

孤立特異点の位相型と解析型

早大理工 山口 博己

複素多様体の構造論において、次の問題は、基本的である。

問題 台空間を固定するとき、そこに入る複素構造は、同値を除いて、どの位あるか？

例えば、 S^2 には、 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の構造しか入らないことが分っている。しかし、一般には、非常に難しい問題である。

そこで、我々は、このような問題を孤立特異点について考えることが、意味のあることであるということも、平面曲線の特異点の例を中心にして、述べようと思う。複素解析空間の台空間のごとき定義は、今のところないので、超曲面のときは、位相型を台空間に、一般の孤立特異点のときは、*equisingular* を台空間に、選ぶことにする。上の問題は、超曲面のときは、次のようになる。

問題 $\mathbb{C}^n \supset U_i \supset V_i \ni 0$ ($i=1, 2$) ; 原点を孤立特異点とする解析的超曲面で、次の条件を満たすものとする。

ⅰ) $(U_1, V_1) \approx (U_2, V_2)$; 位の位相同型

ⅱ) $(U_1, V_1) \not\approx (U_2, V_2)$; 位の解析同型が存在しない。

以上のような性質をもつ V_2 は、 V_1 を固定したとき、どの位あるか？

以下、平面代数的曲線についての例を中心に述べるので、よく使われる定理と上げておく。

定義 $\mathbb{C}^2 \supset U \supset C = \{f(x, y) = 0\}$ $f: U$ 上の解析関数、 C は、原点を孤立特異点としてもっと仮定する。

$f(x, y) = 0$ は、よく知られているように、次のように、 $\mathbb{C}Z^2$ - 展開される。

$$Y = \sum_{i=1}^{k_0} a_{0,i} x^i + \sum_{i=0}^{k_1} a_{1,i} x^{(\mu_1+i)/\nu_1} + \dots + \sum_{i=0}^{+\infty} a_{g,i} x^{(\mu_g+i)/\nu_g}$$

このとき、 $(\mu_1, \nu_1) \dots (\mu_g, \nu_g)$ を、 $\mathbb{C}Z^2$ - 特性とよぶ。

定理1 (K. Brauner) 特異点をもつ二つの解析的既約な、平面曲線を C_1, C_2 とすると、 C_1 と C_2 の特異点の位相型が同じための必要十分条件は、 $\mathbb{C}Z^2$ - 特性が一致することである。

定理2 既約解析曲線の芽の解析的分類は、 $\mathbb{C}\{t\}$ の部分多
 え環 $\mathcal{O}$ (つぎの性質をもつもの、 $\mathcal{O} \ni 1 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{O} t^n \subset \mathcal{O}$
 $\mathcal{O}; \mathbb{C}\{t\}$ の極大イデアル) の同値類の分類に帰着される。
 ここで、同値関係 $\mathcal{O}_1 \sim \mathcal{O}_2$ とは、 $\exists \theta: \mathbb{C}\{t\} \rightarrow \mathbb{C}\{t\};$
 $\mathbb{C}$ -algebra 自己同型で、 $\theta(\mathcal{O}_1) = \mathcal{O}_2$ となるものが存在す
 るということ。

定義 $\mathbb{C}^n \supset V_1 \supset V_2 \quad (i=1,2)$ 解析的超曲面で、原点を孤立
 特異点としてもつもの。 V_1 と V_2 の位相型が同じとし、解析型
 は、違うとする。このとき、 V_1 の位相型は、2つの、解析構
 造をもつという。

例1 単純点は、解析構造を一つしかもたない。

例2 $\mathbb{C}^2$ 内の Arnold の simple singularities は解析構造を
 一つしかもたない。

(i) $y^2 = x^{2k+1} \quad (k \geq 1)$

(ii) $y^3 = x^4$

(iii) $y^3 = x^5$

① (i) について

$y^2 = x^{2k+1}$ の局所環は、 $\mathbb{C}\{t^2, t^{2k+1}\}$ である。これのピス
 ー特性は、 $(2k+1, 2)$ であるから、この位相型をもつものは、

ピズュー展開で、 $y = x^{\frac{2k+1}{2}} + a_1 x^{\frac{2k+2}{2}} + a_2 x^{\frac{2k+3}{2}} + \dots$ である。

この局所環は、 $\mathbb{C}\{t^2, t^{2k+1} + a_1 t^{2k+2} + \dots\}$ である。Milnor

の公式から、 $2\delta = \mu = (2k+1-1)(2-1) = 2k$ 従って、

Conductor として、 $(t^{2k})\mathbb{C}\{t\}$ を含む。従って、

$$\mathbb{C}\{t^2, t^{2k+1}\} \cong \mathbb{C}\{t^2, t^{2k+1} + a_1 t^{2k+2} + \dots\}$$

(11) について

$y^3 = x^4$ の局所環は、 $\mathbb{C}\{t^3, t^4\}$ である。これのピズュー

特性は、 $(4, 3)$ であるから、この位相型を持つものは、ピズュー

展開で、 $y = x^{\frac{4}{3}} + a_1 x^{\frac{5}{3}} + \dots$ である。この局所環

は、 $\mathbb{C}\{t^3, t^4 + a_1 t^5 + \dots\}$ である。上と同様に $2\delta = 6$ 、

従って、conductor $(t^6)\mathbb{C}\{t\}$ を含む。よって、 $y = x^{\frac{4}{3}} + a_1 x^{\frac{5}{3}}$

についてみれば十分である。

$$\text{ここから、}\mathbb{C}\{t^3, t^4 + a_1 t^5\} \cong \mathbb{C}\{t^3, t^4\}$$

$$\textcircled{11} \quad \theta : \mathbb{C}\{t\} \longrightarrow \mathbb{C}\{z\}$$

$$\begin{array}{ccc} \psi & & \psi \\ t & \longmapsto & z + \frac{a_1}{3} z^2 + \frac{a_1^2}{3} z^3 \end{array}$$

$$\theta(t^3) = z^3 + a_1(z^4 + \frac{4}{3}a_1 z^5) \quad \theta(t^4) = z^4 + \frac{4}{3}a_1 z^5$$

(11) についても、(12) と同様にできる。

例3 $y^3 = x^7$ の解析構造は、2つしかない。これは広中氏が、[3] で述べていることである。

① $y^3 = x^7$ のビュースー特性は、 $(7, 3)$ であり、 $2\delta = 12$ 従って、Puiseux expansion $y = x^{\frac{7}{3}} + a_8 x^{\frac{8}{3}} + \dots + a_{11} x^{\frac{11}{3}}$ について、考えれば、充分である。

(1) $a_8 = 0$ のとき、即ち、 $y = x^{\frac{7}{3}} + a_9 x^{\frac{9}{3}} + a_{10} x^{\frac{10}{3}} + a_{11} x^{\frac{11}{3}}$ についてみる。この局所環は、 $\mathbb{C}\{t^3, t^7 + a_9 t^9 + \dots + a_{11} t^{11}\}$ であり、明らかに、 $\mathbb{C}\{t^3, t^7 + a_{10} t^{10} + a_{11} t^{11}\}$ に同型である。

$$\mathbb{C}\{t^3, t^7 + a_{10} t^{10} + a_{11} t^{11}\} \cong \mathbb{C}\{t^3, t^7 + t^{10} + a t^{11}\}$$

② $t = \lambda x$ とおいて、 $\lambda^7 = a_{10} \lambda^{10}$ とおくと、 $\lambda = \sqrt[3]{\frac{1}{a_{10}}}$ とおけばよい。」

$$\text{次に、}\mathbb{C}\{t^3, t^7 + t^{10} + a t^{11}\} \cong \mathbb{C}\{t^3, t^7 + t^{11}\}$$

③ $t^7 + t^{10} + a t^{11} = t^7(1 + t^3) + a t^{11}$ $1 + t^3$ は、単元だから

$$\mathbb{C}\{t^3, t^7 + t^{10} + a t^{11}\} \cong \mathbb{C}\{t^3, t^7 + \frac{a t^{11}}{1 + t^3}\}$$

$$(t^{12}) \text{ を含むから、}\mathbb{C}\{t^3, t^7 + \frac{a t^{11}}{1 + t^3}\} \cong \mathbb{C}\{t^3, t^7 + a t^{11}\} \text{ と}$$

同様に、これは、 $\mathbb{C}\{t^3, t^7 + t^{11}\}$ に同型である。

最後に、 $\mathbb{C}\{t^3, t^7\} \cong \mathbb{C}\{t^3, t^7 + t^{11}\}$ を示す。

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{4} & \theta: \mathbb{C}\{t\} & \rightarrow \mathbb{C}\{z\} \\ & \downarrow & \downarrow \\ & t & \mapsto 7z + 7z^5 \end{array}$$

$$\theta(t^3) = 7^3 z^3 + 3 \times 7^3 (z^7 + z^{11}) \quad \theta(t^7) = 7^7 (z^7 + z^{11})$$

$$\therefore z^7 + z^{11} = \theta(\frac{1}{7^7} t^7) \quad z^3 = \theta(\frac{1}{7^3} t^3 - \frac{3}{7^7} t^7) \quad \square$$

以上より、 $a_8 = 0$ のとき、解析構造は、 $y^3 = x^7$ である。

(b) $a_8 \neq 0$ のとき, $y = x^{\frac{7}{3}} + a_8 x^{\frac{8}{3}} + a_{10} x^{\frac{10}{3}} + a_{11} x^{\frac{11}{3}}$ についてみれば, 充分である。この局所環は, $\mathbb{C}\{t^3, t^7, \dots\}$

であり, $\mathbb{C}\{t^3, t^7 + a_8 t^8 + a_{10} t^{10} + a_{11} t^{11}\} \simeq \mathbb{C}\{t^3, t^7 + t^8 + at^{11}\}$

$$\textcircled{1} \quad t^7 + a_8 t^8 + a_{10} t^{10} + a_{11} t^{11} = t^7(1 + a_{10} t^3) + t^8(a_8 + a_{11} t^3)$$

$1 + a_{10} t^3$ は, 単元より, $\mathbb{C}\{t^3, t^7 + \dots + a_{11} t^{11}\} \simeq \mathbb{C}\{t^3, t^7 + t^8 \cdot \frac{a_8 + a_{11} t^3}{1 + a_{10} t^3}\}$

より, conductor (t^{12}) を含むから,

$$\mathbb{C}\{t^3, t^7 + t^8 + t^8 \cdot \frac{a_8 + a_{11} t^3}{1 + a_{10} t^3}\} \simeq \mathbb{C}\{t^3, t^7 + t^8 + at^{11}\}$$

次に, $\mathbb{C}\{t^3, t^7 + t^8\} \simeq \mathbb{C}\{t^3, t^7 + t^8 + at^{11}\}$ を示す。

$$\textcircled{1} \quad \theta: \mathbb{C}\{t\} \longrightarrow \mathbb{C}\{z\}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ t & \longmapsto & z + \frac{a}{7} z^5 + \frac{a}{7} z^6 + \frac{6a^2}{49} z^9 \end{array}$$

$$\theta(t^3) = z^3 + \frac{3}{7} a(z^7 + z^8 + az^{11})$$

$$\theta(t^7 + t^8) = z^7 + z^8 + az^{11}$$

$$\therefore \theta(t^3 - \frac{7}{3a}(t^7 + t^8)) = z^3, \quad \theta(t^7 + t^8) = z^7 + z^8 + az^{11}$$

以上より, $a_8 \neq 0$ のとき, 解析構造は $y = x^{\frac{7}{3}} + x^{\frac{8}{3}}$ に帰着された。

(ii) $y = x^{\frac{7}{3}}$ と $y = x^{\frac{7}{3}} + x^{\frac{8}{3}}$ は, 解析的同型でない。

$$\textcircled{1} \quad \pi_1: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2 \quad \pi_2: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2 \quad \text{をそれぞれ } y = x^{\frac{7}{3}},$$

$y = x^{\frac{7}{3}} + x^{\frac{8}{3}}$ の normalization とする。 $\pi_1(t) = (t^3, t^7)$

$$\pi_2(t) = (t^3, t^7 + t^8). \quad V_1, V_2 \text{ は } y = x^{\frac{7}{3}}, y = x^{\frac{7}{3}} + x^{\frac{8}{3}} \text{ で表}$$

される平面曲線の原点での芽とする。 $\Omega: V_1 \rightarrow V_2$; 解析

同型が存在すると仮定する。このとき, $\pi_2^{-1} \circ \Omega \circ \pi_1: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

これは、原点を除いて、双正則、全体で、位相同型写像であるから、リーマンの特異点除去定理によって全体で双正則である。従って、 $\pi_2^{-1} \circ \Omega \circ \pi_1(t) = a_1 t + a_2 t^2 + \dots$ ($a_1 \neq 0$) とかける。

$$\textcircled{A} (\pi_2^{-1} \circ \Omega \circ \pi_1)^*(\pi_2^*(\mathcal{O}_{V_2})) = \pi_1^*(\Omega^*(\mathcal{O}_{V_2})) \subset \pi_1^*(\mathcal{O}_{V_1}).$$

$$\pi_2^*(\mathcal{O}_{V_2}) = \mathbb{C}\{t^3, t^7, t^8\}, \pi_1^*(\mathcal{O}_{V_1}) = \mathbb{C}\{t^3, t^7\} \text{ であり、} \textcircled{B}$$

$$\textcircled{B} (a_1 t + a_2 t^2 + \dots)^3 = a_1^3 t^3 + 3a_1^2 a_2 t^4 + \dots$$

$$(a_1 t + \dots)^7 + (a_1 t + \dots)^8 = a_1^7 t^7 + (7a_1^6 a_2 + a_1^8) t^8 + \dots$$

これらは、 $\textcircled{B}$ より $\pi_1^*(\mathcal{O}_{V_1})$ に属さなければならないので、

$$3a_1^2 a_2 = 0 \quad 7a_1^6 a_2 + a_1^8 = 0 \quad \text{これは、} a_1 = 0 \text{ を満たすので矛盾する。}$$

(注意) $y = x^{\frac{7}{3}} + x^{\frac{8}{3}}$ は、多項式の形で書くと、

$$y^3 - 3x^5 y - x^7 - x^8 = 0 \text{ であり、Quasi-homogeneous ではない。}$$

$$\textcircled{C} 0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{O}_{V_2,0} \rightarrow \Omega^1(V_2)_0 \rightarrow 0 \text{ が exact でないことを}$$

を示せば充分である。 $y dx$ という微分形式を考える。

$$\pi_2^*(y dx) = d\left(3\frac{t^{10}}{t^0} + \frac{t^{11}}{t^1}\right) \text{ となる。ここから、}$$

$$\frac{t^{10}}{t^0} + \frac{t^{11}}{t^1} = \pi_2^* \varphi(x, y) \text{ となる } \varphi(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\} \text{ は存在しないから、}$$

よって、上は、exact ではない。

例 4 $y^3 = x^8$ の解析構造は、有限個しかない。

$$\textcircled{a} \mathbb{C}\{x^3, x^8 + ax^{10} + bx^{11} + cx^{13}\} \simeq \mathbb{C}\{x^3, x^8 + x^{10} + ax^{13}\}$$

$$\textcircled{b} \mathbb{C}\{x^3, x^8 + x^{10}\} \simeq \mathbb{C}\{x^3 + x^{10} + ax^{13}\}$$

$$\textcircled{5} \quad \theta: \mathbb{C}\{t\} \rightarrow \mathbb{C}\{x\}$$

$$t \mapsto x + \frac{a}{2!} x^6 + \frac{a}{2!} x^8 + \frac{2^2}{4!} a^2 x^{11}$$

$$\textcircled{6} \quad \mathbb{C}\{x^3, x^8 + ax^{11} + bx^{13}\} \simeq \mathbb{C}\{x^3, x^8 + x^{13}\}$$

以上から有限個であることは、分る。

今より、考えられた問題は一般には、難かしいので、複素多様体論には、次の問題が考えられた。

問題 複素多様体 M が与えられたとき、 M の十分近い全ての変形を求めよ。

この問題は、最初の問題にくらべてよく分るようである。そこで、次の問題が重要である。

問題 解析空間の孤立特異点を与えられたとき、全ての、 ϵ -fuisingular deformation を求めよ。

この問題を考えれば、次の特異点は、重要であろう。

Definition (X_0, x_0) : x_0 を孤立特異点とする解析空間の芽

$\pi: (X, x_0) \xrightarrow[\Sigma]{} (S, x_0)$; (X_0, x_0) の equisingular deformation

Σ : section として、 $\pi^{-1}(\lambda) = X_\lambda$ とおくと、 X_λ は、 $\Sigma(\lambda)$ を孤立

特異点としてもつ。このとき、 $X_0, \Sigma(\lambda)$ の解析構造が λ_0 の近傍に、有限個しかないとき、 λ_0 を X_0 の *stiff singularity* という。特に、 λ_0 の十分小なる近傍で、 $X_0, \Sigma(\lambda) \simeq X_{\lambda_0}, \Sigma(\lambda_0)$ (解析同型) のとき、*strictly stiff singularity* という。

④ *equisingular* については、[4] と Zariski の一連の論文を参照せよ。

我々は、超曲面のみを考えるので、次の定義を使う。

定義 (X_0, λ_0) ; λ_0 を孤立特異点としてもつ、 $\mathbb{C}^n$ 内の超曲面、 $\pi: (X, \lambda_0) \xrightarrow[\Sigma]{} (S, \lambda_0)$; (X_0, λ_0) の変形で、 $\pi^{-1}(\lambda) = X_\lambda$ は $\Sigma(\lambda)$ を孤立特異点としてもつ。 $(X_0, \Sigma(\lambda))$ と $(X_{\lambda_0}, \Sigma(\lambda_0))$ は、位相型が同じ仮定する。 $(\mathbb{C}^n$ と λ_0 に対して、位相同型があるということ。) このとき、 λ_0 の近傍で、 $X_0, \Sigma(\lambda)$ の解析構造が有限個しかないとき、 λ_0 を *stiff singularity* とよぶ。特に、 λ_0 の近傍に、唯一つ $X_{\lambda_0}, \Sigma(\lambda_0)$ の解析構造しかないとき、*strictly stiff singularity* という。

例5 simple point は、*strictly stiff singularity* である。

例 6 Arnol'd の simple singularities は, strictly stiff singularities である。

例 7 $y^3 = x^7$ は, strictly stiff ではないが, stiff である。

例 8 $y^3 - 3x^5y - x^7 - x^8 = 0$ は, strictly stiff sing. である。

例 9 rigid singularities は, strictly stiff singularities である。

以上から分るように, stiff singularities は, rigid, simple singularities の拡張になっている。

複素多様体では, 基本群が複雑ならば, 複素構造は, あまり多くは, 入らないという推測がありますが, 我々の立場では, どうなるか? Mumford の J. H. E. S. 1960 の論文の結果から推測すると, 以下のようなになる。

問題 特異点の局所基本群が、簡単ならば、解析構造は、あまり多くは入らないか？

いくつか思いついた問題を書いてみよう。

問題 Stiff singularity の moduli 数は、0 としく、一つのパラメーターが動くとき、解析構造が、変化する。パラメーターと一つの moduli と考えるとき、複素多様体論におけるような、 $\dim H^1(X, \mathbb{C})$ に対応するものは何か？

問題 Versal equisingular deformation の存在定理を証明せよ。

参考文献

- [1] Arnold V.I. ; Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups of A_k, D_k, E_k and Lagrangean singularities, Func. Anal. and its App. Vol. 6
- [2] Gunning, R.C. Lecture on complex analytic varieties
Mathematical Lecture Note. Princeton No. 4.

[3] Hironaka. H. ; On the equivalence of singularities I,
Arithmetrical Algebraic Geometry

[4] Hironaka. H. ; Equivalence and deformations of isolated singularities
Wood Hool Seminar in Algebraic Geometry

[5] 飯高茂 複素多様体論の一断面
数理科学 特集 “形態”

[6] Pham. F ; Singularites des courbes planes