x) \right) \rho(g)$

とくに  $\text{Hess log } f(x) = \det \left( \frac{\partial^2 \log f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)$  とおくと

$\text{Hess log } f(\rho(g)x) = \det \rho(g)^{-2} \cdot \text{Hess log } f(x)$

∴) 簡単のため  $G \subset GL_n$  としても一般性を失わない。 $f(gx) = \chi(g)f(x)$  を微分して

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} f(gx) &= \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(gx) \underbrace{\frac{\partial (gx)_k}{\partial x_i}}_{\parallel} \\ &\parallel \quad \chi(g) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad \frac{\partial \sum_k g_{ki} x_k}{\partial x_i} = g_{ki} \end{aligned}$$

両辺を  $\chi(g)f(x) = f(gx)$  でわると,

$$\frac{1}{f(x)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \sum_k g_{ki} \cdot \frac{1}{f(gx)} \frac{\partial f}{\partial x_k}(gx) \dots \quad (*)$$

$$\text{よって } \varphi_f(x) = {}^t g \cdot \varphi_f(gx) \quad \therefore \varphi_f(gx) = {}^t g^{-1} \varphi_f(x)$$

一般的に書けば  $\varphi_f(\rho(g)x) = \rho^*(g) \varphi_f(x)$  とする.

$$(*) \text{ は } \frac{\partial \log f}{\partial x_i}(x) = \sum_k g_{ki} \frac{\partial \log f}{\partial x_k}(gx)$$

と書ける. 両辺を  $\frac{\partial}{\partial x_j}$  で微分して

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log f}{\partial x_j \partial x_i}(x) &= \sum_k g_{ki} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \log f}{\partial x_k}(gx) \\ &= \sum_k g_{ki} \sum_t \frac{\partial^2 \log f}{\partial x_t \partial x_k}(gx) \underbrace{\frac{\partial (gx)_t}{\partial x_j}}_{\parallel} \\ &= \sum_{k,t} g_{ki} \cdot \frac{\partial^2 \log f}{\partial x_t \partial x_k}(gx) \cdot g_{tj}, \quad \frac{\partial \sum_s g_{ts} x_s}{\partial x_j} = g_{tj} \end{aligned}$$

$$\text{即ち } \left( \frac{\partial^2 \log f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \right) = {}^t g \left( \frac{\partial^2 \log f}{\partial x_t \partial x_k}(gx) \right) g$$

$$\text{一般には } \left( \frac{\partial^2 \log f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right) = {}^t \rho(g) \left( \frac{\partial^2 \log f}{\partial x_i \partial x_j}(\rho(g)x) \right) \rho(g)$$

となる. 両辺の行列式をとれば  $\text{Hess } \log f(x)$  の相対不変性が導かれる. //

定義  $(G, \rho, V) = \text{P.V.}$  が regular (正則) とは  
 $\varphi_f: V-S \rightarrow V^*$  が dominant ( $\Leftrightarrow \overline{\varphi_f(V-S)} = V^*$ )  
 になる 相対不変式  $f$  が存在すること. ( $f = \text{non-degenerate}$  とき)  
 これは  $\det(d\varphi_f(x)) = \text{Hess log } f(x) \neq 0$   
 (恒等的には 0 でない) と同値である.

Prop 4 により  $\varphi_f(V-S)$  は  $(G, \rho^*, V^*)$  の dense orbit になるから  $(G, \rho^*, V^*) = \text{P.V.}$  で,

$\det \rho(\mathfrak{g})^2 \leftrightarrow \text{Hess log } f(x)^{-1}$  即ち  $\det \rho(\mathfrak{g})^2 \in X_1(G)$   
 となる. よって 次を得る.

Proposition 5  $(G, \rho, V) = \text{a regular P.V.}$   
 $\Rightarrow (G, \rho^*, V^*) = \text{P.V.}$  かつ  $\det \rho(\mathfrak{g})^2 \in X_1(G)$

$\overline{K} = \mathbb{C}$  のとき  $\exp tA \in G \Leftrightarrow A \in \text{Lie}(G)$

で  $\chi(\exp tA) = \exp t \delta \chi(A)$

$\rho(\exp tA) = \exp t d\rho(A)$

により  $\chi, \rho$  の微分  $\delta \chi, d\rho$  を定める.

Lemma 6  $\langle d\rho(A)x, \varphi_f(x) \rangle = \delta \chi(A)$   
 $(\forall x \in V-S, \forall A \in \text{Lie}(G))$

$\therefore$   $f(\rho(\exp tA)x) = \chi(\exp tA) f(x)$   
 $\parallel \parallel$   
 $f(\exp t d\rho(A)x) \quad \exp t \delta \chi(A) f(x)$

両辺を  $t$  で微分して  $t=0$  とおくと,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \frac{d(\exp t dP(A)x)_i}{dt} = \delta\chi(A) f(x)$$

$$\parallel$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) (dP(A)x)_i = \langle dP(A)x, \text{grad} f(x) \rangle$$

$$\therefore \langle dP(A)x, \underbrace{\varphi_f(x)}_{\parallel \frac{\text{grad} f(x)}{f(x)}} \rangle = \delta\chi(A) \quad //$$

注) Lemma 6 は  $f(x)$  の相対不変性の infinitesimal な表現である。尚, Lemma 6 は  $\mathbb{C}$  に限らず一般の  $\overline{K}$  で成立する。

Lemma 7 (1)  $\varphi_f: V-S \rightarrow V^*$  は単射  
(2)  $G_x = G_{\varphi_f(x)}$

$\therefore$  (1)  $\varphi_f(x) = \varphi_f(x')$  ならば,

$$\langle dP(A)x, \varphi_f(x) \rangle = \delta\chi(A) = \langle dP(A)x', \varphi_f(x') \rangle$$

$$\text{より } \langle dP(A)(x-x'), \varphi_f(x) \rangle = 0$$

$$\parallel$$

$$- \langle x-x', dP^*(A)\varphi_f(x) \rangle$$

separable の仮定 (8頁) より  $\{dP^*(A)\varphi_f(x); A \in \mathcal{L}u(G)\}$

$= V^*$  であるから,  $x-x'=0$  即ち  $x=x'$ ,  $\varphi_f$  = 単射.



Proposition 9  $(G, \rho, V) = \text{a regular P.V. s.t. } \chi_1(G) = \langle \chi \rangle$   
 $f \leftrightarrow \chi, \deg f = d, \dim V = n$   
 $\Rightarrow d \mid 2n, \det \rho(g)^2 = \chi(g)^{\frac{2n}{d}}$

$\therefore$  Prop 5 に  $\exists n \exists m \in \mathbb{Z}$  s.t.  $\det \rho(g)^2 = \chi(g)^m$

今  $\rho(g) = tI_V$  に  $\exists t$   $\det \rho(g) = t^n$  と

$$f(\rho(g)x) = f(tx) = t^d f(x) \text{ かつ } \chi(g) = t^d$$

$$\therefore t^{2n} = t^{dm} \quad \therefore m = \frac{2n}{d} \quad //$$

さて  $(G, \rho, V) = \text{P.V.}$  の相対不変式  $f \leftrightarrow \chi$   
 に對し  $(G, \rho^*, V^*) = \text{P.V.}$  と  $f^* \leftrightarrow \chi^{-1}$  かつ  
 $f^* = \text{多項式}$ , と仮定する.

$$f^*(x) = \sum a_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \text{ に對して}$$

$$f^*(D_x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum a_{i_1 \dots i_n} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{i_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{i_n} \text{ とおく.}$$

$$\text{即ち } f^*(D_x) \text{ は } f^*(D_x)e^{\langle x, y \rangle} = f^*(y)e^{\langle x, y \rangle}$$

なる定数係数微分作用素である.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ ならば } \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y_n} \end{pmatrix} = {}^t g^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{ かつ}$$

$$\varphi(x) = f^*(D_x) f(x)^{s+1} \text{ とおく } \varphi(\rho(g)x) = \chi(g)^s \varphi(x)$$

勿論  $f(\rho(g)x)^s = \chi(g)^s f(x)^s$  でもあるから

$$\frac{f^*(D_x) f(x)^{s+1}}{f(x)^s} = b(s) \text{ は } x \in V - S \text{ に依存しない.}$$

即ち  $f^*(D_x)f(x)^{s+1} = b(s)f(x)^s$

$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)^{s+1} = (s+1)f(x)^s \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$  etc. であるから

$b(s)$  は  $s$  の多項式 として  $\deg b(s) \leq \deg f^*(x)$  である。

これを  $f$  の  $b$ -関数 とよぶ。  $b$  には  $S = \{f=0\}$  のときは、 $(G, \rho, V)$  の  $b$ -関数 といふ。

Proposition 10  $(G, \rho, V)$  = a reductive P.V. over  $\mathbb{C}$   
 $f$  多項式  $\leftrightarrow \chi$ ,  $d = \deg f$  (注2 参照)

$\Rightarrow (G, \rho^*, V^*)$  に於て  $\exists f^* d$  次多項式  $\leftrightarrow \chi^{-1}$

s.t. (1)  $f^*(D_x)f(x)^{s+1} = b(s)f(x)^s$  として

$b(s) = b_0 s^d + \text{低次の項}$  ( $b_0 \neq 0$ ) i.e.  $\deg b(s) = d$

(2)  $f^*(\varphi_f(x)) = \frac{b_0}{f(x)}$

$\therefore G = \text{reductive}$  中  $G \supset K = \text{maximal compact}$  部分群 s.t.  $G = \overline{K}$ . 共役を考えて  $K \subset U_n$  とし可.

$$\begin{aligned} f^*(y) &\stackrel{\text{def}}{=} \overline{f(\bar{y})} \text{ とおくとき, } g \in K \Rightarrow \rho^*(g)y = \\ &= g^{-1}y = \bar{g}y \text{ 中 } f^*(\rho^*(g)y) = f^*(\bar{g}y) \\ &= \overline{f(g\bar{y})} = \overline{\chi(g)f(\bar{y})} = \overline{\chi(g)}f^*(y) \end{aligned}$$

$|\chi(K)|$  は  $\mathbb{R}_+^\times$  の compact 部分群 中  $= \{1\}$

よって  $\overline{\chi(g)} = \chi(g)^{-1}$  for  $g \in K$

$\therefore f^*(\rho^*(g)y) = \chi(g)^{-1}f^*(y)$  for  $\forall g \in K$

従って  $\forall g \in \overline{K} = G$  に対しこの代数関係は成立.

$$f(x)^m = \sum_{\bar{i}_1 + \dots + \bar{i}_n = dm} a_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_n}^{(m)} x_1^{\bar{i}_1} \dots x_n^{\bar{i}_n} \quad \text{と おく と}$$

$$f^*(x)^m = \sum_{\bar{i}_1 + \dots + \bar{i}_n = dm} \overline{a_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_n}^{(m)}} x_1^{\bar{i}_1} \dots x_n^{\bar{i}_n} \quad \text{と する。}$$

$f((1, 0, \dots, 0)) = a \neq 0$  とし一般性を失わずに,

(  $f(v) \neq 0$  なる  $v$  をとり,  $v = v_1, \dots, v_n$  を正規直交系にとり, これを座標にとり直せばよい )

$$\Rightarrow \quad \underbrace{|f^*(D_x)^m f(x)^m|}_{\text{I}} = \sum_{\substack{\bar{i}_1 + \dots + \bar{i}_n \\ = dm}} |a_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_n}^{(m)}|^2 (\bar{i}_1!) \dots (\bar{i}_n!) \quad \underbrace{\text{II}}_{\text{III}}$$

$$|b(m-1)b(m-2)\dots b(1)b(0)| \qquad |a|^{2m}(dm)!$$

今  $\deg b(s) = d' (\leq d = \deg f^*)$  とする

$\exists C > 0$  s.t.  $|b(m)| \leq C(m+1)^{d'}$  for  $\forall m \geq 1$

(例として  $b(s) = b_0 s^{d'} + b_1 s^{d'-1} + \dots + b_d$ ,  $\max |b_i| = C$

と おく と  $|b(s)| \leq C \sum_{i=0}^{d'} |s|^i \leq C(|s|+1)^{d'}$  と  $|s| = m \geq 1$

に おき  $|b(m)| \leq C(m+1)^{d'}$  と なる )

$$\Rightarrow |b(m-1)b(m-2)\dots b(1)b(0)| \leq C^{m-1} (m!)^{d'} \cdot b(0)$$

$$\therefore |a|^{2m}(dm)! \leq C^{m-1} (m!)^{d'} \cdot b(0)$$

$$\frac{C^{m-1} \cdot b(0)}{|a|^{2m}} \leq m! \quad \text{for } \forall m \geq m_0 \quad \text{ゆえ}$$

$$(dm)! \leq (m!)^{d'+1} \quad \text{for } \forall m \geq m_0. \quad \text{ここで } d'$$

$d' < d$  ならば  $d'+1 \leq d$  中へ

$(dm)! \leq (m!)^d$  for  $m \geq m_0$ . 矛盾.  $\therefore d' = d$ .

$$f^*(D_x) f(x)^{s+1} = b(s) f(x)^s = b_0 f(x)^s \cdot s^d + (s \text{ の低次の項})$$

$$\stackrel{||}{f^*\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)} \cdot f(x)^{s+1-d} \cdot s^d + (s \text{ の低次の項})$$

$$\stackrel{||}{f^*(\varphi_f(x))} f(x)^{s+1} s^d + (s \text{ の低次の項})$$

$$s^d \text{ の係数を比べて } f^*(\varphi_f(x)) = \frac{b_0}{f(x)} \quad //$$

Proposition 11  $(G, \rho, V) = \text{a reductive P.V. over } \mathbb{C}$   
 s.t.  $S = \{x \in V; f(x) = 0\}$ : (既約と限る) 超曲面  
 $\Rightarrow f = \text{non-degenerate}$ ,  $\therefore (G, \rho, V) = \text{regular}$

$\therefore$  簡単のため  $G = \rho(G) \subset GL(V)$  としてよい.

— で Zariski 閉包, —<sup>c</sup> で複素共役を表わす.

$G \supset K = \text{max. compact 部分群}$  s.t.  $G = \overline{K}$  とする.

base をうまくとって  $K \subset U_n$  としてよい.

$${}^t g^{-1} = \overline{g}^c \text{ for } \forall g \in K \text{ より } {}^t G^{-1} = \overline{G}^c$$

$$f^*(x) = \overline{f(\bar{x})}, \quad S^* = \{f^*(x) = 0\} \text{ とおくと } f^*(\rho^*(g)x) \\ = \chi^{-1}(g) f^*(x) \text{ (但し } f \leftrightarrow \chi) \text{ であつた. } V - S = G x_0 \text{ なる}$$

$$\overline{V - S}^c = \overline{G}^c \cdot \overline{x_0}^c = {}^t G^{-1} \cdot \overline{x_0}^c$$

$$\stackrel{||}{V^* - S^*} \quad (f(x) \neq 0 \Leftrightarrow f^*(\bar{x}) = \overline{f(x)} \neq 0 \text{ による})$$

$\therefore (G, \rho^*, V^*)$  は  $S^* = \{f^*(x) = 0\}$  を singular set とする P.V. である.

Prop 10 の (2) により  $x \in V - S \Rightarrow f^*(\varphi_f(x)) = \frac{b_0}{f(x)} \neq 0$   
 $\Rightarrow \varphi_f(x) \in V^* - S^*$  i.e.  $\overline{\varphi_f(V - S)} = \overline{V^* - S^*} = V^*$   
 ゆえ  $f = \text{non-degenerate}$  //

さて

D. Luna, Sur les orbites fermées des groupes  
 algébriques réductifs, Invent. math 16 (1972), 1-5  
 に次の結果が書かれている。

Proposition 12 (D. Luna) reductive 代数群  
 $G$  が smooth affine variety  $X$  に作用しているとする。  
 $X \ni \forall x$  における  $G$  の isotropy 部分群を  $G_x$  とするとき、  
 各接空間  $T_x X$  上に  $G_x$ -不変 non-degenerate symmetric  
 form が存在する、と仮定する。このとき  
 $X$  内には  $G$ -closed orbits の union からなる Zariski-  
 dense open subset  $U$  が存在する。とくに open  
 dense orbit が存在すればそれは  $X$  自身である。

これを使うと、

Proposition 13  $(G, \rho, V) = \text{a reductive regular P.V.}$   
 over  $\mathbb{C}$ ,  $f = \text{non-degenerate relative invariant 多項式}$   
 $\Rightarrow S = \{x \in V; \text{Hess}_f(x) = 0\}$ : 超曲面  
 但し  $\text{Hess}_f(x) = \det \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)$

∴ Prop 4 の (2) と全く同様の計算で

$$\chi(g) \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right) = {}^t \rho(g) \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\rho(g)x) \right) \rho(g)$$

$$\text{と } 1 = g \in G_x \Rightarrow \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right) = {}^t \rho(g) \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right) \rho(g)$$

$$\text{よって } B_x(u, v) = {}^t u \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right) v \quad \text{と おく}$$

$$B_x(\rho(g)u, \rho(g)v) = B_x(u, v) \quad \text{for } \forall g \in G_x$$

$$0 \neq \det(d\varphi_f)_x = \frac{1}{1 - \deg f} \cdot \frac{\text{Hess}_f(x)}{f(x)^n} \quad (= \text{Hess} \log f(x))$$

(例えば M. Sato-T. Kimura, Nagoya Math. J. 65(1977)

の 63 頁参照) ゆえ  $B_x(u, v)$  は non-degenerate

な  $G_x$ -不変 symmetric form on  $T_x X$  for

$x \in X = \{x \in V; \text{Hess}_f(x) \neq 0\}$  (これは affine variety).

$\text{Hess}_f(x)$  も 相対不変式 ゆえ  $X \supset V - S = \text{open orbit}$ .

よって Luna の定理 (Prop 12) により  $X = V - S$ .

即ち  $S = \{x \in V; \text{Hess}_f(x) = 0\}$ .

(但し  $\deg f \geq 2$  としておく.  $\deg f = 1$  ならば  
 $(G, \rho, V) \simeq (GL_1, V(1))$  で このときは  
 $S = \{f=0\}$  となる.)

//

注)  $\mathbb{C}$  上では  $(G, \rho, V) = \text{reductive P.V.}$  について

(1)  $(G, \rho, V)$  regular

$\Leftrightarrow$  (2)  $S = \text{超曲面}$

$\Leftrightarrow$  (3)  $V - S = G/G_x$  affine variety

$\Leftrightarrow$  (4)  $G_x (x \in V - S)$  reductive.  
松島の定理

実際に与えられた  $(G, \rho, V) = \text{reductive P.V. over } \mathbb{C}$  が regular かどうかを判定するのは, generic isotropy 部分群が reductive かどうかをみればよい。

例)  $G = GL_n(\mathbb{C})$ ,  $V = \text{Sym}_n = \{x \in M_n(\mathbb{C}); {}^t x = x\}$ ,  
 $\rho(g)x = gx {}^t g$ ,  $V \ni x_0 = I_n$

$\Rightarrow G_{x_0} = O_n$ ; reductive  $\therefore (G, \rho, V) = \text{regular}$ .

$f(x) = \det x \longleftrightarrow (\det g)^2$  であり

$X(G) = \langle \det g \rangle \supset X_1(G) = \{(\det g)^m; (\det g)^m|_{O_n} = 1\}$

$= \langle (\det g)^2 \rangle$ . よって 相対不変式は  $c f(x)^m$

$(c \in \mathbb{C}^\times, m \in \mathbb{Z})$  の形.  $S = \{x \in V; f(x) = 0\}$

となる。

以上で代数閉体上の一般論を一応終わる。

さて distribution (超関数) の復習 をしよう.

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $P = (P_1, \dots, P_n) \in \mathbb{Z}_+^n$  に対し

$|P| \stackrel{\text{def}}{=} P_1 + \dots + P_n$  とおく. 更に

$x^P \stackrel{\text{def}}{=} x_1^{P_1} \dots x_n^{P_n}$ ,  $D^P \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{P_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{P_n}$  とおく.

$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}, \text{ compact support をもつ } C^\infty\text{-関数}\}$

に属す  $\varphi_m$  ( $m=1, 2, \dots$ ) について,

$\varphi_m \Rightarrow 0$  とは ある compact set  $E \subset \mathbb{R}^n$  で

(1)  $\text{supp } \varphi_m \subset E$  ( $m=1, 2, \dots$ )

(2)  $\forall P$  に対し 一様に  $D^P \varphi_m \rightarrow 0$

さて  $\mathbb{C}$ -linear map  $T: C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$  が

$\forall \varphi_m \Rightarrow 0$  に対し  $T(\varphi_m) \rightarrow 0$  を満たすとき,

$T$  を ( $\mathbb{R}^n$ 上の) distribution と言う.

$C^\infty$ -関数  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  が 急減少関数 (rapidly decreasing function) とは  $\forall P, Q$  に対し

$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^P D^Q \varphi(x)| < +\infty$ , とすること.

その全体を  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  と記す.  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

であるが, distribution  $T$  が tempered であるとは

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  まで拡張できること. 即ち tempered

distribution とは  $\mathbb{C}$ -linear map  $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$

s.t.  $T(\varphi_m) \rightarrow 0$  for  $\forall \varphi_m \Rightarrow 0$ .

例)  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  (例えば "多項式 など")

$dx = \text{Lebesgue measure}$ , に対して

$$T_f: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\begin{array}{ccc} \psi & & \psi \\ \Phi & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) f(x) dx \end{array}$$

は *tempered distribution* を与える. ( $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  を超関数とみる, ということは  $T_f$  を考える, ということ)

$$\text{部分積分により } \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} f \right) \Phi dx = - \int_{\mathbb{R}^n} f \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi \right) dx$$

$$\Rightarrow T_{\frac{\partial}{\partial x_i} f}(\Phi) = -T_f\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Phi\right), \text{ 一般に}$$

$$T_{D^p f}(\Phi) = (-1)^{|p|} T_f(D^p \Phi) \text{ ここで右辺は}$$

$f$  が微分できない場合でも意味をもつから

$$T \text{ の微分 } D^p T \text{ を } D^p T(\Phi) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{|p|} T(D^p \Phi)$$

で定める. (即ち  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  が微分できなくても超関数としては微分できる, という事があろう)

$\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  に対し, その Fourier変換 を

$$\hat{\Phi}(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) e^{2\pi i \langle x, \gamma \rangle} dx \text{ で定める.}$$

さて  $M, N \geq 0, M, N \in \mathbb{Z}, \forall \Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  に対して

$$\nu(M, N)(\Phi) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^M \cdot \sum_{\substack{p \\ |p| \leq N}} |D^p \Phi(x)|$$

とかく。但し  $\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ .

$\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  について 明らかに

$$\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \nu(M, M)(\Phi) < +\infty \text{ for } \forall M \geq 0$$

**Proposition 14**  $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  とする.  $\forall M$  に対し  
 $\exists M_0$  s.t.  $\nu(M, M)(\hat{\Phi}) \leq \text{const.} \nu(M_0, M_0)(\Phi)$   
 と  $\leq 1 = \hat{\Phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \therefore x^p D_x^q \hat{\Phi}(x) &= x^p \int \Phi(y) D_x^q e^{2\pi i \langle x, y \rangle} dy \\ &= (2\pi i)^{|q|} x^p \int y^q \Phi(y) e^{2\pi i \langle x, y \rangle} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (D_y^p e^{2\pi i \langle x, y \rangle} &= (2\pi i)^{|p|} x^p e^{2\pi i \langle x, y \rangle} \text{ where } ) \\ &= (2\pi i)^{|q|-|p|} \int (y^q \Phi(y)) \cdot D_y^p e^{2\pi i \langle x, y \rangle} dy \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{部分積分}}{=} (-1)^{|p|} \cdot (2\pi i)^{|q|-|p|} \int D_y^p (y^q \Phi(y)) \cdot e^{2\pi i \langle x, y \rangle} dy$$

$$\therefore D_y^p (y^q \Phi(y)) = \sum_{p', q'} C_{p', q'} y^{q'} D_y^{p'} \Phi(y)$$

と表わす.  $C_1$  は  $|y^{q'}| \leq C_1 (1 + \|y\|^2)^{\frac{q'}{2}} \text{ for } \forall y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} &= \text{とすると } \left| \int y^{q'} (D_y^{p'} \Phi(y)) e^{2\pi i \langle x, y \rangle} dy \right| \\ &\leq C_1 \left[ \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (1 + \|y\|^2)^{\frac{q'}{2} + \frac{n+1}{2}} \cdot |D_y^{p'} \Phi(y)| \right] \cdot \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|y\|^2)^{-\frac{n+1}{2}} dy \end{aligned}$$

$$\therefore C_2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|y\|^2)^{-\frac{n+1}{2}} dy < +\infty \text{ where}$$

$$\leq C_1 C_2 \nu\left(\frac{q'}{2} + \frac{n+1}{2}, p'\right)(\Phi) \leq C_1 C_2 \nu(M_0, M_0)(\Phi)$$

$$\text{for } \forall M_0 \geq \max\left(\frac{q'}{2} + \frac{n+1}{2}, p'\right)$$

結局  $\forall p, q$  に対し  $\exists C, \exists M_0$  s.t.

$$|x^p D_x^q \hat{\Phi}(x)| \leq C \cdot \nu(M_0, M_0)(\Phi) \text{ が 成り立つ.}$$

従って  $\forall M$  に対し  $\exists M_0$  s.t.

$$\nu(M, M)(\hat{\Phi}) \leq \text{const.} \nu(M_0, M_0)(\Phi) \quad //$$

Proposition 15  $\hat{\hat{\Phi}}(x) = \Phi(-x)$ , 従って  
 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ : Fourier 変換.  
 $\downarrow \quad \downarrow$   
 $\Phi \longmapsto \hat{\Phi}$

$\therefore$  きちんと示すと長くなるので、ここでは感じをつかむ

$$\text{ため } \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \langle x, y \rangle} dx = \delta(y) \quad (\text{これは Dirac の})$$

$$\delta\text{-関数 とよばれ } \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \delta(y) dy = \varphi(0) \text{ を}$$

みたす) を認めて、示すことにする。

$$\hat{\hat{\Phi}}(x) = \int \hat{\Phi}(y) e^{2\pi i \langle x, y \rangle} dy$$

$$= \int \left( \int \Phi(z) e^{2\pi i \langle z, y \rangle} dz \right) e^{2\pi i \langle x, y \rangle} dy$$

$$= \int \Phi(z) \underbrace{\left( \int e^{2\pi i \langle z+x, y \rangle} dy \right)}_{\delta(z+x)} dz = \Phi(-x) \quad //$$

一般に, 例えば  $f(x) = \text{多項式}$  ならば その Fourier 変換

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{2\pi i \langle x, y \rangle} dx \text{ は収束しない。}$$

しかしこれを *distribution* とみると

$$\int \left( \int f(x) e^{2\pi i \langle x, y \rangle} dx \right) \Phi(y) dy$$

$$= \int f(x) \left( \int \Phi(y) e^{2\pi i \langle x, y \rangle} dy \right) dx$$

$$= \int f(x) \hat{\Phi}(x) dx = T_f(\hat{\Phi}) \text{ となり意味を}$$

もつ. そこで一般に  $T$  の Fourier 変換  $\hat{T}$  を

$$\hat{T}(\Phi) \stackrel{\text{def}}{=} T(\hat{\Phi}) \text{ と定めることにする。}$$

$\mathbb{R}^n \supset U = \text{open}$  上で  $\mathbb{R}^n$  上の *distribution*  $T$  が *vanish* するとは,  $T(\Phi) = 0$  for all  $\Phi \in C_0^\infty(U)$

そこで  $U_0$  をそのような  $U$  の union とするとき

$\text{supp } T \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^n - U_0$  によって *distribution*  $T$  の support を定義する.

また  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  に対し  $fT$  を

$$(fT)(\Phi) \stackrel{\text{def}}{=} T(f\Phi) \text{ によって定義する。}$$

(但し  $f\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  とする. 例えば  $f = \text{多項式}$ )  
ならよい.

Proposition 16  $T$  = tempered distribution s.t.

(1)  $\exists f = \text{多項式}$  s.t.  $\text{supp } T \subset S = \{f=0\}$

(2)  $\exists M_0, \exists C > 0$  s.t.

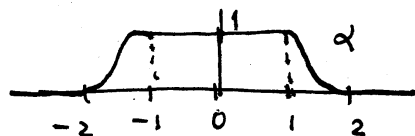
$$|T(\Phi)| \leq C \cdot \nu(M_0, M_0)(\Phi) \text{ for } \forall \Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow \forall L > M_0 \text{ に対して } f^L T = 0$$

$\therefore \alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  を  $\alpha(t) = 0$  for  $|t| \geq 2$ ,

$\alpha(t) = 1$  for  $|t| \leq 1$  とする.

$\forall \eta > 0$  を fix する.



$f(x)^L \Phi(x) - f(x)^L \alpha\left(\frac{f(x)}{\eta}\right) \Phi(x)$  は  $|f(x)| \leq \eta$

で 0, 他に  $S$  上 で 0.  $\text{supp } T \subset S$  より

$T$  を作用させても 0. よって

$$|f^L T(\Phi)| = |T(f^L \Phi)| = |T(f^L \cdot \alpha(\frac{f}{\eta}) \cdot \Phi)|$$

$$\leq C \cdot \nu(M_0, M_0)(f^L \cdot \alpha(\frac{f}{\eta}) \cdot \Phi)$$

$$= C \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^{M_0} \sum_{\substack{p \\ |p| \leq M_0}} |D^p f^L \cdot \alpha(\frac{f}{\eta}) \cdot \Phi(x)|$$

(ここで  $\alpha(\frac{f}{\eta}) \neq 0 \Rightarrow |f| \leq 2\eta$ , であり  
 $\alpha(\frac{f}{\eta})$  の微分で出てくる  $\frac{1}{\eta}$  は, そのとき  $f^L$  の微分の回数が上がるので  $\eta$  は打ち消しあうので,

$L > M_0$  のとき

$$= \eta^{L-M_0} \cdot C_1(\Phi), \text{ 但し } C_1(\Phi) \text{ は } \eta \text{ によるぬ, と表わせる.}$$

$\eta$  は任意であったから  $\eta \rightarrow 0$  として  $|f^L T(\eta)| = 0$  for  $\forall \eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . 即ち  $f^L T = 0$  //

注)  $T$  が ぶつうの関数  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  s.t.  $\text{supp } T \subset \{f=0\}$  なる 明らかなに  $fT=0$  であるが, Prop 16 は この事実の *distribution* への拡張である.

以上で *distribution* の復習も一応終えて 再び 概均質ベクトル空間にもどろう. 今度は  $\mathbb{R}$  上で考える.

$(G, \rho, V) = \text{a reductive P.V. defined over } \mathbb{R}$   
such that  $S = \{f=0\}$  既約超曲面,  
 を考える.

Prop 11 により  $(G, \rho, V) = \text{regular}$  で  
 $f \leftrightarrow \chi$ ,  $d = \deg f$ ,  $n = \dim V$  とすると Prop 9 より  
 $d | 2n$  かつ  $\det \rho(g)^2 = \chi(g)^{\frac{2n}{d}}$  となる. とくに

$$d(\rho(g)x) = |\det \rho(g)| dx = |\chi(g)|^{\frac{n}{d}} dx$$

が 成り立つ。

Proposition 17 (1)  $\exists \alpha \in \mathbb{C}^\times$  s.t.  $\alpha f: V_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$

(即ち  $f: V_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$  と仮定してよい)

(2)  $\chi: G_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^\times$

$\therefore \forall x$  について (— は複素共役を意味す)

$$G_x \ni g \Leftrightarrow P(g)x = x \Leftrightarrow \overline{P(g)x} = \bar{x}$$

$\parallel \leftarrow P = \text{def. over } \mathbb{R}$   
 $P(\bar{g})\bar{x}$

$$\Leftrightarrow \bar{g} \in G_{\bar{x}} \Leftrightarrow g \in \overline{G_{\bar{x}}} \quad \therefore G_x = \overline{G_{\bar{x}}}$$

$$\therefore S \ni x \Leftrightarrow \dim G_x = \dim \overline{G_{\bar{x}}} = \dim G_{\bar{x}} > \dim G - \dim V$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} \in S$$

$$\therefore f(x) = 0 \Leftrightarrow f(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \overline{f(x)} = 0$$

$\uparrow$   
 $x$  の多項式

よって Hilbert 零点定理 ( $\mathbb{C}$  上で  $f=0$  となる  $h=0$  が常に成立  $\Rightarrow h = cf^l$   $\forall n \exists c \in \mathbb{C}^*, l \in \mathbb{N}$ ) と

次数を比べて  $\overline{f(x)} = cf(x)$   $\forall n \exists c \in \mathbb{C}^*$

$$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} \ni x_0 \Rightarrow \bar{x}_0 = x_0, f(x_0) \neq 0, \infty$$

$$\Rightarrow c = \frac{\overline{f(x_0)}}{f(x_0)} \quad \text{今 } \alpha = \frac{1}{f(x_0)} \text{ とおくと}$$

$$\overline{\alpha f(x)} = \alpha f(x), \text{ ぞして}$$

$$x \in V_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \bar{x} = x \Rightarrow \overline{\alpha f(x)} = \alpha f(x) \Leftrightarrow \alpha f(x) \in \mathbb{R}^*$$

(2) の証明:  $g \in G_{\mathbb{R}}, x_0 \in V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$  とすると

$$\underbrace{\alpha f(P(g)x_0)}_{\in \mathbb{R}^*} = \chi(g) \underbrace{\alpha f(x_0)}_{\in \mathbb{R}^*} \Rightarrow \chi(g) \in \mathbb{R}^*$$

//

$$\text{さて } O(n, \mathbb{R}) = \{X \in GL_n(\mathbb{R}) ; {}^t X X = I_n\}$$

$$S_+(n, \mathbb{R}) = \{X \in GL_n(\mathbb{R}) ; {}^t X = X, X > 0 \text{ (正定値)}\}$$

と置く。

$G$  を reductive algebraic group defined over  $\mathbb{R}$  とする。  $V_{\mathbb{R}}$  の base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  を適当にとるとこれにより  $G_{\mathbb{R}} \hookrightarrow GL_n(\mathbb{R})$  としたとき,

$G_{\mathbb{R}} \ni \forall g$  は  $g = kp$  ( $k \in G_{\mathbb{R}} \cap O(n, \mathbb{R}), p \in G_{\mathbb{R}} \cap S_+(n, \mathbb{R})$ ) と書けることが知られている。

$$\text{よって } {}^t g^{-1} = {}^t k^{-1} \cdot {}^t p^{-1} = k \cdot p^{-1} \in G_{\mathbb{R}} \quad \text{ゆえ}$$

${}^t G_{\mathbb{R}} = G_{\mathbb{R}}$ . これは代数関係で  $G = \text{defined over } \mathbb{R}$  ゆえ  ${}^t G = G$  となる。

Proposition 18  $GL(V) \supset G = \text{reductive alg. gp def. over } \mathbb{R}$   
 $\Rightarrow \exists \tau: V \rightarrow V^*$  linear map,  $\exists \iota: G \rightarrow G$  involution  
 s.t.  $\tau(V_{\mathbb{R}}) = V_{\mathbb{R}}^*$ ,  $\tau(gx) = (g^{\iota})^* \tau(x)$ ,  $\chi(g^{\iota}) = \chi(g)^{-1}$

$\therefore$  base  $\tau$   ${}^t G = G$  となるようにとり  $g^{\iota} \stackrel{\text{def}}{=} {}^t g^{-1}$  と置く。

これは  $G$  の involution になる。  $V_{\mathbb{R}}$  の base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  の dual base  $\{f_1, \dots, f_n\}$  により  $V = V^* = \mathbb{C}^n$  とする。

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \text{ のとき } \langle gx, g^* y \rangle = \langle x, y \rangle$$

即ち  $g^* = {}^t g^{-1}$  である。  $\tau: V \rightarrow V^*$  を

$$\tau\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f_i \text{ で } \tau \text{ を定めると}$$

$\tau(gx) = g\tau(x) = (g^v)^* \tau(x)$  であり  
 $\tau(V_{\mathbb{R}}) = V_{\mathbb{R}}^*$  は明らかである。

$$G_{\mathbb{R}} \ni g = kp \Rightarrow \chi(g^v) = \chi({}^t g^{-1}) = \chi(kp^{-1}) \\ = \chi(k)\chi(p)^{-1}$$

$|\chi(G_{\mathbb{R}} \cap O(n, \mathbb{R}))|$  は  $\mathbb{R}_+^*$  の compact 部分群ゆえ  
 $= 1$  であるが 一方 Prop 17(2) により

$$\chi(G_{\mathbb{R}} \cap O(n, \mathbb{R})) \subset \mathbb{R}^* \quad \therefore \chi(G_{\mathbb{R}} \cap O(n, \mathbb{R})) = \{\pm 1\}$$

とくに  $\chi(k) = \chi(k)^{-1}$  であるから,

$\chi(g^v) = \chi(g)^{-1}$  for  $g \in G_{\mathbb{R}}$ . これは代数関係で  
 $G = \text{defined over } \mathbb{R}$  ゆえ  $\chi(g^v) = \chi(g)^{-1}$  for  $\forall g \in G //$

$$\text{よって } f^*(y) \stackrel{\text{def}}{=} f(\tau^{-1}y) \quad (y \in V^*)$$

$S^* \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in V^*; f^*(y) = 0\}$  とおくと  
 $f^*(\tau(x)) = f(x)$  ゆえ  $\tau(V - S) = V^* - S^*$  は  
 $G$ -orbit, 従って,

$(G, \rho^*, V^*) = \text{a reductive P.V. defined over } \mathbb{R}$

$$\text{s.t. } S^* = \{y \in V^*; f^*(y) = 0\},$$

$$f^*(\rho^*(g)y) = f(\tau^{-1}g^*y) = f(g^v \tau^{-1}y)$$

$$= \chi(g^v) f^*(y) = \chi(g)^{-1} f^*(y)$$

$$\Rightarrow f^* \leftrightarrow \chi^{-1} \quad \text{更に } (x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \langle x, \tau y \rangle$$

$$= \langle \sum_i x_i e_i, \tau(\sum_j y_j e_j) \rangle = \langle \sum_i x_i e_i, \sum_j y_j f_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\text{と} \text{お} \text{く} \text{と} \quad f^*(D_x)e^{(x,y)} = f(\tau^{-1}(\tau y))e^{(x,y)} = f(y)e^{(x,y)}$$

が成り立つ。更に

$$(gx, g'y) = \langle gx, \tau(g'y) \rangle = \langle gx, g^*\tau(y) \rangle = \langle x, \tau(y) \rangle$$

$$= (x, y) \text{ である. } d = \deg f = \deg f^* \text{ とする}$$

$$f^*(D_x)f(x)^{s+1} = b(s)f(x)^s, \quad \deg b(s) = d$$

$$b(s) = b_0 \prod_{i=1}^d (s + \alpha_i) \quad (b_0 \neq 0) \text{ であるが}$$

$\alpha_i > 0, \alpha_i \in \mathbb{Q}$  が 柏原正樹 氏の定理 として知られている。

$$\Gamma(s) \text{ を } \Gamma\text{-関数 とすると } \Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \text{ であるから}$$

$$\Gamma(s) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^d \Gamma(s + \alpha_i) \text{ とおくと } b(s) = b_0 \cdot \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s)}$$

となる。

$$G^+ \stackrel{\text{def}}{=} G_{\mathbb{R}} \text{ の単位元の連結成分}$$

$$\Rightarrow V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = V_1 \cup \cdots \cup V_l, \text{ 各 } V_i \text{ は } G^+\text{-orbit,}$$

と分解する。

注)  $k$  が  $\text{type}(F)$  の体 であるとは

(1)  $\forall$  次数 に対し,  $k$  は有限個の拡大しかもたない,

(2) 完全体,

J.P. Serre の Cohomologie Galoisienne (Springer Lecture Note) には

$\star k$  が  $\text{type}(F) \Rightarrow V_k - S_k$  は有限個の  $G_k$ -orbits に分解,

が証明されている。特に  $\text{ch}(k)=0$  の local field  
なら良い。  $V-S=G/H$  とするとき

$$\cancel{G_k}^{V_k-S_k} = \ker(H'(k, H) \rightarrow H'(k, G)) \text{ である.}$$

$\text{ch}(k)=p>0$  の local field は 完全体ではないから  
type (F) ではないが, 筆者が J.P. Serre に手紙で  
問い合わせた所, この場合でも  $H = \text{connected reductive}$   
ならば  $H'(k, H) = \text{有限集合}$ , だとのことであった。

この事から連結でない場合も有限になることがいえるので  
 $\text{ch}(k)=p>0$  の local field  $k$  の場合も generic  
isotropy subgroup が reductive ならば, 特に  
 $(G, P, V)$  が reductive regular P.V. ならば  
 $V_k-S_k$  が 有限個の  $G_k$ -orbits に分解することが  
いえる。 //

さて  $f: V_{\mathbb{R}}-S_{\mathbb{R}} = V_1 \cup \dots \cup V_\ell \rightarrow \mathbb{R}^*$  連続, で  
 $V_i = \text{連結}$ , かつ その符号は  $V_i$  上一定である。

そこで  $\varepsilon_i = \underset{x \in V_i}{\text{sgn } f(x)}$  ( $i=1, \dots, \ell$ ) とおく。

$\Rightarrow |f(x)| = f(x) \varepsilon_i$  on  $V_i$ , とあるから

$$f^*(D_x) |f(x)|^{s+1} = b(s) \varepsilon_i |f(x)|^s = \varepsilon_i b_0 \frac{\gamma(s+1)}{\gamma(s)} \cdot |f(x)|^s$$

そこで  $\Phi \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ ,  $s \in \mathbb{C}$  について

$$\underline{F_i(s, \Phi)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\gamma(s)} \int_{V_i} |f(x)|^s \cdot \Phi(x) dx \quad \text{とおく}$$

$\operatorname{Re} s > 0$  で  $|f(x)|^s$  は多項式 order となり収束する.

$$\frac{|f(x)|^s}{\gamma(s)} = \varepsilon_i b_0^{-1} f^*(D_x) \frac{|f(x)|^{s+1}}{\gamma(s+1)} \quad \text{であるから}$$

$$F_i(s, \Phi) = \frac{\varepsilon_i b_0^{-1}}{\gamma(s+1)} \int_{V_i} (f^*(D_x) |f(x)|^{s+1}) \cdot \Phi(x) dx$$

$$\stackrel{\text{部分積分}}{=} \frac{(-1)^d \varepsilon_i b_0^{-1}}{\gamma(s+1)} \cdot \int_{V_i} |f(x)|^{s+1} \cdot f^*(D_x) \Phi(x) dx$$

$$= (-1)^d \varepsilon_i b_0^{-1} F_i(s+1, f^*(D_x) \Phi(x))$$

$$= \cdots = (-1)^{dm} (\varepsilon_i b_0^{-1})^m F_i(s+m, f^*(D_x)^m \Phi(x))$$

右辺は  $\operatorname{Re} s > -m$  で収束するから,

$F_i(s, \Phi)$  は  $s$  の entire function として全  $s$  平面に解析接続される。

$$\deg f = d \quad \forall \varepsilon \exists C_1 > 0 \text{ s.t. } |f(x)| \leq C_1 (1 + \|x\|^2)^{\frac{d}{2}}$$

for  $\forall x \in V_{\mathbb{R}}$  である.  $\operatorname{Re} s > 0$  なるば

$$|f(x)|^{\operatorname{Re} s} \leq C_1^{\operatorname{Re} s} \cdot (1 + \|x\|^2)^{\frac{d}{2} \cdot \operatorname{Re} s} \quad \text{となるから}$$

$$\begin{aligned}
|F_i(s, \Phi)| &\leq \frac{1}{|\gamma(s)|} \int_{V_i} |f(x)|^{\operatorname{Re} s} \cdot |\Phi(x)| \cdot dx \\
&\leq \frac{C_1^{\operatorname{Re} s}}{|\gamma(s)|} \int_{V_i} (1 + \|x\|^2)^{\frac{d}{2} \operatorname{Re} s + \frac{n+1}{2} - \frac{n+1}{2}} \cdot |\Phi(x)| \, dx \\
&\leq \frac{C_1^{\operatorname{Re} s}}{|\gamma(s)|} \underbrace{\left( \sup_{x \in V_{\mathbb{R}}} (1 + \|x\|^2)^{\frac{d}{2} \operatorname{Re} s + \frac{n+1}{2}} |\Phi(x)| \right)}_{\parallel \nu(\frac{d}{2} \operatorname{Re} s + \frac{n+1}{2}, 0)(\Phi) \parallel} \underbrace{\int_{V_i} (1 + \|x\|^2)^{-\frac{n+1}{2}} dx}_{\parallel C_2 < +\infty}
\end{aligned}$$

$$\text{即ち } |F_i(s, \Phi)| \leq \frac{C_2 C_1^{\operatorname{Re} s}}{|\gamma(s)|} \cdot \sup_{x \in V_{\mathbb{R}}} (1 + \|x\|^2)^{\frac{d}{2} \operatorname{Re} s + \frac{n+1}{2}} \cdot |\Phi(x)|$$

よって  $\Phi_m \Rightarrow 0$  ならば  $|F_i(s, \Phi_m)| \rightarrow 0$  ( $\operatorname{Re} s > 0$ )

ゆえ  $\Phi \mapsto F_i(s, \Phi)$  は tempered distribution.

$\operatorname{Re} s > -m$  のとき

$$\begin{aligned}
|F_i(s, \Phi)| &= |b_0|^{-m} \cdot |F_i(s+m, f^*(D_x)^m \Phi(x))| \\
&\leq \frac{C_2 \cdot C_1^{\operatorname{Re}(s+m)}}{|\gamma(s+m)|} \cdot \sup_{x \in V_{\mathbb{R}}} (1 + \|x\|^2)^{\frac{d}{2} \operatorname{Re}(s+m) + \frac{n+1}{2}} \cdot |f^*(D_x)^m \Phi(x)|
\end{aligned}$$

ゆえ tempered distribution である. また

$s$  が  $0 \geq \operatorname{Re} s > -1$  の compact set を動くとき

$$\exists M' > 0 \text{ s.t. } |F_i(s - \frac{n}{d}, \hat{\Phi})| \leq \text{const. } \nu(M', M')(\hat{\Phi})$$

であるが これと Prop 14 をあわせて

$$(\star) \exists M > 0 \text{ s.t. } |F_i(s - \frac{n}{d}, \hat{\Phi})| \leq \text{const. } \nu(M, M)(\Phi)$$

とある。

$\Phi \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ ,  $T = \text{tempered distribution}$ ,  $g \in G^+$   
に対して

$$\Phi^g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(gx), \quad (gT)(\Phi) \stackrel{\text{def}}{=} T(\Phi^g)$$

により  $G^+ \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ ,  $\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})'$  に作用させる。

Proposition 19

$V_{\hat{f}} = \alpha$   $G^+$ -orbit with  $G^+$ -invariant measure  $\frac{dx}{|f(x)|^{\frac{n}{d}}}$

$T: C_c^\infty(V_{\hat{f}}) \rightarrow \mathbb{C}$  distribution s.t.  $gT = T$  for  $g \in G^+$

$$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{C}^\times \text{ s.t. } T(\Phi) = c \int_{V_{\hat{f}}} \Phi(x) \frac{dx}{|f(x)|^{\frac{n}{d}}}$$

cf. Harish-Chandra Trans. A.M.S. vol 83, Lemma 36  
を参照せよ。

Corollary 20  $T: C_c^\infty(V_{\hat{f}}) \rightarrow \mathbb{C}$  distribution

s.t.  $gT = |\chi(g)|^{s - \frac{n}{d}} T$  ( $0 \leq \text{Re } s < -1$ )

$$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{C}^\times \text{ s.t. } T(\Phi) = c \int_{V_{\hat{f}}} |f(x)|^{-s} \Phi(x) dx$$

$$\therefore \hat{T} \stackrel{\text{def}}{=} |f(x)|^{s - \frac{n}{d}} T \quad \text{と おく}$$

$$(g\hat{T})(\Phi) = \hat{T}(\Phi^g) = T(|f(x)|^{s - \frac{n}{d}} \cdot \Phi(gx))$$

$$= |\chi(\vartheta)|^{\frac{n}{d}-s} \cdot T\left(|f(x)|^{s-\frac{n}{d}} \cdot \Phi(x)\right) \\ = T\left(|f(x)|^{s-\frac{n}{d}} \Phi(x)\right) = \widehat{T}(\Phi)$$

$$\begin{aligned} \therefore \widehat{T}(\Phi') &= c \int_{V_j} \Phi'(x) \frac{dx}{|f(x)|^{\frac{n}{d}}} \\ &\parallel \\ T\left(|f(x)|^{s-\frac{n}{d}} \Phi'(x)\right) &\parallel \\ &\parallel \\ &= c \int_{V_j} |f(x)|^{-s} \Phi(x) dx \quad // \end{aligned}$$

Proposition 21  $T(\Phi) \stackrel{\text{def}}{=} F_c(s-\frac{n}{d}, \widehat{\Phi})$  とおくと  
 $\vartheta T = |\chi(\vartheta)|^{s-\frac{n}{d}} T$

$$\therefore \widehat{\Phi^\vartheta}(y) = \int \Phi(\vartheta x) e^{2\pi i(x,y)} dx$$

$$\left( \begin{aligned} & \text{ここで } \vartheta x = x' \Rightarrow dx = |\chi(\vartheta)|^{-\frac{n}{d}} dx' \\ & (x, y) = (\vartheta^{-1}x', y) = (x', \vartheta^t y) \text{ かつ} \end{aligned} \right)$$

$$= \int \Phi(x') e^{2\pi i(x', \vartheta^t y)} |\chi(\vartheta)|^{-\frac{n}{d}} dx'$$

$$= |\chi(\vartheta)|^{-\frac{n}{d}} \cdot (\widehat{\Phi})^{\vartheta^t}, \quad \text{従って}$$

$$(\vartheta T)(\Phi) = T(\Phi^\vartheta) = F_c(s-\frac{n}{d}, \widehat{\Phi^\vartheta})$$

$$= \frac{|\chi(\vartheta)|^{-\frac{n}{d}}}{\gamma(s-\frac{n}{d})} \cdot \int_{V_c} |f(x)|^{s-\frac{n}{d}} \cdot \widehat{\Phi}(\vartheta^t x) dx$$

$$(\text{ここで } \vartheta^t x = x' \text{ とおくと } dx = |\chi(\vartheta)|^{\frac{n}{d}} dx',$$

$$\begin{aligned}
 |f(x)|^{s-\frac{n}{d}} &= |\chi(\vartheta)|^{s-\frac{n}{d}} |f(x')|^{s-\frac{n}{d}} \text{ (ゆえ) } \\
 &= |\chi(\vartheta)|^{s-\frac{n}{d}} F_i(s-\frac{n}{d}, \hat{\Phi}) = |\chi(\vartheta)|^{s-\frac{n}{d}} \cdot T(\Phi) \quad //
 \end{aligned}$$

Corollary 20 と Proposition 21 をあわせて

$\forall \Phi \in C_0^\infty(V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}})$  に対して  $\exists C_{ij}(s)$  s.t.

$$F_i(s-\frac{n}{d}, \hat{\Phi}) = \sum_{j=1}^{\ell} C_{ij}(s) \int_{V_j} |f(x)|^{-s} \Phi(x) dx$$

となる。

Proposition 22  $s$  が  $0 \leq \operatorname{Re} s < -1$  の compact set を動くとき,  $\forall \Phi \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$  に対して

$$T_s(\Phi) \stackrel{\text{def}}{=} F_i(s-\frac{n}{d}, \hat{\Phi}) - \sum_{j=1}^{\ell} C_{ij}(s) \int_{V_j} |f(x)|^{-s} \Phi(x) dx$$

とかくと

$$(1) \operatorname{supp} T_s \subset S = \{f=0\}$$

$$(2) \exists M_0, \exists C > 0 \text{ s.t.}$$

$$|T_s(\Phi)| \leq C \cdot \nu(M_0, M_0)(\Phi) \text{ for } \forall \Phi \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$$

∴ (1) は今示したばかりである。

$$\begin{aligned}
 |f(x)| &\leq C_1 (1+\|x\|^2)^{\frac{d}{2}} \quad (\forall x \in V_{\mathbb{R}}) \text{ なる } C_1 \text{ がある} \\
 (-\operatorname{Re} s \geq 0 \text{ ゆえ}) \quad & \left| \int_{V_j} |f(x)|^{-s} \Phi(x) dx \right| \leq \int_{V_j} |f(x)|^{-\operatorname{Re} s} \cdot |\Phi(x)| dx \\
 &\leq C_1^{-\operatorname{Re} s} \cdot \int_{V_j} (1+\|x\|^2)^{-\frac{d}{2} \cdot \operatorname{Re} s + \frac{n+1}{2} - \frac{n+1}{2}} \cdot |\Phi(x)| \cdot dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_1^{-\operatorname{Re} s} \cdot \sup_{x \in V_{\mathbb{R}}} (1 + \|x\|^2)^{-\frac{d}{2} \operatorname{Re} s + \frac{n+1}{2}} \cdot |\Phi(x)| \cdot \underbrace{\int_{V_j} (1 + \|x\|^2)^{-\frac{n+1}{2}} dx}_{C_2 < +\infty} \\
&= C_2 \cdot C_1^{-\operatorname{Re} s} \cdot \nu\left(-\frac{d}{2} \operatorname{Re} s + \frac{n+1}{2}, 0\right)(\Phi) \\
&\leq \exists C' \cdot \nu(M, M)(\Phi) \quad \left(\forall M > -\frac{d}{2} \operatorname{Re} s + \frac{n+1}{2}\right)
\end{aligned}$$

これと 36 頁の (★) をあわせて (2) を得る. //

従って Prop 16 により  $f^L T_s = 0$  for  $\forall L > M_0$  となる。次に  $f^L T_s = (-2\pi i)^{-dL} \cdot (\varepsilon_i b_0)^L \cdot T_{s-L}$  を示す。ここで  $s$  は  $0 \geq \operatorname{Re} s > -1$  の compact set を動くが、 $T_s$  は  $s$  に analytic に依存しているから  $T_s = 0$  for  $\forall s \in \mathbb{C}$  を得る。これが  $\mathbb{R}$  上の基本定理とよばれるものである。

**Lemma 23**  $C_{ij}(s)$  は entire function

∴)  $\forall \Phi \in C_0^\infty(V_j)$  に  $F_i(s - \frac{n}{d}, \hat{\Phi})$  と

$$\int_{V_j} |f(x)|^{-s} \Phi(x) dx = \int_{\operatorname{supp} \Phi \subset V_j} |f(x)|^{-s} \Phi(x) dx \quad \text{は}$$

entire function で  $\int_{V_j} |f(x)|^{-s} \Phi(x) dx \neq 0$  なる  $\Phi$  が

$$\text{あるから } C_{ij}(s) = \frac{F_i(s - \frac{n}{d}, \hat{\Phi})}{\int_{V_j} |f(x)|^{-s} \Phi(x) dx} < +\infty \quad //$$

$$\text{Lemma 24} \quad \widehat{f\Phi}(x) = (2\pi i)^{-d} \cdot f^*(D_x) \widehat{\Phi}(x)$$

$$\therefore \widehat{f\Phi}(x) = \int f(y) \Phi(y) e^{2\pi i(x,y)} dy$$

$$(f^*(D_x) e^{2\pi i(x,y)} = (2\pi i)^d f(y) e^{2\pi i(x,y)} \text{ (by } \Phi_2 \text{)})$$

$$= (2\pi i)^{-d} \cdot \int \Phi(y) \cdot f^*(D_x) e^{2\pi i(x,y)} dy$$

$$= (2\pi i)^{-d} f^*(D_x) \widehat{\Phi}(x) \quad //$$

$$\text{Lemma 25} \quad F_i(s, \widehat{f\Phi}) = \varepsilon_i b_0 (-2\pi i)^{-d} F_i(s-1, \widehat{\Phi})$$

$$\therefore \text{Lemma 24より} \quad F_i(s, \widehat{f\Phi}) = (2\pi i)^{-d} F_i(s, f^*(D_x) \widehat{\Phi})$$

$$= (2\pi i)^{-d} \int_{V_i} \frac{|f(x)|^s}{\delta(s)} \cdot f^*(D_x) \widehat{\Phi}(x) dx$$

$$\stackrel{\text{部分積分}}{=} (-2\pi i)^{-d} \cdot \int_{V_i} \left( f^*(D_x) \frac{|f(x)|^s}{\delta(s)} \right) \widehat{\Phi}(x) dx$$

$$= \varepsilon_i b_0 (-2\pi i)^{-d} \int_{V_i} \frac{|f(x)|^{s-1}}{\delta(s-1)} \cdot \widehat{\Phi}(x) dx$$

$$= \varepsilon_i b_0 (-2\pi i)^{-d} \cdot F_i(s-1, \widehat{\Phi}) \quad //$$

$$\text{Proposition 26} \quad C_{ij}(s) = \varepsilon_i \varepsilon_j b_0 (-2\pi i)^{-d} C_{ij}(s-1)$$

$\therefore$

$$\Phi \in C_0^\infty(V_j) \text{ と する}$$

$$F_i(s - \frac{n}{d}, \widehat{f\Phi}) = C_{ij}(s) \int_{V_j} |f(x)|^{-s} \cdot f(x) \Phi(x) dx$$

$$\parallel \text{Lem 25} \quad C_{ij}(s) \cdot \varepsilon_j \cdot \int_{V_j} |f(x)|^{1-s} \cdot \Phi(x) \cdot dx$$

$$\varepsilon_i b_0 (-2\pi i)^{-d} \cdot F_i(s-1, \widehat{\Phi})$$

$$\parallel \varepsilon_i b_0 (-2\pi i)^{-d} \cdot C_{ij}(s-1) \int_{V_j} |f(x)|^{1-s} \cdot \Phi(x) dx$$

$$\text{両辺の係数を比べて, } C_{ij}(s) = \varepsilon_i \varepsilon_j b_0 (-2\pi i)^{-d} \cdot C_{ij}(s-1) //$$

$$\boxed{\text{Proposition 27} \quad f^L T_s = (-2\pi i)^{-dL} \cdot (\varepsilon_i b_0)^L \cdot T_{s-L}}$$

$$\therefore (f T_s)(\Phi) = F_i(s - \frac{n}{d}, \widehat{f\Phi}) - \sum_j C_{ij}(s) \int_{V_j} |f(x)|^{-s} \cdot f(x) \Phi(x) dx$$

$$= \varepsilon_i b_0 (-2\pi i)^{-d} F_i(s-1 - \frac{n}{d}, \widehat{\Phi})$$

$$- \sum_j \left( \varepsilon_i \varepsilon_j b_0 (-2\pi i)^{-d} C_{ij}(s-1) \right) \cdot \varepsilon_j \int_{V_j} |f(x)|^{1-s} \cdot \Phi(x) dx$$

$$= (-2\pi i)^{-d} \cdot \varepsilon_i b_0 \cdot T_{s-1}(\Phi)$$

$$\Rightarrow f^L T_s = (-2\pi i)^{-dL} \cdot (\varepsilon_i b_0)^L \cdot T_{s-L} //$$

Theorem 28 ( $\mathbb{R}$ 上の基本定理)

$(G, \rho, V) = \text{reductive P.V. defined over } \mathbb{R} \text{ s.t.}$

$S = \{f=0\}$  既約超曲面, とし  $S^* = \{f^*=0\}$

をその dual P.V.  $(G, \rho^*, V^*)$  の特異集合, とする.

但し  $f: V_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$  に とる.  $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = V_1 \cup \dots \cup V_l$

(各  $V_i$  は連結成分),  $\varepsilon_i = \Delta \int_{x \in V_i} f(x)$ ,  $d = \deg f$ ,  $n = \dim V$ .

$$f^*(D_x)f(x)^{s+1} = b(s)f(x)^s, \quad b(s) = b_0 \prod_{i=1}^d (s+d_i) \quad (d = \deg f)$$

$$\gamma(s) = \prod_{i=1}^d \Gamma(s+d_i), \quad F_i(s, \varpi) = \frac{1}{\gamma(s)} \int_{V_i} |f(x)|^s \varpi(x) dx$$

と おく と  $F_i(s, \varpi)$  は 全  $\mathbb{C}$ -平面 に entire function として 解析接続 され

$$F_i(s - \frac{n}{d}, \hat{\varpi}) = \sum_{j=1}^l C_{ij}(s) \int_{V_j} |f(x)|^{-s} \hat{\varpi}(x) dx$$

が  $\forall \varpi \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$  に 対して 成立する. ここで

$C_{ij}(s)$  は  $s$  の entire function.

∴) Prop 27 と 39頁 なかほどの 議論より //

注) これは もっと一般に  $S$  が 既約 と 仮定しない 超曲面 の場合 も 成立する. 更に  $S$  が 超曲面 で ない場合 も 行者明彦氏 により  $\mathbb{R}$ 上の 基本定理 が

得られているが, 形はもっと複雑になる。

最後に  $b$ -関数の対称性を証明しておこう。

$$\text{Lemma 29} \quad \widehat{f^*(D_x)\Psi}(x) = (-2\pi i)^d f(x) \hat{\Psi}(x)$$

$$\begin{aligned} \because \widehat{f^*(D_x)\Psi}(x) &= \int_{V_{\mathbb{R}}} (f^*(D_y)\Psi(y)) e^{2\pi i(x,y)} dy \\ &= \underbrace{(-1)^d}_{\text{部分積分}} \int_{V_{\mathbb{R}}} \Psi(y) f^*(D_y) e^{2\pi i(x,y)} dy \\ &= (-1)^d \cdot (2\pi i)^d f(x) \int_{V_{\mathbb{R}}} \Psi(y) e^{2\pi i(x,y)} dy = (-2\pi i)^d f(x) \hat{\Psi}(x) // \end{aligned}$$

Proposition 30 ( $b$ -関数の対称性)

$(G, p, V) = \text{reductive P.V. s.t. } S = \{f=0\}$  既約超曲面.  $n = \dim V$ ,  $d = \deg f$   $\hookrightarrow S^* = \{f^*=0\}$  を dual P.V.  $(G, p^*, V^*)$  の singular set,

$$f^*(D_x) f(x)^{s+1} = b(s) f(x)^s$$

$$\Rightarrow b(s) = (-1)^d \cdot b(-s - \frac{n}{d} - 1)$$

$\because$

$$\Psi \in C_0^\infty(V_{\bar{j}}) \text{ に対して}$$

$$F_i(s - \frac{n}{d}, \widehat{f^*(D_x)\Phi}) = c_{ij}(s) \int_{V_j} |f(x)|^{-s} f^*(D_x)\Phi(x) dx$$

$$\begin{array}{l} \parallel \text{Lem 29} \\ (-2\pi i)^d F_i(s - \frac{n}{d}, \widehat{f\Phi}) \end{array} \quad \begin{array}{l} \parallel \text{部分積分} \\ (-1)^d c_{ij}(s) \int_{V_j} (f^*(D_x)|f|^{-s})\Phi dx \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \parallel \\ \frac{(-2\pi i)^d}{\gamma(s - \frac{n}{d})} \cdot \int_{V_i} |f(x)|^{s - \frac{n}{d}} \widehat{f\Phi}(x) dx \end{array} \quad \begin{array}{l} \parallel \\ (-1)^d c_{ij}(s) \varepsilon_j b(-s-1) \int_{V_j} |f|^{-s-1} \Phi dx \end{array}$$

$$\parallel$$

$$\frac{\gamma(s+1 - \frac{n}{d})}{\gamma(s - \frac{n}{d})} \cdot (-2\pi i)^d \cdot \varepsilon_i \cdot \frac{1}{\gamma(s+1 - \frac{n}{d})} \int_{V_i} |f(x)|^{s+1 - \frac{n}{d}} \widehat{f\Phi}(x) dx$$

$$\parallel$$

$$\varepsilon_i \frac{b(s - \frac{n}{d})}{b_0} \cdot (-2\pi i)^d \cdot F_i(s+1 - \frac{n}{d}, \widehat{f\Phi})$$

$\parallel$  基本定理

$$\varepsilon_i \frac{b(s - \frac{n}{d})}{b_0} \cdot (-2\pi i)^d \cdot \underbrace{c_{ij}(s+1)}_{\text{Prop 26}} \cdot \int_{V_j} |f(x)|^{-s-1} \Phi(x) dx$$

$$\left( \varepsilon_i \varepsilon_j b_0 (-2\pi i)^{-d} c_{ij}(s) \right)$$

$$= \underbrace{b(s - \frac{n}{d}) \varepsilon_j c_{ij}(s)}_{\text{係數比}} \int_{V_j} |f(x)|^{-s-1} \Phi(x) dx \quad \text{係數比} \sim \sim$$

$$b(s - \frac{n}{d}) = (-1)^d b(-s-1) \therefore b(s) = (-1)^d \cdot b(-s - \frac{n}{d} - 1) \quad //$$

注1.  $\{f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  は イデアル

$\{f(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn}) \in K[x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn}] \text{ s.t.}$

$f \equiv 0 \text{ on } G\}$  を生成するものと仮定する.

注2. 概均質ベクトル空間  $(G, \rho, V)$  が:

reductive であるとは. 作用する群  $G$  が reductive であること.