

Kac-Moody Lie 環と Modular forms

— Kac-Peterson の仕事の紹介 —

筑波大 森田 純 (Jun Morita)

青学大 小池和彦 (Kazuhiko Koike)

名大 田中洋平 (Yôhei Tanaka)

ここでは Kac-Peterson ([6]) の仕事を, 次の 3 つの式の Lie 環論的な説明を中心に, 紹介する。

$$\eta(12\tau)^2 = \sum_{\substack{k, l \in \mathbb{Z} \\ k \geq 2|l|}} (-1)^{k+l} q^{\frac{3(2k+1)^2 - (6l+1)^2}{2}} \quad \text{--- (I)}$$

$$\eta(8\tau) \eta(16\tau) = \sum_{\substack{k, l \in \mathbb{Z} \\ k \geq 3|l|}} (-1)^k q^{(2k+1)^2 - 32l^2} \quad \text{--- (II)}$$

$$\eta(4\tau) \eta(20\tau) = \sum_{\substack{k, l \in \mathbb{Z} \\ 2k \geq l \geq 0}} (-1)^k q^{\frac{5(2k+1)^2 - (2l+1)^2}{4}} \quad \text{--- (III)}$$

ここで $\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$ ($q = e^{2\pi i \tau}$) は Dedekind の η -関数, これらの式の整数論的な意味については, 味村-石井-平松氏の記事を参照されたい。

Affine Lie 環の表現論では、standard module $L(\lambda)$ の weight multiplicity の null-root 方向への母関数 $b_{\lambda}(q)$ を求める事が問題になる。Kac と Peterson は、この母関数に q の適当な分数巾をかいた $C_{\lambda}(q) = q^{\delta_{\lambda}(\lambda)} b_{\lambda}(q)$ を string function と呼んで、指標公式から、あるテータ関数の交代和を基本的な交代和で割ったものをテータ関数で展開した時の係数としてこの string function を捉えられる事に着目した。そしてテータ関数の変換公式から string function の変換公式を導き、これを利用して多くの例を計算している。一方 $A_1^{(p)}$ 型の Lie 環に対して、その Kostant の分割関数を具体的に計算し、その結果から $A_1^{(p)}$ の string function が Hecke の indefinite modular form で表わせる事を示した。

式(I),(II),(III)は $A_1^{(p)}$ のある string function の indefinite modular form による表示式として得られる。

§1 で Affine Lie 環 $A_1^{(p)}$ について基本的な事をまとめ、 $A_1^{(p)}$ の Kostant の分割関数を計算する。(Th.1) §2 では string function の理論を $A_1^{(p)}$ について述べ (Th.2), (I)(II)(III)に現われる string function を計算する。(2-I), (2-II), (2-III) §3 では $A_1^{(p)}$ の string function $C_{\lambda}(\tau)$ について、 $\eta(\tau)^3 C_{\lambda}(\tau)$ が indefinite modular form になる事を示し (Th.3), §2 の例とあわせて (I)(II)(III)式を導く。

§1. Affine Lie 環 $A_1^{(1)}$ 1-1. $A_1^{(1)}$ の構成, root 系

$\mathcal{M}(2, \mathbb{C}) = \{ X \in M_2(\mathbb{C}) \mid \text{tr } X = 0 \}$ とする。次の無限次元 Lie 環 $\mathfrak{g}$ を $A_1^{(1)}$ 型の affine Lie 環と呼ぶ。

$$\mathfrak{g} = \mathbb{C} \cdot d \oplus \mathbb{C} \cdot c \oplus \mathcal{M}(2, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[z, z^{-1}]$$

交換関係

$$\begin{cases} [c, \mathfrak{g}] = 0, & [d, X \otimes z^m] = m X \otimes z^m \quad \left(\begin{array}{l} X \in \mathcal{M}(2, \mathbb{C}) \\ m \in \mathbb{Z} \end{array} \right) \\ [X \otimes z^m, Y \otimes z^n] = m \delta_{m, -n} \text{tr}(XY) c + [X, Y] \otimes z^{m+n} \\ (X, Y \in \mathcal{M}(2, \mathbb{C}), \quad m, n \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$X \mapsto X \otimes 1$ により $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ は $\mathfrak{g}$ に含まれる。 $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ の基底 $h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とし、
 $h_0 = c - h_1$, $e_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}$, $f_0 = \begin{pmatrix} 0 & z^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。

(ここで $\mathcal{M}(2, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}] \subset \mathcal{M}(2, \mathbb{C}[z, z^{-1}]) = \{ A \in M_2(\mathbb{C}[z, z^{-1}]) \mid \text{tr } A = 0 \}$ と自然に同一視した。)

$\mathfrak{f} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} \cdot d + \mathbb{C} \cdot c + \mathbb{C} h_1$: Cartan 部分環
 とおき $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathfrak{f}^*$ を

$$\alpha_0(c) = 0, \alpha_0(d) = 1, \alpha_0(h_1) = -2$$

$$\alpha_1(c) = 0, \alpha_1(d) = 0, \alpha_1(h_1) = 2$$

で定める。 $\Pi = \{\alpha_0, \alpha_1\} \subset \mathfrak{f}^*$, $\Pi^\vee = \{h_0, h_1\} \subset \mathfrak{f}$ とおけば $\Pi, \Pi^\vee$ の元はそれぞれ一次独立である。

$$C_{ij} = \alpha_j(h_i) \quad (i, j=0, 1) \quad \text{とし}$$

$C = (C_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ を $A_1^{(1)}$ 型の Cartan 行列と呼ぶ。

$\mathfrak{g}$ は f と $\{e_i, f_i\}_{i=0,1}$ で生成され、次の関係式を基本関係式として持っている。

$$\left\{ \begin{array}{l} [f, f] = 0 \\ [h, e_i] = \alpha_i(h) e_i \\ [h, f_i] = -\alpha_i(h) f_i \\ [e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i \\ (\text{ad } e_i)^{-C_{ij}+1}(e_j) = 0 \\ (\text{ad } f_i)^{-C_{ij}+1}(f_j) = 0 \end{array} \right. \quad (h \in f, \quad i=0, 1) \quad (i, j=0, 1) \quad (i \neq j)$$

Cartan 行列 C が対称なので $\mathfrak{g}$ の自己同型 φ で

$$\varphi(f) = f, \quad \varphi(h_i) = h_{1-i}, \quad \varphi(e_i) = e_{1-i}, \quad \varphi(f_i) = f_{1-i}$$

となるものが存在する。 $\sigma \stackrel{\text{def}}{=} {}^t(\varphi|_f) \in GL(f^*)$ とおく。

$\mathfrak{n}_+ : e_0 \text{ と } e_1 \text{ で生成される subalgebra}$

$\mathfrak{n}_- : f_0 \text{ と } f_1$ "

とすれば

$\mathfrak{g} = f \oplus \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{n}_-$ と直和分解される。実際

$$\mathfrak{n}_+ = \left\{ \begin{pmatrix} z P(z) & q(z) \\ z R(z) & -z P(z) \end{pmatrix} \mid P(z), q(z), r(z) \in \mathbb{C}[z] \right\}$$

$$\mathfrak{n}_- = \left\{ \begin{pmatrix} z^{-1} P(z^{-1}) & z^{-1} q(z^{-1}) \\ r(z^{-1}) & -z^{-1} P(z^{-1}) \end{pmatrix} \mid P, q, r \in \mathbb{C}[z] \right\}$$

$$Q_{\overline{\text{def}}} \mathbb{Z}\alpha_0 + \mathbb{Z}\alpha_1 \supset Q + \overline{\text{def}} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_0 + \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_1 \quad \text{とおく.}$$

$\alpha \in f^*$ に対して

$$\mathfrak{g}_{\alpha, \overline{\text{def}}} = \{X \in \mathfrak{g} \mid [h, X] = \alpha(h)X \quad \forall h \in f\}$$

と定める。 $\mathfrak{g}_0 = f$ である。

$$\Delta_{\overline{\text{def}}} = \{0 \neq \alpha \in f^* \mid \mathfrak{g}_{\alpha} \neq 0\}$$

を root 系, $\Delta \ni \alpha$ を root, $\mathfrak{g}_{\alpha}$ を root 空間と呼ぶ。

$$\delta = \alpha_0 + \alpha_1 \quad \text{とおく}$$

$$\Delta = \{m\delta \mid 0 \neq m \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha_0 + m\delta \mid m \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha_1 + m\delta \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

であり, 対応する root 空間は それぞれ

$$\mathbb{C} \begin{pmatrix} \mathbb{Z}^m & 0 \\ 0 & -\mathbb{Z}^m \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{Z}^{m+1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z}^m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

になる。

$\Delta + \overline{\text{def}} \quad \Delta \cap Q_+ = \{m\delta \mid m > 0\} \cup \{\alpha_0 + m\delta \mid m \geq 0\} \cup \{\alpha_1 + m\delta \mid m \geq 0\}$
の各元を positive root と呼ぶ。 $\Delta_- = -\Delta_+$ とおけば

$$\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$$

$$\mathcal{N}_{\pm} = \sum_{\alpha \in \Delta_{\pm}} \mathfrak{g}_{\alpha} \quad (\text{複号同順})$$

となる。

$i=0,1$ に対して $r_i \in GL(f^*)$ を

$$r_i(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha - \alpha(h_i)\alpha_i \quad (\alpha \in f^*)$$

と定める。

$$W_{\overline{\text{def}}} = \langle r_0, r_1 \rangle$$

を $\mathfrak{g}$ の Weyl 群と呼ぶ。

Δ は W -不変であり

$$\Delta_R \stackrel{\text{def}}{=} W(\Pi), \Delta_I \stackrel{\text{def}}{=} \Delta - \Delta_R$$

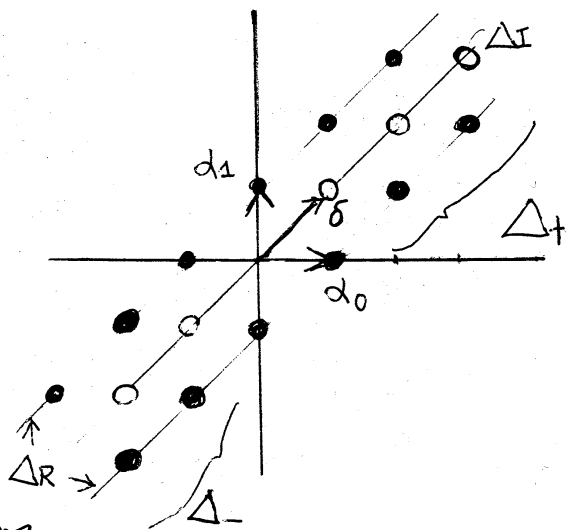
とおけば

$$\Delta_I \cup \{0\} = \mathbb{Z}\delta = \{\alpha \in \mathbb{Q} \mid \alpha(h_0) = \alpha(h_1) = 0\}$$

となる。 Δ_I の元を null-root

δ を fundamental null-root

と呼ぶ。 Δ_I の各元は W で固定される。



1-2. standard module, 指標公式

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \in \mathfrak{f}^* \mid \lambda(h_i) \in \mathbb{Z} \ (i=0,1)\} : \text{integral weights}$$

$$P_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \in P \mid \lambda(h_i) \geq 0 \ (i=0,1)\} : \text{dominant weights}$$

とおく。

$\lambda \in P_+$ に対して次の性質をもつ $\mathfrak{g}$ -module $L(\lambda)$ が同型を除いて一意に定まる。 $(L(\lambda)$ は λ を highest weight に持つ standard module と呼ばれる。)

$$\begin{cases} 0 \neq v_\lambda \in L(\lambda) \text{ があって } h \cdot v_\lambda = \lambda(h) v_\lambda, n_+ v_\lambda = 0 \\ L(\lambda) \text{ は既約な } \mathfrak{g}\text{-module} \end{cases}$$

$$\text{この時 } L(\lambda) = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{f}^*} L(\lambda)_\lambda$$

$$L(\lambda)_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in L(\lambda) \mid h \cdot v = \lambda(h) v \ (\forall h \in \mathfrak{f})\}$$

と weight 空間に分解されて

$$P(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \in \mathfrak{f}^* \mid L(\lambda)_\lambda \neq 0\}$$

は $\Lambda - Q_+ = \{ \Lambda - \mu \mid \mu \in Q_+ \}$ に含まれる。そして、
weight の重複度 $m_\Lambda(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \dim L(\Lambda)_\lambda$ は有限になる。
特に $m_\Lambda(\Lambda) = 1$ である。そこで形式和

$$\text{ch } L(\Lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda \in P(\Lambda)} m_\Lambda(\lambda) e^\lambda$$

を $L(\Lambda)$ の指標と呼ぶ。ここで e^λ は群環 $\mathbb{Z}[P]$ の元とし、
 $\text{ch } L(\Lambda)$ を形式的巾級数環 $\mathbb{Z}[P][[e^{-\alpha_0}, e^{-\alpha_1}]]$ の元と
みなす。 $P \in P_+$ を $P(h_0) = P(h_1) = 1$, $P(d) = 0$ で定める。

$\text{ch } L(\Lambda)$ に対して次の公式が成り立つ。 ([4], [7])

Weyl-Kac の指標公式

$$\text{ch } L(\Lambda) = \frac{\sum_{w \in W} \det w e^{w(\Lambda + \rho)}}{\sum_{w \in W} \det w e^{w(\rho)}}$$

指標公式の分母をはらって係数を比較して次の式を得る。

Star-formula

$$m_\Lambda(\lambda) = \varepsilon - \sum_{w \neq 1} \det w m_\Lambda(\lambda + \rho - w(\rho)) \quad (1.1)$$

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & \lambda + \rho \notin W(\Lambda + \rho) \text{ のとき} \\ \det w_0 & \exists w_0 \in W \text{ のとき } \lambda + \rho = w_0(\Lambda + \rho) \end{cases}$$

$w \neq 1$ の時 $0 \neq \rho - w(\rho) \in Q_+$ であり、star-formula は $m_\Lambda(\lambda)$
の帰納的な計算方法を与えている。

指標公式の分母は、次の積表示をもつ。 ([4], [7])

分母公式

$$\sum_{w \in W} \det w e^{w(P)} = e^P \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e^{-\alpha})^{\dim \mathfrak{g}_\alpha}$$

そこで

$$\frac{1}{\prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e^{-\alpha})^{\dim \mathfrak{g}_\alpha}} = \sum_{\beta \in Q_+} K(\beta) e^{-\beta} \quad \dots (1.2)$$

と展開すると $m_\Delta(\lambda)$ は $K(\beta)$ を用いて次の様に表わせる。

Kostant の公式

$$m_\Delta(\lambda) = \sum_{w \in W} \det w K(w(\lambda + \rho) - (\lambda + \rho)) \quad \dots (1.3)$$

但し $\beta \in Q \setminus Q_+$ に対して $K(\beta) = 0$ とする。この Q 上の非負整数値関数を Kostant の分割関数と呼ぶ。

1-3. $A_1^{(1)}$ の Kostant 分割関数

$$\varphi(q) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$$

とおき

$$\frac{1}{\varphi(q)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(3)}(n) q^n$$

$n < 0$ に対して $p^{(3)}(n) = 0$ とおいて $\mathbb{Z}$ 上の関数 $p^{(3)}(n)$ を定義する。

Th.1 $K(\beta)$ を $A_1^{(1)}$ の分割関数とする。

$$K(m\alpha_0 + n\alpha_1) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k p^{(3)}\left((k+1)m - kn - \frac{k(k+1)}{2}\right) \quad \dots (1.4)$$

$$= - \sum_{k < 0} (-1)^k p^{(3)}\left((k+1)m - kn - \frac{k(k+1)}{2}\right) \quad \dots (1.5)$$

(証明) 1-1 より $\Delta_+ = \{k\delta \mid k > 0\} \cup \{k\delta + d_0 \mid k \geq 0\} \cup \{k\delta + d_1 \mid k > 0\}$

$\dim^V \mathfrak{g}_\alpha = 1$ なので (1.2) の左辺は

$$D = \frac{1}{\prod_{k=0}^{\infty} (1 - e^{-d_1} e^{-k\delta}) (1 - e^{-d_0} e^{-k\delta}) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-k\delta})} \quad (\star)$$

となる。 Q 上の affine 変換 R を

$$R(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_1(\beta) + d_1$$

と定める。 $R \cdot e^\lambda = e^{R(\lambda)}$ により R を D に施す。

$$D' = D'(e^{-d_0}, e^{-d_1}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\prod_{\alpha \in \Delta_+ \setminus \{d_1\}} (1 - e^{-\alpha})}$$

とおけば

$$D = \frac{1}{1 - e^{-d_1}} D'$$

$\gamma_1(\Delta_+ \setminus \{d_1\}) = \Delta_+ \setminus \{d_1\}$ となるので

$$R \cdot D = \frac{e^{d_1}}{1 - e^{-d_1}} D'$$

$D' = \sum_{\beta \in Q} K'(\beta) e^{-\beta}$ と展開する。

$$D + R \cdot D = \left(\frac{1}{1 - e^{-d_1}} + \frac{e^{d_1}}{1 - e^{-d_1}} \right) D'$$

$$= \sum_{m \geq 0} a(m) e^{-m d_0} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{n d_1} \right) \quad (\star)$$

$$\text{そこで } a(m) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} K'(m d_0 + k d_1)$$

即ち $a(m)$ は $D'(e^{-d_0}, e^{-d_1})$ を $e^{-d_0} \mapsto q, e^{-d_1} \mapsto 1$ と

specialize した時の q^m の係数である。 $D'(q, 1) = \frac{1}{\varphi(q)}$ だから

$$a(m) = p^{(3)}(m).$$

$$\begin{aligned} -\text{方 } D+R_1 D &= \sum_{\beta \in Q} (K(\beta) e^{-\beta} + K(\beta) e^{-R_1 \beta}) \\ &= \sum_{\beta \in Q} (K(\beta) + K(R^*(\beta)) e^{-\beta} \quad - (**)) \end{aligned}$$

$$\text{ここで } R^*(\beta) = -R_1(-\beta) = \gamma_1(\beta) - \alpha_1$$

$\beta = m\alpha_0 + n\alpha_1$ のとき $K(\beta) = K(m, n)$ と書けば、(*) と (**) の $e^{-\beta}$ の係数を比較して

$$K(m, n) + K(m, 2m-n-1) = p^{(3)}(m) \quad - (7)$$

(*) より $K(m, n) = K(n, m)$ だから

$$K(m, n) + K(2m-m-1, n) = p^{(3)}(n) \quad - (8)$$

(7), (8) を交互に適用して定理の式を得る。(証明終り)

§2 $A_1^{(p)}$ の string function

$\Lambda \in P_+$ に対し $m = \Lambda(c)$ を Λ の (或いは $L(\Lambda)$ の) level と呼ぶ。この時 $\forall \lambda \in P(\Lambda)$ に対し $\lambda(c) = m$ である。また $\dim L(\Lambda) = 1$ となるのは level が 0 の時に限る。以後 level が正の時を考える。ここで $P(\Lambda)$ の性質をいくつかあげておく。([4], [6], [7])

Prop. 1 (i) $\Lambda, \Lambda' \in P_+$, $\Lambda(h_i) = \Lambda'(h_i)$ ($i=0, 1$) ならば $\exists a \in \mathbb{C}$ があって $\Lambda' = \Lambda + a\delta$ となり

$$P(\Lambda) \rightarrow P(\Lambda') : \lambda \mapsto \lambda' = \lambda + a\delta$$

は bijective な対応を与え、 $m_\Lambda(\lambda) = m_{\Lambda'}(\lambda')$ ($\forall \lambda \in P(\Lambda)$)

$$\text{即ち } ch L(\Lambda') = e^{a\delta} ch L(\Lambda)$$

(2) $P(\Lambda)$ は W で不変である。もっと詳しく $\forall w \in W, \forall \lambda \in P(\Lambda)$

$$\text{に対して } m_{\Lambda}(\lambda) = m_{\Lambda}(w\lambda)$$

(3) $\lambda \in P(\Lambda) \iff 1 - w(\lambda) \in Q_+ \quad (\forall w \in W)$

(4) $\lambda \in P(\Lambda)$ に対し $\exists M \in \mathbb{Z}$ があって

$$\{n \mid \lambda + n\delta \in P(\Lambda)\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq M\}$$

$\max(\Lambda) \stackrel{\text{def.}}{=} \{\lambda \in P(\Lambda) \mid \lambda + \delta \notin P(\Lambda)\}$: maximal weights

とおき、 $\lambda \in \max(\Lambda)$ に対して δ 方向の母関数

$$b_{\lambda}^{\Lambda} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{n \geq 0} m_{\Lambda}(\lambda - n\delta) e^{-n\delta}$$

を考えれば Prop. 1 (4) より

$$\text{ch } L(\Lambda) = \sum_{\lambda \in \max(\Lambda)} e^{\lambda} b_{\lambda}^{\Lambda}$$

となる。

また Prop. 1 (2), (4) より $\max(\Lambda)$ は W 不変で $\lambda \in \max(\Lambda), w \in W$ に対して $b_{w\lambda}^{\Lambda} = b_{\lambda}^{\Lambda}$ となる。

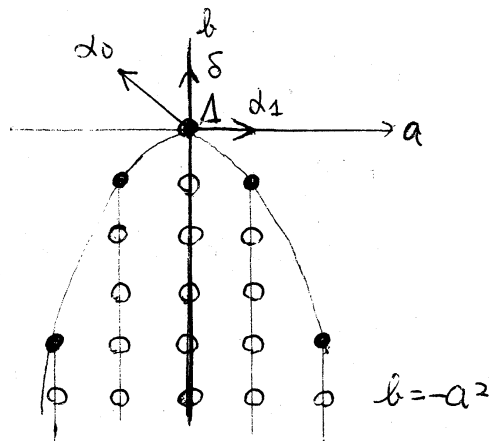
例 Λ を $(\Lambda(h_0), \Lambda(h_1))$ で表示し b_{λ}^{Λ} を $b_{\lambda(h_0), \lambda(h_1)}^{\Lambda(h_0), \Lambda(h_1)}$ と書くことにする。Prop. 1 (1) より $b_{n_0, n_1}^{N_0, N_1}$ は well-defined である。§1-1 の $\varphi \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ を考えれば $b_{\lambda}^{\Lambda} = b_{\sigma(\lambda)}^{\sigma(\Lambda)}$ 即ち

$$b_{n_0, n_1}^{N_0, N_1} = b_{n_1, n_0}^{N_1, N_0} \text{ となる。 } q = e^{-\delta} \text{ とおく。}$$

$$m=1 \quad \Lambda = (1, 0)$$

maximal weights は全て Λ に W -共役。 (1.1) を用いて初めの

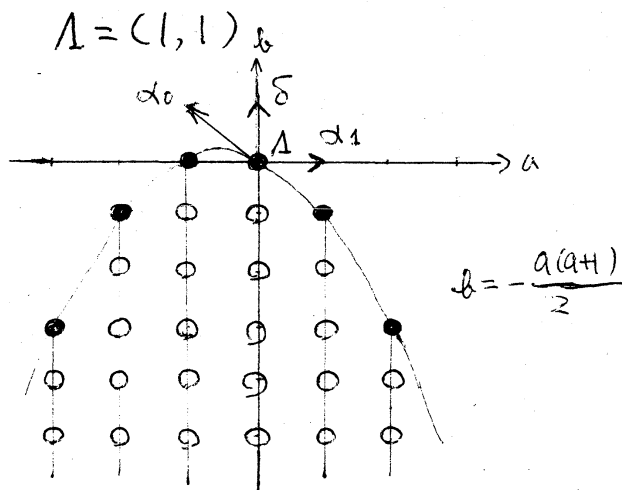
の数項を計算すると $b_{1,0}^{1,0} = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + \dots$



● : maximal weights

$b = -a^2$ の上の格子点

$m=2$

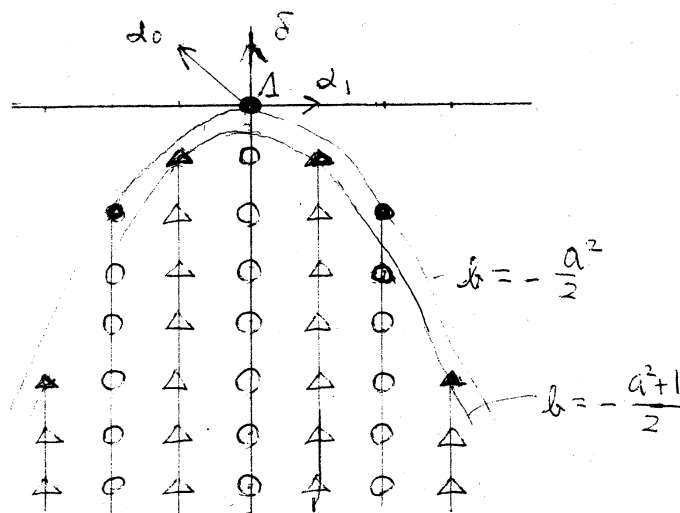


● : maximal weights

全て Λ に共役

$$b_{1,1}'' = 1 + 2q + 4q^2 + 8q^3 + \dots$$

$\Lambda = (2, 0)$



●, ▲ : maximal weights

● は Λ に共役

$$b_{2,0}^{2,0} = 1 + q + 3q^2 + 5q^3 + \dots$$

▲ は $\Lambda - \alpha_0$ に共役

$$b_{0,2}^{2,0} = 1 + 2q + 4q^2 + 7q^3 + \dots$$

$t \stackrel{\text{def}}{=} r_0 r_1$ とすれば $\langle t \rangle$ は無限巡回群で W の正規部分群

$$W = \langle t \rangle \rtimes \langle r_1 \rangle : r_1^2 = 1, r_1 t r_1 = t^{-1}$$

となる。 $\det(t) = 1, \det(r_1) = -1$ であるから、指標公式を

書き直すと

$$\sum_{\lambda \in \max(\Lambda)/\langle t \rangle} b_\lambda \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{t^k(\lambda)} \right) = \frac{\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{t^k(\Lambda + \rho)} - \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{t^k r_1(\Lambda + \rho)}}{\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{t^k(\rho)} - \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{t^k r_1(\rho)}} \quad (2.1)$$

$\Lambda_0 \in f^*$ を $\Lambda_0(d) = \Lambda_0(h_1) = 0, \Lambda_0(c) = 1$ で定めると、 $\{\Lambda_0, \delta, \alpha_1\}$ が f^* の基底になる。 $r_1, t^k (k \in \mathbb{Z})$ の作用をこの基底を用いて書くと

$$r_1 : \Lambda_0 \mapsto \Lambda_0, \delta \mapsto \delta, \alpha_1 \mapsto -\alpha_1$$

$\lambda \in f^*$ に対し $\lambda(c) = m, \lambda(h_1) = n$ とすれば

$$t^k(\lambda) = \lambda - (mk^2 + nk)\delta + mk\alpha_1 \quad (2.2)$$

f^* 上の metric $\langle, \rangle$ を $\langle \Lambda_0, \Lambda_0 \rangle = \langle \delta, \delta \rangle = 0, \langle \Lambda_0, \delta \rangle = 1$
 $\langle \Lambda_0, \alpha_1 \rangle = \langle \delta, \alpha_1 \rangle = 0, \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle = 2$ と定める。 $\langle, \rangle$ は W で不変な metric になる。 この $\langle, \rangle$ によって f と f^* を同一視すれば $d \leftrightarrow \Lambda_0, c \leftrightarrow \delta, h_1 \leftrightarrow \alpha_1$ となっている。 (2.2) は

$$t^k(\lambda) = \frac{|\lambda|^2}{2m} \delta + m\Lambda_0 - m\left(k + \frac{n}{2m}\right)^2 \delta + m\left(k + \frac{n}{2m}\right) \alpha_1$$

となる。 従って

Lemma 1. f の座標系を

$$\mathbb{C}^3 \simeq f : (t, \tau, z) \leftrightarrow -2\pi i(tc + zd + z h_1)$$

と定め, e^λ を f 上の関数 $h \mapsto e^{\lambda(h)}$ とみなす.

$\lambda \in P$, $\lambda(c) > 0$ の時 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{t^k \lambda}$ は $Y = \{(t, z, z) \mid \text{Im } z > 0\}$ 上の正則関数を定める. $m = \lambda(c)$, $n = \lambda(h_1)$ とし

$$\vartheta_{n,m}(t, z, u)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} e^{-2\pi i m t} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i m (k + \frac{n}{2m})^2 z - 4\pi i m (k + \frac{n}{2m}) z}$$

(degree m の τ -関数)

とおけば

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{t^k \lambda} = e^{-2\pi i \frac{|\lambda|^2}{2m} z} \vartheta_{n,m}(t, z, z)$$

更に次が成り立つ [6]

Prop. 2. $\lambda \in P_+$ $ch L(\lambda)$ は Y 上の正則関数を定める.

Lemma 1 を用いて (2.1) の両辺を書き直すと, $\lambda \in P_+$ が

level $m = \lambda(c) z$, $N_1 = \lambda(h_1)$ のとき

$$\sum_{\lambda \in m_{\max}(\lambda) / \langle t \rangle} C_\lambda^A(z) \vartheta_{\lambda(h_1), m}(t, z, z)$$

$$= \frac{\vartheta_{N_1+1, m+2}(t, z, z) - \vartheta_{N_1+1, m+2}(t, z, -z)}{\vartheta_{1,2}(t, z, z) - \vartheta_{1,2}(t, z, -z)} \quad \dots (2.3)$$

ここに

$$C_\lambda^A(z) \stackrel{\text{def}}{=} q^{\delta_A(\lambda)} b_\lambda^A(q) \quad (q = e^{2\pi i z})$$

$$\delta_A(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\lambda + \rho|^2}{2(m+2)} - \frac{|\lambda|}{2m} - \frac{1}{8}$$

$C_\lambda^A(z)$ を string function と呼ぶ。

$\lambda(\mathcal{C})=m$ なる $\lambda \in P$ に対して, $\lambda \in \text{Max}(\Lambda)$ の時にも C_λ^Λ を $C_\lambda^\Lambda = 0$ とし定義する. $\Lambda' = \Lambda + a\delta$ ($a \in \mathbb{C}$) の時.

Prop. 1 (1) から $\lambda \in \text{Max}(\Lambda) \Leftrightarrow \lambda' = \lambda + a\delta \in \text{Max}(\Lambda')$.

そして $\rho_{\Lambda'}(\lambda') = \rho_\Lambda(\lambda)$ であるから C_λ^Λ を $C_{\lambda(h_0), \lambda(h_1)}^{\Lambda(h_0), \Lambda(h_1)}$

と書いて $C_{n_0, n_1}^{N_0, N_1}$ は well-defined である. $\psi_{n, m}(t, z, z)$

$= \psi_{-n, m}(t, z, z)$ であり, (2.2) より $\text{Max}(\Lambda)/\langle T \rangle \ni \lambda \bmod \langle T \rangle$

は $\lambda(h_1) \bmod 2m$ で定まる. 従って (2.3) は

$$\sum_{n \bmod 2m} C_{m-n, n}^{m-N_1, N_1} \psi_{n, m} = \frac{\psi_{N_1+1, m+2} - \psi_{-(N_1+1), m+2}}{\psi_{1, 2} - \psi_{-1, 2}} \quad \text{--- (2.4)}$$

となる.

$\mathbb{C}$ を上半平面 $\{z \mid \text{Im} z > 0\}$ 上の正則関数全体のなす環とする.

$0 < m \in \mathbb{Z}$ に対して

$\widehat{\mathcal{Th}}_m \stackrel{\text{def}}{=} \{ f(t, z, z) \mid f \text{ は } \mathbb{Y} \text{ 上 正則な関数で}$

$$f(t, z, z+1) = f(t, z, z)$$

$$f(t, z, z+z) = e^{-2\pi i m(2z+z)} f(t, z, z)$$

$$f(t+t', z, z) = e^{-2\pi i m t'} f(t, z, z) \}$$

とおく. $\widehat{\mathcal{Th}}_m$ は $\mathbb{R}$ -加群になり, $\widehat{\mathcal{Th}}_m \cdot \widehat{\mathcal{Th}}_n \subset \widehat{\mathcal{Th}}_{m+n}$

となる. $\{\psi_{n, m} \mid n \bmod 2m\}$ が $\widehat{\mathcal{Th}}_m$ の $\mathbb{R}$ -free base になる.

string function は テータ関数の交代和の比を テータ関数で展開した時の係数として得られる.

$\psi_{n,m}$ は次の変換公式をもつ.

テータ関数の変換公式

$$\psi_{n,m}(t + \frac{z^2}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{z}{2}) = \frac{\sqrt{-27}}{\sqrt{2m}} \sum_{n'=0}^{2m-1} e^{-\frac{\pi i}{m} n n'} \psi_{n',m}(t, z, z)$$

(2.4) の右辺の分母を $D(t, z, z)$ とおけばこの変換公式より

$$D(t + \frac{z^2}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{z}{2}) = -i\sqrt{-27} D(t, z, z)$$

となる事に注意して, (2.4) の両辺にこの変換公式を適用して

$\psi_{j,m} (j \bmod 2m)$ の係数を比較すると, 次の string function に関する変換公式が得られる。

Th.2 ($A_1^{(1)}$ の string function の変換公式)

$$m = N_0 + N_1 = n_0 + n_1 \quad (N_i \geq 0) \text{ とする.}$$

$$C_{n_0, n_1}^{N_0, N_1}(-\frac{1}{2}) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{-27}} \frac{1}{\sqrt{m(m+2)}} \sum_{\substack{0 \leq N \leq m \\ N \bmod 2m}} e^{\frac{\pi i n_1 n}{m}} \sin \frac{(N_1+1)(N+1)}{m+2} \pi C_{m-n, n}^{m-N, N}(z)$$

この変換公式から $\eta(z)^3 C_{\lambda}^A(z)$ は適当な合同部分群に関する weight 1 の cusp form になる事が示される。[6]

Th.2 を用いて, いくつかの string function を計算しよう。

$$\circ \text{ は } \langle, \rangle \text{ を不変にし, } \circ C_{n_0, n_1}^{N_0, N_1} = \circ C_{n_1, n_0}^{N_1, N_0} \text{ より } C_{n_0, n_1}^{N_0, N_1} = C_{n_1, n_0}^{N_1, N_0}$$

$$C_{w(\lambda)}^A = C_{\lambda}^A \text{ だから } C_{n_0, n_1}^{N_0, N_1} = C_{-n_0, 2n_0+n_1}^{N_0, N_1} \quad \lambda \in \max(1) \text{ のとき}$$

$\Lambda - \lambda \in \mathbb{Q}$ なので $N_1 \neq n_1(z)$ なら $C_{n_0, n_1}^{N_0, N_1} = 0$ に注意する。

$\Lambda \in P_+$, $\lambda \in \max(\Lambda)$ で $m = \Lambda(C)$, $N_1 = \lambda(h_1)$, $n_1 = \lambda(h_1)$

$\Lambda - \lambda = k\alpha_0 + l\alpha_1$ とすれば

$$S_\Lambda(\lambda) = \frac{(N_1+1)^2}{4(m+2)} - \frac{n_1^2}{4m} - \frac{1}{8} + k \quad \dots (2.5)$$

となる。

$$m=1$$

$$C_{1,0}^{1,0}(z) \quad S_\Lambda(\lambda) = -\frac{1}{24}$$

$$= q^{-\frac{1}{24}} (1 + q + 2q^2 + \dots)$$

$$\text{Th. 2 より } C_{1,0}^{1,0}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{-i2}} \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{\substack{N=0,1 \\ n=0,1}} \sin \frac{N+1}{3} \pi C_{1-n, n}^{1-N, N}(z)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-i2}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} (C_{1,0}^{1,0} + C_{0,1}^{0,1})(z)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-i2}} C_{1,0}^{1,0}(z)$$

$$\text{一方 } \eta(z) = q^{\frac{1}{24}} (1 - q + \dots)$$

$$\eta\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{-i2} \eta(z)$$

そこで $A(z) = C_{1,0}^{1,0}(z) \eta(z)$ とおけば

$$A(z+1) = A(z), \quad A\left(-\frac{1}{2}\right) = A(z)$$

従って $A(z)$ は $\text{cusp } i\infty$ で高々特異点をもつ $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する modular function. ところが $i\infty$ のまわりで A は正則

で $A(i\infty) = 1$. よって $A \equiv 1$. 即ち $C_{1,0}^{1,0}(z) = \frac{1}{\eta(z)} - (2-I)$

特に $C_{1,0}^{1,0}(q) = \frac{1}{q(q)}$ だから q^n の係数は n の分割数になる。

$$m=2$$

	$S_A(\lambda)$	q -展開
$C_{20}^{20}(\tau)$	$-\frac{1}{16}$	$q^{-\frac{1}{16}}(1+q+3q^2+\dots)$
$C_{02}^{20}(\tau)$	$\frac{7}{16}$	$q^{\frac{7}{16}}(1+2q+4q^2+7q^3+\dots)$
$C_{11}^{11}(\tau)$	0	$1+2q+4q^2+8q^3+\dots$

Th.2 から

$$C_{11}^{11}(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{-i2}} \frac{1}{\sqrt{2}} (C_{20}^{20} - C_{02}^{20})(\tau) \quad \text{--- (a)}$$

$$A(\tau) = \frac{\eta(\tau)}{\eta(\tau)^2} \quad \text{とおけば}$$

$$A(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{-i2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\eta(\frac{7}{2})}{\eta(\tau)^2} = q^{-\frac{1}{16}}(1+\dots)$$

$$B(\tau) = \frac{C_{11}^{11}(\tau)}{A(\tau)} \quad \text{は上半平面で正則で、}$$

$$B(\tau+1) = B(\tau)$$

$$B(-\frac{1}{2}) = B(-\frac{1}{\tau+2})$$

従って B は

$$\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle = \sqrt{2}$$

に関する modular function で、高々 cusp $i\infty$, 0 で特異点をもつ。ところが $i\infty$, 0 で B は正則で $B(i\infty)=1$

よって $B(\tau) \equiv 1$ かつ

$$C_{11}^{11}(\tau) = \frac{\eta(\tau)}{\eta(\tau)^2} \quad \text{--- (2-II)}$$

$$D(\tau) = \det \begin{pmatrix} C_{20}^{20} & C_{11}^{20} & C_{02}^{20} \\ C_{20}^{11} & C_{11}^{11} & C_{02}^{11} \\ C_{20}^{02} & C_{11}^{02} & C_{02}^{02} \end{pmatrix} = C_{11}^{11} (C_{20}^{20} + C_{02}^{20}) (C_{20}^{20} - C_{02}^{20})(\tau) = q^{-\frac{1}{8}}(1+\dots)$$

とあく Th.25)

$$D(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{-i}^3} D(z)$$

$$E(z) = D(z) \eta(z)^3 \text{ とおけば}$$

$$E(z+1) = E(z), \quad E(-\frac{1}{2}) = E(z)$$

$$i\infty \text{ で } E(i\infty) = 1. \text{ 従って } D(z) = \frac{1}{\eta(z)^3} \quad - (8)$$

(a) と (2-II) より

$$(C_{20}^{20} - C_{02}^{20})(z) = \frac{\eta(\frac{z}{2})}{\eta(z)^2}$$

4) とあわせて

$$(C_{20}^{20} + C_{02}^{20})(z) = \frac{\eta(z)}{\eta(\frac{z}{2})\eta(2z)}$$

従って

$$C_{20}^{20}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\eta(\frac{z}{2})}{\eta(z)^2} + \frac{\eta(z)}{\eta(\frac{z}{2})\eta(2z)} \right)$$

$$C_{02}^{20}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\eta(z)}{\eta(\frac{z}{2})\eta(2z)} - \frac{\eta(\frac{z}{2})}{\eta(z)^2} \right)$$

一般に $m > 0$ に対し

$$\det (C_{m-j, j}^{m-i, i})_{0 \leq i, j \leq m} = \frac{1}{\eta(z)^{m+1}} \text{ が示される。}$$

C_{10}^{10}, C_{11}^{11} を求めた等と同様にして

$$C_{62}^{44}(z) = \frac{\eta(2z)\eta(10z)}{\eta(z)^3} \quad (2-IV)$$

が得られる。

§3 indefinite modular form & string function

3-1 Hecke の indefinite modular form

 U : 2次元 $\mathbb{R}$ -vector space L : full lattice B : U 上の indefinite な二次形式で $0 \neq x \in L$ に対して $0 \neq B(x, x) \in 2\mathbb{Z}$ となるもの。 L^* : L の B に関する dual-lattice

$$G_0 = \{g \in O(U, B) \mid gL = L, gL^*/L = \text{id}\}$$

とする。

 $B(x) = l_1(x)l_2(x)$ ($l_i \in U^*$) なる因数分解を1つ固定して $\text{sign}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \text{sign}(l_1(x))$ とおく。この時 $\mu \in L^*$ に対して

$$\theta_{L, \mu}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{x \in L + \mu \\ B(x, x) > 0 \\ x \bmod G_0}} \text{sign}(x) e^{\pi i B(x, x)z}$$

を Hecke の indefinite modular form と呼ぶ。

Hecke ([1]) により $\theta_{L, \mu}(z)$ は weight 1 の cusp form になる事が知られている。 $\mathbb{Z} \ni m > 0$ に対して次の様な U, L, B, l_1 をとる。

$$U = \mathbb{R}^2 \supset L = \mathbb{Z}^2, \quad B(x, y) = 2(m+2)x^2 - 2my^2$$

$$l_1 = \sqrt{2(m+2)}x + \sqrt{2m}y, \quad l_2 = \sqrt{2(m+2)}x - \sqrt{2m}y.$$

この時 $L^* = \frac{1}{2(m+2)} \mathbb{Z} \oplus \frac{1}{2m} \mathbb{Z}$

$$L^* \ni \mu = (\mu_1, \mu_2) \quad \mu_1 = \frac{M_1}{2(m+2)}, \mu_2 = \frac{M_2}{2m}, (M_i \in \mathbb{Z})$$

に対する $\theta_{L, \mu}(\tau) \propto \theta_{(\mu_1, \mu_2)}^m(\tau)$ と書くことにする。

$$a: (x, y) \mapsto ((m+1)x + my, (m+2)x + (m+1)y)$$

とおくと $G_0 = \langle a^2 \rangle$ になる。

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \{ (x, y) \mid -|x| < y \leq |x| \}$$

は $U_+ = \{ u \in U \mid B(u) > 0 \}$ の $G'_0 = \langle a \rangle$ に関する基本領域になる。よって $F \cup aF$ が G_0 に関する U_+ の基本領域になる。また F 上では $\text{sign}(x, y) = \text{sign } x$ とする。

従って

$$\theta_{(\mu_1, \mu_2)}^m(\tau) = \sum_{\substack{-|x| < y \leq |x| \\ (x, y) \equiv (\mu_1, \mu_2) \pmod{\mathbb{Z}^2}}} \text{sign } x \quad q^{(m+2)x^2 - my^2} \quad \dots (3.1)$$

$$\begin{aligned} (x, y) &\equiv (\mu_1, \mu_2) \pmod{\mathbb{Z}^2} \\ \text{or } &\equiv \left(\frac{M_1 + M_2}{2}, -\mu_1, \frac{M_1 + M_2}{2}, +\mu_2 \right) \pmod{\mathbb{Z}^2} \end{aligned}$$

$$(q = e^{2\pi i \tau})$$

3-2. string function & indefinite modular form

Th.3 $\Lambda \in P_+$, $\lambda \in \max(\Lambda)$, $m = \Lambda(C)$, $N_1 = \Lambda(h_1)$, $n_1 = \lambda(h_1)$

とする。この時

$$\eta(\tau)^3 \subset \Lambda_\lambda(\tau) = \theta_{\left(\frac{N_1+1}{2(m+2)}, \frac{n_1}{2m}\right)}^m(\tau)$$

証明) $C = \frac{N_1+1}{2(m+2)}$, $D = \frac{n_1}{2m}$ とおく。

$N_1 \equiv n_1 \pmod{2}$ だから (3.1) より示すべき式は

$$\eta(z)^3 C_A(z) = \sum_{\substack{-|x| < y \leq |x| \\ (x,y) \equiv (C,D) \pmod{\mathbb{Z}^2} \\ \text{or} \\ \equiv (\frac{1}{2}-C, \frac{1}{2}+D) \pmod{\mathbb{Z}^2}}} \text{sign } x \cdot q^{(m+2)x^2 - my^2} \quad \text{--- (3.2)}$$

(3.2) の証明のためにいくつか準備をする。

$\eta_0: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} : \beta = k\alpha_0 + l\alpha_1 \mapsto k$ とする。

$t' \in GL(f^*)$ を

$$t'(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda + \frac{\lambda(c)}{2} \alpha_1 - \left\{ \frac{\lambda(c)}{4} + \frac{\lambda(h_1)}{2} \right\} \delta$$

と定める。すると $k \in \mathbb{Z}$ に対して

$$t'^k(\lambda) = \lambda + \frac{\lambda(c)}{2} k \alpha_1 - \left\{ \frac{\lambda(c)}{4} k^2 + \frac{\lambda(h_1)}{2} k \right\} \delta \quad \text{--- (3.3)}$$

特に $t'^2 = t$ となる。

Lemma 2 $\Lambda \in P_+$, $\lambda \in \max(\Lambda)$ の時. $m = \Lambda(c)$

$$C = \frac{\Lambda(h_1)+1}{2(m+2)}, \quad D = \frac{\lambda(h_1)}{2m} \quad \text{とすると}$$

$$\eta_0(t'^k(t^n(\Lambda+p) - \lambda) - p)$$

$$= S_\Lambda(\lambda) + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} B\left(n + \frac{k}{2} + C, \frac{k}{2} + D\right) \quad \text{--- (3.4)}$$

$$\eta_0(t'^k(t^n r_1(\Lambda+p) - \lambda) - p)$$

$$= S_\Lambda(\lambda) + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} B\left(n + \frac{k}{2} - C, \frac{k}{2} + D\right) \quad \text{--- (3.5)}$$

$$\text{ここで } B(x, y) = 2(m+2)x^2 - 2my^2$$

(Lemma 2 の証明) $N_1 = \Lambda(h_1)$, $n_1 = \lambda(h_1)$ とおく。

$$\begin{aligned}
 & t'^k (t^n (\Lambda + \rho) - \lambda) - \rho \\
 &= t'^{2n+k} (\Lambda + \rho) - (\Lambda + \rho) - (t'^k (\lambda) - \lambda) + \Lambda - \lambda \\
 &\text{と (3.3) より}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.4) \text{ の左辺} &= - \left\{ (m+2) \left(n + \frac{k}{2} \right)^2 + (N_1+1) \left(n + \frac{k}{2} \right) \right\} \\
 &\quad + \left\{ m \left(\frac{k}{2} \right)^2 + n_1 \frac{k}{2} \right\} + n_0 (\Lambda - \lambda) \\
 &= - (m+2) \left\{ \left(n + \frac{k}{2} \right)^2 + C \right\}^2 + m \left(\frac{k}{2} + D \right)^2 \\
 &\quad + \underbrace{\frac{(N_1+1)^2}{4(m+2)} - \frac{n_1^2}{4m} + n_0 (\Lambda - \lambda)}
 \end{aligned}$$

└ (2.5) を比べて

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} B \left(n + \frac{k}{2} + C, \frac{k}{2} + D \right) + \rho \Lambda(\lambda) + \frac{1}{8} \\
 &= (3.4) \text{ の右辺}
 \end{aligned}$$

(3.5) についても同様. (Lemma 2 の証明 終わり.)

$\beta \in \mathbb{Q}$ に対して

$$S(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(q)^3 \sum_{n \geq 0} K(\beta + n\delta) q^n$$

とおく. ここで K は constant の分割関数.

Lemma 3 $\mathbb{Q} \ni \beta = m_0 \delta_0 + m_1 \delta_1$

$m_0 \leq 0$ 又は $m_1 \leq 0$ の時

$$S(\beta) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k q^{-n_0 (t'^k (\beta + \rho) - \rho)} \quad \dots (3.6)$$

$$= - \sum_{k < 0} (-1)^k q^{-n_0 (t'^k (\beta + \rho) - \rho)} \quad \dots (3.7)$$

(Lemma 3 の証明) (3.3) より

$$-n_0(t'^k(\beta+p) - p) = -(k+1)m_0 + km_1 + \frac{k(k+1)}{2}$$

となる。よって $k + k' = 2(m_0 - m_1) - 1$ のとき

$$n_0(t'^k(\beta+p) - p) = n_0(t'^{k'}(\beta+p) - p)$$

$$\text{従って } \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k q - n_0(t'^k(\beta+p) - p) = 0$$

となるので (3.6) と (3.7) は同値な式である。

Th.1 (1.4) より

$$S(\beta) = \varphi(q)^3 \sum_{s \geq 0} \sum_{k \geq 0} (-1)^k p^{(3)}\left((k+1)m_0 - km_1 - \frac{k(k+1)}{2} + s\right) q^s$$

$$= \sum_{k \geq 0} (-1)^k \varphi(q)^3 \sum_{s \geq 0} p^{(3)}\left((k+1)m_0 - km_1 - \frac{k(k+1)}{2} + s\right) q^s$$

$m_0 \leq m_1$ より $m_0 \leq 0$ のとき $(k+1)m_0 - km_1 - \frac{k(k+1)}{2} \leq 0$ となるので

$$S(\beta) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k q - (k+1)m_0 + km_1 + \frac{k(k+1)}{2}$$

$$= \sum_{k \geq 0} (-1)^k q - n_0(t'^k(\beta+p) - p) = (3.6) \text{ の右辺}$$

$m_1 \leq m_0$ 従って $m_1 \leq 0$ の時は Th.1 (1.5) を用いて (3.7) が同様に示せる。(Lemma 3 の証明 終り)

(3.2) 式の証明

$$\text{左辺} = q^{S_1(\lambda) + \frac{1}{8}} \varphi(q)^3 \sum_{n \geq 0} m_1(\lambda - n\delta) q^n$$

各項に Kostant の公式 (1.3) を適用すると

$$\begin{aligned}
&= q^{\delta_{\Lambda}(\lambda) + \frac{1}{8}} \sum_{w \in W} \det w \cdot \varphi(q)^3 \sum_{n \geq 0} K(w(\lambda + \rho) - (\lambda + \rho) + n\delta) q^n \\
&= q^{\delta_{\Lambda}(\lambda) + \frac{1}{8}} \left\{ \sum_{n \geq 0} S(t^n(\lambda + \rho) - (\lambda + \rho)) + \sum_{n < 0} S(t^n(\lambda + \rho) - (\lambda + \rho)) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n > 0} S(t^n \tau_1(\lambda + \rho) - (\lambda + \rho)) - \sum_{n \leq 0} S(t^n \tau_1(\lambda + \rho) - (\lambda + \rho)) \right\}
\end{aligned}$$

$\lambda \in \max(\Lambda)$ なので Prop. 1 (3) より

$$\forall w \in W \quad w(\lambda + \rho) - (\lambda + \rho) - \delta \notin Q_+$$

よって各項に Lemma 3 を適用できる。1, 3 項は (3.6), 2, 4 項は (3.7) を用いる。例えば 1 項目

$$S(t^n(\lambda + \rho) - (\lambda + \rho)) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k q^{-n_0} (t^{1/k} (t^n(\lambda + \rho) - \lambda) - \rho)$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{\text{Lemma 2 (3.4)}}{=} \sum_{k \geq 0} (-1)^k q^{-\delta_{\Lambda}(\lambda) - \frac{1}{8}} q^{\frac{1}{2}B(n + \frac{k}{2} + C, \frac{k}{2} + D)}
\end{aligned}$$

等となるから

$$\begin{aligned}
((3.2) \text{ の右辺 }) &= \left(\sum_{\substack{n \geq 0 \\ k \geq 0}}^{①} - \sum_{\substack{n < 0 \\ k < 0}}^{②} \right) (-1)^k q^{\frac{1}{2}B(n + \frac{k}{2} + C, \frac{k}{2} + D)} \\
&\quad - \left(\sum_{\substack{n > 0 \\ k \geq 0}}^{③} - \sum_{\substack{n \leq 0 \\ k < 0}}^{④} \right) (-1)^k q^{\frac{1}{2}B(n + \frac{k}{2} - C, \frac{k}{2} + D)}
\end{aligned}$$

$$①, ② \quad \begin{cases} k' = n + \frac{k}{2} \\ n' = \frac{k}{2} \end{cases}$$

$$③, ④ \quad \begin{cases} k' = -(n + \frac{k}{2}) \\ n' = \frac{k}{2} \end{cases}$$

変数変換し
 $B(x, y) = B(-x, y)$ から

$$= \sum_{\substack{k, n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \\ k \equiv n \pmod{\mathbb{Z}} \\ k \geq |n| \text{ or } k < -|n|}} (-1)^{2k} \text{sign}(k + \frac{1}{4}) q^{\frac{1}{2}} B(k+C, n+D)$$

$\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ の項に分け, $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ の項を $k \rightarrow -k$ と変換

$$= \sum_{\substack{k, n \in \mathbb{Z} \\ k \geq |n| \\ \text{or } k < -|n|}} \text{sign}(k + \frac{1}{4}) q^{\frac{1}{2}} B(k+C, n+D)$$

$$+ \sum_{\substack{k, n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \\ k > |n| \\ \text{or } k \leq -|n|}} \text{sign}(k - \frac{1}{4}) q^{\frac{1}{2}} B(k-C, n+D)$$

— (★)

$$0 < C < \frac{1}{2}, \quad 0 \leq D \leq \frac{1}{2} \quad \text{から} \quad 0 < C+D < 1, \quad |C-D| < \frac{1}{2}$$

$C \geq D$ のとき

$$\begin{array}{ll} \text{一項目} & \begin{cases} x = k+C \\ y = n+D \end{cases} \\ \text{二項目} & \begin{cases} x = k-C \\ y = n+D \end{cases} \end{array} \quad \text{と変換する}$$

$$\left. \begin{array}{l} (x, y) \equiv (C, D) \pmod{\mathbb{Z}^2} \\ \text{かつ} \\ x-C \geq |y-D| \\ \text{or} \\ x-C < -|y-D| \end{array} \right\} \iff \begin{array}{l} (x, y) \equiv (C, D) \pmod{\mathbb{Z}^2} \\ \text{かつ} \\ -|x| < |y| \leq |x| \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} (x, y) \equiv (\frac{1}{2}-C, \frac{1}{2}+D) \pmod{\mathbb{Z}^2} \\ \text{かつ} \\ \begin{cases} x+C \geq |y-D| \\ \text{or} \\ x+C < -|y-D| \end{cases} \end{array} \right\} \iff \begin{array}{l} (x, y) \equiv (\frac{1}{2}-C, \frac{1}{2}+D) \pmod{\mathbb{Z}^2} \\ \text{かつ} \\ -|x| < |y| \leq |x| \end{array}$$

より (★) = (3.2) の右辺. 即ち $\eta(\tau)^3 C_{\lambda}^A(\tau) = \theta_{(C,D)}^m(\tau)$

$C < D$ の時

$$C_{n_0 n_1}^{N_0 N_1} = C_{n_1 n_0}^{N_1 N_0}$$

$$C' = \frac{N_0 + 1}{2(m+2)}, \quad D' = \frac{n_0 + 1}{2m}$$

$$\text{よすれば } C + C' = D + D' = \frac{1}{2} \text{ より } C' > D'$$

従って

$$\eta(\tau)^3 C_{n_0 n_1}^{N_0 N_1}(\tau) = \eta(\tau)^3 C_{n_1 n_0}^{N_1 N_0}(\tau)$$

$$= \theta_{(C', D')}^m(\tau)$$

$$C' \not\equiv \pm D' \pmod{\mathbb{Z}} \text{ だから}$$

$$= \theta_{(C', -D')}^m(\tau)$$

$$= \theta_{(\frac{1}{2} - C, D - \frac{1}{2})}^m(\tau)$$

$$= \theta_{(\frac{1}{2} - C, \frac{1}{2} + D)}^m(\tau)$$

$$= \theta_{(C, D)}^m(\tau)$$

(定理の証明終り)

3-3. 等式 (I), (II), (III)

(2-I), (2-II), (2-III) より

$$\eta(12\tau)^3 C_{10}^{10}(12\tau) = \eta(12\tau)^2$$

$$\eta(8\tau)^3 C_{11}^{11}(8\tau) = \eta(8\tau)\eta(16\tau)$$

$$\eta(2\tau)^3 C_{62}^{44}(2\tau) = \eta(4\tau)\eta(20\tau)$$

Th.3よりこれらの左辺は それぞれ

$$\sum \text{sign } \chi \, q^{k^2 - 3l^2}$$

$$\begin{cases} k \equiv 1(6) \\ l \equiv 0(2) \end{cases} \begin{cases} k \equiv 2(6) \\ l \equiv 1(2) \end{cases}$$

$$-|k| < 3l \leq |k|$$

27

---- (3-I)

$$\sum_{\substack{k \equiv 1(4) \\ l \equiv 1(2) \\ -|k| < l \leq |k|}} \text{sign } k \quad q^{2k^2 - l^2} \quad \text{--- (3-II)}$$

$$\sum_{\substack{k \equiv 1(4) \\ l \equiv 1(4) \\ -2|k| < l \leq 2|k|}} \text{sign } k \quad q^{\frac{5k^2 - l^2}{4}} \quad \text{--- (3-III)}$$

(3-I), (3-II), (3-III) がそれぞれ (I), (II), (III) の右辺に等しい事を示せばよい。

(3-I)

$$\begin{cases} i = k + l \\ j = k + 3l \end{cases} \quad \text{と変換すると} \quad k^2 - 3l^2 = \frac{3i^2 - j^2}{2}$$

$$(3-I) = \sum_{\substack{i = 2a+1 \\ j = 6b \pm 1 \\ a \equiv b(2) \\ -|3i-j| < 3(j-i) \leq |3i-j|}} \text{sign } (3i-j) \quad q^{\frac{3i^2 - j^2}{2}}$$

$$= \left(\sum_{\substack{a \equiv b(2) \\ 0 \leq 2b \leq a}} - \sum_{\substack{a \equiv b(2) \\ a < 2b < 0}} \right) q^{\frac{3(2a+1)^2 - (6b+1)^2}{2}} \\ + \left(\sum_{\substack{a \equiv b(2) \\ 0 < 2b \leq a}} - \sum_{\substack{a \equiv b(2) \\ a < 2b \leq 0}} \right) q^{\frac{3(2a+1)^2 - (6b-1)^2}{2}}$$

後の二項 $b \rightarrow -b$ と変換

$$= \left(\sum_{\substack{a \equiv b(2) \\ 0 \leq 2|b| \leq a}} - \sum_{\substack{a \equiv b(2) \\ a < -2|b| \leq 0}} \right) q^{\frac{3(2a+1)^2 - (6b+1)^2}{2}}$$

後の項 $a' = -a+1$ と変換

$$= \left(\sum_{\substack{a \equiv b(2) \\ 2|b| \leq a}} - \sum_{\substack{a \not\equiv b(2) \\ 2|b| \leq a}} \right) q^{\frac{3(2a+1)^2 - (6b+1)^2}{2}}$$

$$= \sum_{\substack{2|k| \leq l \\ k, l \in \mathbb{Z}}} (-1)^{k+l} q^{\frac{3(2k+1)^2 - (6l+1)^2}{2}}$$

(3-II)

$$= \left(\sum_{\substack{k \equiv 1(4) \\ l \equiv 1(4) \\ -1 < k < l \leq |k|}} + \sum_{\substack{k \equiv 1(4) \\ l \equiv -1(4) \\ -1 < k < l \leq |k|}} \right) \text{sign } k q^{2k^2 - l^2}$$

-I項目

$$\begin{cases} i = 2k - l \\ j = \frac{k-l}{4} \end{cases}$$

II項目

$$\begin{cases} i = 2k + l \\ j = \frac{k+l}{4} \end{cases}$$

と変換

どちらの変換でも $2k^2 - l^2 = i^2 - 32j^2$

-I項目 $\sum_{\substack{i \equiv 1(4) \\ 0 \leq 6j < i \\ i < 6j < 0}} \text{sign } i q^{i^2 - 32j^2}$

$$= \sum_{\substack{a \geq 0 \\ 0 \leq 6j < 4a+1}} q^{(4a+1)^2 - 32j^2} - \sum_{\substack{a \geq 0 \\ -(4a+3) \leq 6j < 0}} q^{(4a+3)^2 - 32j^2}$$

II項目

$$\sum_{\substack{a \geq 0 \\ 0 < 6j \leq 4a+1}} q^{(4a+1)^2 - 32j^2} - \sum_{\substack{a \geq 0 \\ -(4a+3) < 6j \leq 0}} q^{(4a+3)^2 - 32j^2}$$

$$\stackrel{j \rightarrow -j}{=} \sum_{\substack{a \geq 0 \\ -(4a+1) \leq 6j < 0}} q^{(4a+1)^2 - 32j^2} - \sum_{\substack{a \geq 0 \\ 0 \leq 6j < (4a+3)}} q^{(4a+3)^2 - 32j^2}$$

全てまとめ

$$(3-II) = \sum_{3|j| \leq k} (-1)^k q^{(2k+1)^2 - 32j^2}$$

(3-IV)

$$= \sum_{a \geq 0} q^{\frac{5(4a+1)^2 - l^2}{4}} - \sum_{a \geq 0} q^{\frac{5(4a+3)^2 - l^2}{4}}$$

$$\begin{array}{l} -2(4a+1) < l \leq 2(4a+1) \\ l \equiv 1 (4) \end{array} \qquad \begin{array}{l} -2(4a+3) < l \leq 2(4a+3) \\ l \equiv 1 (4) \end{array}$$

$$= \sum_{k \geq 0} (-1)^k q^{\frac{5(2k+1)^2 - l^2}{4}} = \sum_{0 \leq l \leq 2k} (-1)^k q^{\frac{5(2k+1)^2 - (2l+1)^2}{4}}$$

$$\begin{array}{l} -2(2k+1) < l < 2(2k+1) \\ l \equiv 1 (4) \end{array}$$

[付記]

§2の string function の理論は一般の affine Lie 環についても展開される。[6]では $A_2^{(1)}$, $A_2^{(2)}$ の Kostant 分割関数も計算している。 $A_2^{(1)}$ についても研究している。 $A_1^{(1)}$ 以外の string function の例については、脇本氏、三輪-神保氏の記事を参照されたい。脇本氏 ([9], [10]) は特殊化された指標の積公式を用いて string function の計算を行っている。三輪-神保氏 ([2]) は affine Lie 環の pair $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2$ に関する standard module の分岐則に indefinite modular form が現われてくる事を発見した。

参考文献

- [1] E. Hecke : Über einen neuen Zusammenhang zwischen elliptischen Modulfunktionen und indefiniten quadratischen Formen ,
Mathematische Werke, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen (1959) , 418-427
- [2] M. Jimbo and T. Miwa : Irreducible decomposition of fundamental modules for $A_n^{(1)}$ and $C_n^{(1)}$, and Hecke modular forms, RIMS preprint 434
- [3] ——— : On a duality of branching rules for affine Lie algebras, RIMS preprint 453
- [4] V.G. Kac : Infinite dimensional algebras, Dedekind's η -function, classical Möbius function and the very strange formula, Adv. in Math. 30 (1978) , 85-136
- [5] V.G. Kac and D.H. Peterson : Affine Lie algebras and Hecke modular forms, Bull. Amer. Math. Soc. 3 (1980) , 1057-1061
- [6] ——— : Infinite dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms, Adv. in Math. (to appear)

- [7] J. Lepowsky : Kac-Moody Lie algebras,
Paris VI Lecture (1978)
- [8] R. Moody : A new class of Lie algebras ,
J. of alg. 10 (1968), 211-230
- [9] M. Wakimoto : Two formulae for specialized
characters of Kac-Moody Lie algebras, preprint
- [10] — : A note on fundamental representations
of an affine Lie algebra $C_2^{(1)}$, preprint
- [11] 岩堀-横沼 : Kac-Moody Lie 環と Macdonald
恒等式, 数学 33 巻 (1981), 193-212
- [12] 小池-徳山-田中 : Kac-Moody Lie 環の代数的側面
I, II, III, 「表現論とその周辺」
シンポジウム 報告集 (1982), 43-106