

複素ギンツブルグーランダウ方程式の乱流解

岩崎 宏 藤 定 義

Hiroshi IWASAKI and Sadayoshi TOH

京都大学理学部物理第一教室

Abstract

5 次の非線形項を持つ一次元の複素ギンツブルグーランダウ方程式 (CGL) の乱流解の漸近的性質を数値的に解析した。非粘性の極限では CGL 方程式は特異解を持つことで知られている非線形シュレディンガー方程式 (NLS) に近づく。CGL 方程式の解の振幅の確率分布関数 (PDF) は -8 乗に近い代数的な減衰部を持つことがわかった。このべき法則は、振幅の PDF が特異解のヒストグラムと CGL 方程式の“バースト”解の最大振幅分布の積で近似できることから説明できる。特異解のヒストグラムは -7 乗のべきを持つことがスケーリング則を用いて示した。またバースト解の最大振幅分布は -1 乗に近いべきを持つことが数値計算からわかった。

1 序論

発達した乱流はそのゆらぎがガウス分布からずれているので、理解するのは極めて難しい。例えば、速度の微分の確率分布関数 (PDF) のガウス分布からのずれはエネルギー輸送において基本的な役割を担っている。skewness が 0 でないことはエネルギーの小スケールへの輸送を示し、また、flatness が大きいことはエネルギー散逸における強い間欠性の現れである。[1-3]

最近 PDF の構造について多くの研究が成されている。[4-6] She[4] はバンドフィルター法を用い、散逸領域においては速度の微分だけでなく速度自体も PDF の flatness が大きいことを示し、また inertial range では速度の微分の PDF はガウス分布に近いことも示した。この結果からエネルギー散逸を担う小スケールのコヒーレントストラクチャーが存在することが示唆される。またこの構造は Navier-Stokes 方程式の complex singularity[10] であり、非粘性極限での特異解と関係があると思われる。従って PDF の性質は非粘性極

限で現われる特異解に依って説明できることが予想される。しかし Euler 方程式の特異解はその存在も含めて十分にはわかっていない。[7-9]

現在の計算機的能力では非常に高い Reynolds 数の Navier-Stokes 方程式を数値計算することができず、特異解の存在を調べることはできない。そこで Navier-Stokes 方程式の代わりにモデル方程式として 5 次の非線形項を持つ複素ギンツブルグーランダウ方程式 (QCGL) を用い、特異解と PDF の高振幅部分 (減衰部分) の構造との関係を調べる。ただし QCGL 方程式は間欠性をもつ系のモデル方程式であり、類似性はあるものの、Navier-Stokes 方程式とは明確な関係はない。

“非粘性極限”で QCGL 方程式は 5 次の非線形項を持つ非線形シュレディンガー方程式 (QNLS) に近づき、この QNLS 方程式は有限時間で発散する特異解を持つ。[10] QNLS 方程式とその特異解の性質は第 2 章で示される。散逸の影響が弱くなるにつれて QCGL 方程式は時間空間的に局在した爆発解 (burst) のため強く乱れた間欠的な振舞いをする。散逸が弱くなるにつれて振幅の PDF はガウス分布から大きくずれ、非粘性極限では漸近的な形に近づく。[11] 数値計算の結果は第 3 章に示す。第 4 章では PDF の漸近形の構造を QNLS 方程式の特異解より説明する。第 5 章は結論にあてられている。

2 基礎方程式

以下の 5 次の非線形項を持つ 1 次元ギンツブルグーランダウ方程式 (QCGL) を考える。

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{R}{\nu} \psi + \left(\frac{1}{\nu} + i \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left(-\frac{1}{\nu} + i \right) |\psi|^4 \psi \quad (1)$$

ここで区間は $[0, 1]$ の周期境界条件であり、変数 $\psi(x, t)$ は複素関数である。また、パラメーター R と ν は正の実数である。

もし $\nu > 1$ ならば、系は変調不安定であり、カオス的な振舞いをする。比較的 ν が小さいときには、カオスの自由度は少数である。しかし、 ν が大きくなるにつれて解の振舞いは非常に複雑になる。[12]

ν が無限大の極限では QCGL 方程式は次の QNLS 方程式に近づく。

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = i \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + i |\psi|^4 \psi, \quad (2)$$

この方程式は有限時間で自己相似的に発散する特異解を持つことで知られている。[10, 13-17] 一般に $(2\sigma + 1)$ 次の非線形項を持つ d 次元の NLS 方程式は $\sigma d \geq 2$ が成り立つとき特異解を持つことが知られている。[13] 1 次元の場合、5 次の非線形性 $|\psi|^4 \psi$ が特異解を持つための最小の次数である

方程式 (2) は特解 $\psi(x, t) = e^{it/3} S(x)$ を持ち、ここで $S(x)$ は $d^2 S/dx^2 - \frac{1}{3}S + S^5 = 0$ の局在解

$$S(x) = \operatorname{sech}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2x}{\sqrt{3}} \right) \quad (3)$$

であり、その最大値は $x=0$ で 1 である。さらに、方程式 (2) は次のスケーリング則を示す。つまり、 $\psi(x, t)$ が解ならば $\lambda^{-\frac{1}{2}} \psi(\lambda^{-1}x, \lambda^{-2}t)$ も解である。但し λ は任意の正定数である。

ここで次のようなことが予想される。つまり、方程式 (2) の特異解が、有限時間で 0 になるような時間依存するスケーリング関数 $\lambda(t)$ によって特解 S をスケールしたものの $\psi(x, t) \sim \lambda^{-\frac{1}{2}}(t) S(\lambda^{-1}(t)x)$ であらわされるということである。この予想に基づいて、多くの研究者 [13-15] が 1 次元、2 次元の NLS 方程式の特異解を定めるスケーリング関数を求めようと試みたが、数値計算の結果とうまく合わなかった。最近 2 次元の NLS 方程式の特異解について LeMesurier *et al.* [16,17] が数値計算とよく合う結果を出した。

彼らの方法を 1 次元の QNLS 方程式 (2) に適用すると時間 t^* で発散する特異解は次の形を持つ。

$$\psi(x, t) = L^{-1/2} \exp \left(i \frac{\tau}{3} - i a \frac{\xi^2}{4} \right) V(\xi, \tau), \quad (4)$$

ここで、

$$L(t) \sim \left(\frac{t^* - t}{\ln \ln \left(\frac{1}{t^* - t} \right)} \right)^{1/2}, \quad \xi = L^{-1}x, \quad \tau = \int_0^t L^{-2}(s) ds, \quad a = -L \frac{dL}{dt}. \quad (5)$$

$V(\xi, \tau)$ の関数形は原点近傍では特解 $S(\xi)$ に近いが、遠方では $S(\xi)$ は指数的に減衰するのに比べ、 $V(\xi, \tau)$ は代数的に減衰する。時間 t が critical time t^* に近づくにつれ V は特解 S に近づく。

QCGL 方程式 (1) は上記の特異解に近い振舞いをする解を持つ、しかし、この解は散逸のため発散はしない。系は頻繁に発生するこの「爆発」解と変調不安定モードによって強く乱され“乱流”状態になる。[11]

この“乱流”状態を方程式 (1) を数値的に解くことで調べる。計算スキームは時間積分に split-step 法 [18] を用い、空間積分には擬スペクトル法を用いた。次章で述べるように解は非常に大きい先鋭化した振幅を持つことがある。空間刻みと時間刻みはこの構造を精度良く計算するために動的に変えることができる。高波数成分が励起されたときには空間刻みは半分に、時間刻みは数値不安定を防ぐために 4 分の 1 にする。計算では空間成分の

配列は 2^{11} から 2^{17} までの間を変わった。パラメーターは $R = 10,000$ 、 $\nu = 500$ とした。これは方程式 (1) が漸近的振舞いをみせるのに十分大きな値である。

3 計算結果

振幅の絶対値の時空間の振舞いを図 1 に示した。横軸は空間であり縦軸は振幅と時間を現わす。二つの局在した構造“バースト”がみえる。

3.1 バーストの局在構造

図 2 (a) では図 1 のバーストの時間変化を拡大して示した。図 2 (b) は QNLS 方程式のスケーリング則にしたがって規格化したものである。実線は QNLS 方程式の特解である。バーストは自己相似的に振幅が大きくなるのがわかる。

次に図 3 ではバーストの振幅の最大値 (ピーク) の時間変化を示した。 $\nu = 500$ の時振幅は代数的に増大しある大きさに達したとき急激に減衰する。 $\nu = 100$ と $\nu = 10^{20}$ の場合についても同じ初期条件で計算した。後者は QNLS の場合にあたる。パラメータが大きくなるにつれてピークの最大値は大きくなり、 $\nu = 500$ の振舞いと QNLS 方程式の特異解の振舞いが非常に近いことがわかる。

特異解の時空間構造を調べるために、図 4 (a) で図 3 の特異解の振幅の絶対値の時間変化を拡大して示した。自己相似性をみるために前章で述べたスケール関数 $L(t)$ を定義し、特異解 ψ がある関数 V によって次のように現わされたとする。 $\psi(x) = L^{-1/2}V(L^{-1}x)$ この関数 V の形とスケーリング関数 $L(t)$ の時間依存性を調べる。

簡単のため $L(t) = (\sup_x |\psi(x, t)|)^{-2}$ とし、よって $V(L^{-1}x) = L^{1/2}\psi(x)$ で定義される関数 V は最大値 1 を持つ。この関数の絶対値 $|V(\xi)|$ を各々の時間について図 4 (b) に示した。実線は特解 S である。 V は中心部で特解と非常に近く、また時間変化が小さいことから特異解はほぼ自己相似的に発散することがわかる。図 2 から、バーストと特異解が似た振舞いをすることがみれる

さらにスケーリング関数の時間依存をみるために、図 4 (c) で L を縦軸、 $t^* - t$ を横軸に対数スケールでプロットした。実線は $L_0(t) = (t^* - t)^{\frac{1}{2}}$ とその対数補正したもの $L_1(t) = (t^* - t)^{\frac{1}{2}}(\ln \ln(\frac{1}{t^* - t}))^{-1}$ を表す。 L は L_1 と非常によく合い、 t が t^* に近いところでは L_0 でよく近似できる。注意することは L_1 の対数補正 $(\ln \ln(\frac{1}{t^* - t}))^{-1}$ は理論で予言された (式 (5)) $(\ln \ln(\frac{1}{t^* - t}))^{-1/2}$ と違うことである。この些細な違いは未解決の問題であるが、以下の議論には本質的ではない。

3.2 バーストの統計的性質

以下、バーストの統計的性質を調べる。QNLS 方程式の特異解が発散するのに対して、バーストはある有限の値 h_0 まで成長するとその後減衰する。この上限値 h_0 はバーストごとに異なり、QCGL 方程式のシミュレーションでは様々の大きさのバーストが現われる。以下のデータは $\nu = 500$ について長時間計算し、1000 個以上のバーストに対してとったものである。

まず、バーストが最も成長したときの上限値 h_0 の分布を調べる。図5では、 h より大きい上限値を持つバーストの分布関数 $G(h)$ (最大振幅分布関数) をプロットした。 $G(h)$ は h が小さいときには急激に減衰するが、 h が大きくなるにつれて -1 乗に近いべきでなだらかに減衰する。比較のためほかのパラメータでの $G(h)$ も示した ($\nu = 100, 200, 300, 400$)。 ν が大きくなるにつれてなだらかに減衰する領域が大きくなるのがわかる。

系の間欠性を特徴づけるには、確率分布関数 (PDF) の構造を調べるのが便利である。図6では QCGL 方程式の解の実部 $\text{Re}(\psi(x, t))$ と虚部 $\text{Im}(\psi(x, t))$ についての PDF を標準偏差が1になるように規格化して示している。(方程式(1)は ψ の成分に関して等方的なので実部も虚部も同じ分布にしたがう。) PDF の中心部の形はガウス分布に近く、これは小振幅の波の寄与である。反対に振幅が大きくなると代数的な減衰を示しガウス分布から著しくずれる。これは大きい振幅のバーストが生じているからである。分布の非ガウス性は低次のモーメントでは強く現われないことがこのことからわかる。実際 skewness は計算誤差の範囲内で0であるし、flatness は3.4でガウス分布の場合の3に近い。

さて、解の絶対値 $|\psi(x, t)|$ の確率分布関数は次の式で定義される。

$$P(h) = \frac{\iint dt dx \delta(|\psi(x, t)| - h)}{\iint dt dx} \quad (6)$$

分母は規格化因子である。これからの議論では、3種類のPDFが重要となる。第一に $P_T(h)$ で、これはQCGL方程式の解の全時間空間振舞いのPDFであり、2番目は $P_B(h)$ で、これは1個のバーストに対してのPDFで、積分区間は空間に対しては全空間、時間に対してはバーストが発生してから消滅するまで (life time) をとった。最後に、 $P_{h_0}(h)$ で、これはQNLS方程式の特異解のPDFで、積分区間は全空間、特異解が発生してからそのピークが高さ h_0 に達するまでの時間に対してとった。

図7は $P_T(h)$ で、これは -8 乗のべきの代数的な減衰部を持つ。図8で P_{h_0} と $P_B(h)$ を図示した。ただし、 $h_0 = 100$ とする。これらは、 -7 乗にはほぼ近い減衰部を持っている。なぜ、 P_B の減衰の仕方が P_{h_0} に比べ緩やかなのかというわけは、散逸の影響で、最大値付近でのバーストの成長率が抑えられるからである。全領域での確率分布関数 P_T と

バースト 1 個あたりの確率分布関数 P_B のべきが異なる理由はバーストの統計的分布で説明される。

次章では、まず P_{h_0} もしくは P_B の -7 乗のべきを特異解のスケーリング則から説明する。そして、 $P_T(h)$ の -8 のべきを $P_B(h)$ と $G(h)$ から再構成する。

4 PDF のべき法則の説明

前章では、 $P_T(h)$ が -8 乗のべき則にしたがうことをみた。このべき則はバーストの統計に帰すべきものである。大きい振幅のバーストは特異解に近い振舞いをするので、 P_B のべき則は QNLS 方程式の特異解のスケーリング則から説明できるだろう。

第 1 段階として、 $P_\infty(h)$ すなわち、 $P_{h_0=\infty}(h)$

$$P_\infty(h) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt dx \delta(h - |\psi(x, t)|)}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt dx} \quad (7)$$

を特異解 (4) を使って評価する。ここで、 ψ は QNLS 方程式の特異解であり、 t^* は発散する時刻である。 t^* の近くでは L の対数補正項は無視でき、 V は S で近似できる。よって、特異解は次のように近似できる。

$$|\psi(x, t)| = \lambda^{-\frac{1}{2}} S(\xi), \quad \xi = \lambda^{-1} x, \quad \lambda = (t^* - t)^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

新しい変数 ξ と λ を使うと、

$$\begin{aligned} P_\infty(h) &\propto \int_{-\infty}^0 \frac{d\lambda}{\frac{d}{dt}\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\xi \delta(h - \lambda^{-\frac{1}{2}} S(\xi)) \\ &= 4 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} d\lambda \frac{\lambda^{7/2}}{S(\xi)} \delta\left(\lambda - \left(\frac{S(\xi)}{h}\right)^2\right) \\ &= 4h^{-7} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi S(\xi)^6 \quad (= \sqrt{3}\pi h^{-7}) \end{aligned} \quad (9)$$

となり、 $P_\infty(h) \propto h^{-7}$ をえる。このべきは図 8 で示した計算結果とよく合う。

Q C G L 方程式における $P_T(h)$ の -8 乗のべきを説明するために、散逸の効果を考慮にいれる。バーストは Q N L S 方程式の特異解のように成長するが、限界値 h_0 に達すると散逸の効果が強くなり、速やかに消滅する。限界値 h_0 は定まった値でなく、確率密度関数 $g(h_0)$ によって記述される分布をとる。よって $P_T(h)$ は $P_B(h)$ を限界値 h_0 についての分布 $g(h_0)$ でウェイトをつけて和をとったもので表せる。

この確率密度関数は 3.2 小節で導入した $G(h)$ で以下のように記述できる。

$$g(h) = -\frac{dG(h)}{dh} \quad (10)$$

限界値 h_0 を持つ 1 個のバーストの確率分布関数 $P_B(h)$ は $P_{h_0}(h)$ で近似でき、これは次のように計算できる。

$$\begin{aligned} P_{h_0}(h) &\propto \int_{-\infty}^{t_0} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(h - |\psi(x, t)|) \quad (t_0 \text{ being a time s.t. } h_0 = \sup_x |\psi(x, t_0)|) \\ &= 4h^{-7} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi S(\xi)^6 \theta(h_0 S(\xi) - h) \end{aligned} \quad (11)$$

ただし、

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1 & \text{for } x > 0 \end{cases}$$

は Heaviside の階段関数である。

$P_{h_0}(h)$ は $h > h_0$ で 0 になる。これは式 (9) と式 (11) を比較し、式 (11) 中の $S(\xi)$ は最大値 1 に近い値しか積分に寄与しないことに着目すれば、 $P_{h_0}(h)$ は

$$P_{h_0}(h) \sim \theta(h_0 - h) P_{\infty}(h) \quad (12)$$

と近似できることから明かである。

そこで式 (12) を用い、

$$\begin{aligned} P_T(h) &\propto \int_0^{\infty} g(h_0) P_{h_0}(h) dh_0 \\ &\simeq \int_0^{\infty} \theta(h_0 - h) g(h_0) P_{\infty}(h) dh_0 \\ &= P_{\infty}(h) \int_h^{\infty} g(h_0) dh_0 \\ &= P_{\infty}(h) G(h) \end{aligned} \quad (13)$$

とできる。このように Q C G L 方程式の解 $|\psi|$ の確率密度関数は、Q N L S 方程式の特異解の確率密度関数と h より大きい振幅を持つバーストの確率分布関数との積で表現できる。

小節 3.2 で示したように $G(h)$ は -1 乗のべき法則に従うので、 $P_T(h) \propto h^{-8}$ が得られる。これは数値計算の結果とよくあう。

5 結論

Q C G L 方程式の解 ψ の確率分布関数を数値的に調べた。数値計算の結果、 $|\psi|$ の確率分布関数は -8 乗の代数的減衰を示すことがわかった。減衰の仕方はバーストの振幅の分布関数と最大値の分布関数の積から説明できる。

散逸が十分弱いときには、それぞれのバーストは散逸の効果が効くまで Q N L S 方程式の特異解のように自己相似的に成長する。つまり、それぞれの過程は非分散的要素で記述できる。単発のバーストの分布関数は、この自己相似性より -7 乗のべきを持つことが導ける。正確には、この自己相似性は弱く破れていて、スケール関数には対数補正がかかり、関数 V は弱い時間依存性を持つ。しかし、この効果は非常に弱く我々の得た結果に影響を及ぼさないので、本論分ではこの効果を無視した。

バーストは最終的には散逸の効果により必ず減衰するので、ある分布に従うはずである。この分布 $G(h)$ は、 ν が増加するにつれて、漸近的に代数的な関数形を持つようになる。非常に大きい h では代数的よりも速い減衰をする。 $G(h)$ を数値計算で詳細に調べたが、これらの構造を説明することはまだ出来ていない。

この統計的性質と構造の関係は十分発達した流体乱流のような強い間欠性を示す系に対して非常に本質的である様に思える。そのような系に対して、この方法の適応を試みている。

参考文献

- [1] U. Frisch, in *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*, Ed. M. Ghil (North-Holland, 1985) 71.
- [2] S. Kida and Y. Murakami, *Fluid Dyn. Res.* **4** (1989) 347.
- [3] M. Yamada and K. Ohkitani, *Prog. Theor. Phys.* **86** (1991) 759.
- [4] Z.-S. She, E. Jackson, and S. A. Orszag, *J. Sci. Comput.* **3** (1988) 407.
- [5] R. H. Kraichnan, *Phys. Rev. Lett.* **65** (1990) 575.
- [6] Z.-S. She, *Phys. Rev. Lett.* **66** (1991) 600.
- [7] R. Benzi, L. Biferale, G. Paladin, A. Vulpiani, and M. Vergassola, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 2299.
- [8] M. Brachet, D. Meiron, B. Nickel, S. Orszag, and U. Frisch, *J. Fluid Mech.* **130** (1983) 411.
- [9] A. Pumir and E. D. Siggia, *Phys. Fluids* **30** (1987) 1606.
- [10] C. Sulem, P. L. Sulem, and H. Frisch, *J. Comp. Phys.* **50** (1983) 138.

- [11] S. Toh and H. Iwasaki, submitted to J. Phys. Soc. Jpn.
- [12] M. Bartuccelli, P. Constantin, C. R. Doering, J. D. Gibbon, and M. Gisselält, *Physica D* **44** (1990) 421.
- [13] I. Rasmussen and K. Rypidal, *Phys. Scripta* **33** (1986) 481;
K. Rypidal and I. Rasmussen, *Phys. Scripta* **33** (1986) 498.
- [14] V. E. Zakharov and V. S. Synakh, *Sov. Phys. JETP* **41** (1976) 465.
- [15] D. Wood, *Stud. Appl. Math.* **71** 103 (1984) 103.
- [16] B. J. LeMesurier, G. C. Papanicolaou, C. Sulem, and P. L. Sulem, *Physica D* **32** (1988) 210.
- [17] M. J. Landman, G. C. Papanicolaou, C. Sulem, and P. L. Sulem, *Phys. Rev. A* **38** (1988) 3837.
- [18] A.C. Newell, D. A. Rand, and D. Russell, *Physica D* **33** (1988) 281.

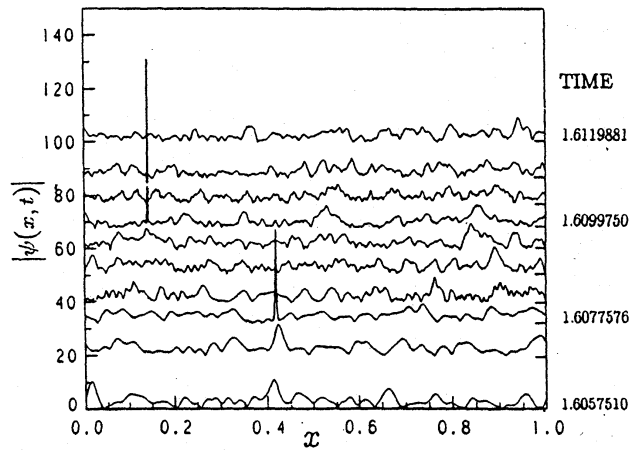


図 1
 $\nu = 500$ に対して $|\psi(x, t)|$ の全空間における時間発展

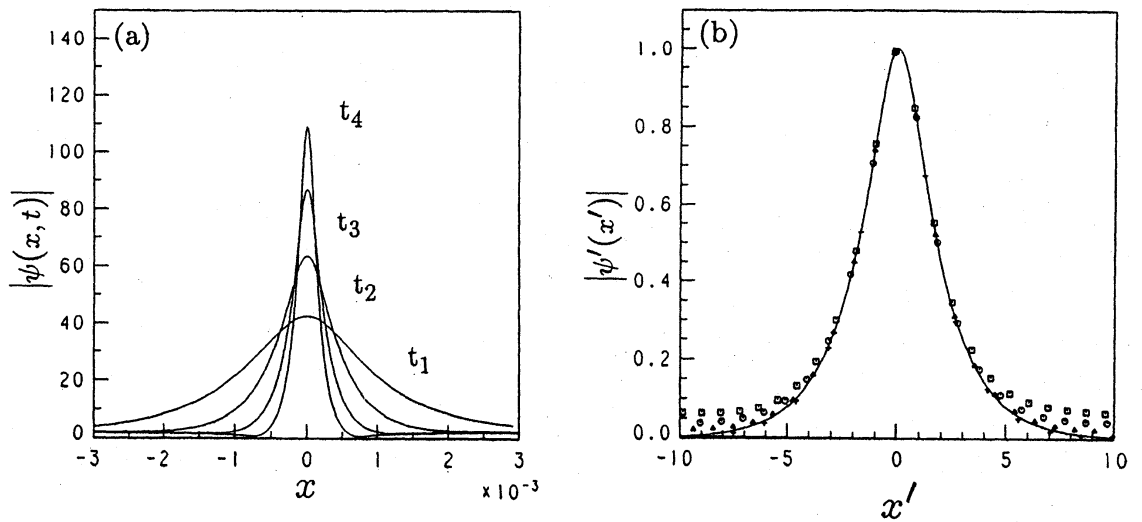


図 2
 (a) 図 1 のバーストを拡大図。時間は $t_1 = 1.6099742$, $t_2 = 1.6099750$, $t_3 = 1.6099752$ 及び $t_4 = 1.60997525$ である。
 (b) スケーリングした関数形 $|\psi'(x')| = \lambda^{1/2} |\psi(\lambda x')|$ $\lambda = (\sup_x |\psi(x)|)^{-2}$ を図示した。記号は t_1 (□), t_2 (○), t_3 (△) 及び t_4 (+) であり、実線は特解 $S(x') = \text{sech}^{1/2}(2x'/\sqrt{3})$ を示す。

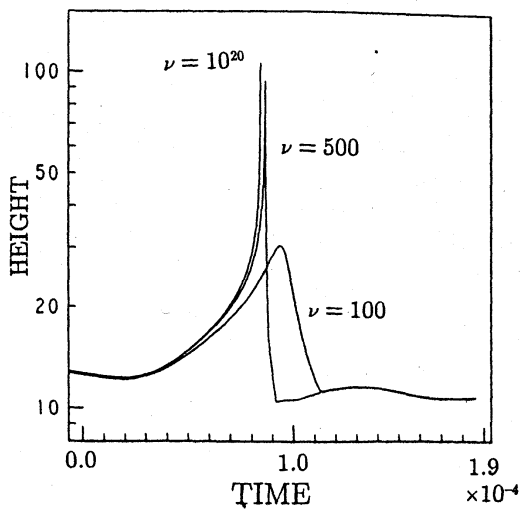


図 3
ピークの時間発展。時間は簡単のため直している。

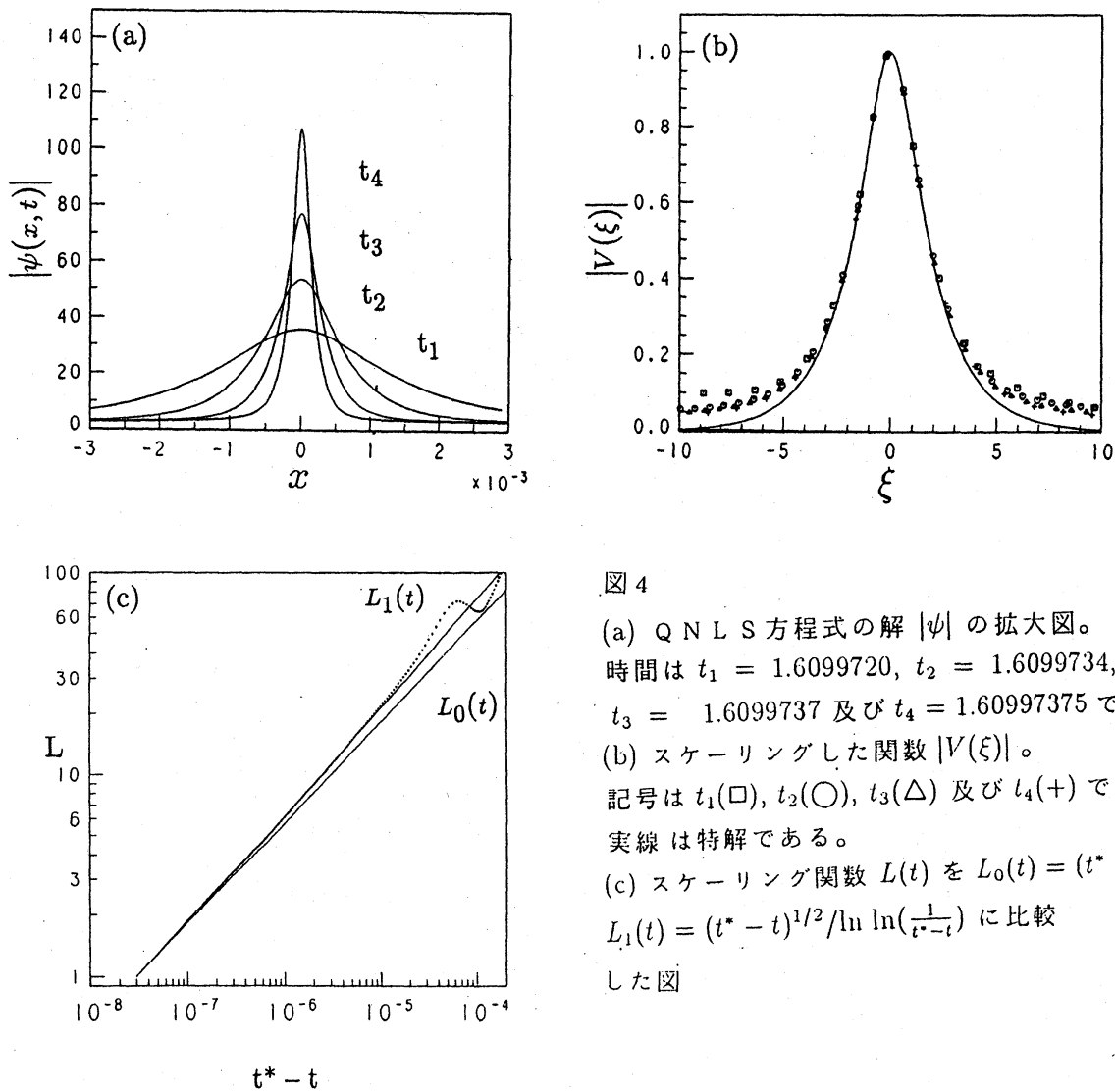


図 4

- (a) Q N L S 方程式の解 $|\psi|$ の拡大図。
 時間は $t_1 = 1.6099720$, $t_2 = 1.6099734$,
 $t_3 = 1.6099737$ 及び $t_4 = 1.60997375$ である。
 (b) スケーリングした関数 $|V(\xi)|$ 。
 記号は $t_1(\square)$, $t_2(\circ)$, $t_3(\triangle)$ 及び $t_4(+)$ であり、
 実線は特解である。
 (c) スケーリング関数 $L(t)$ を $L_0(t) = (t^* - t)^{1/2}$ と
 $L_1(t) = (t^* - t)^{1/2} / \ln \ln(\frac{1}{t^* - t})$ に比較
 した図

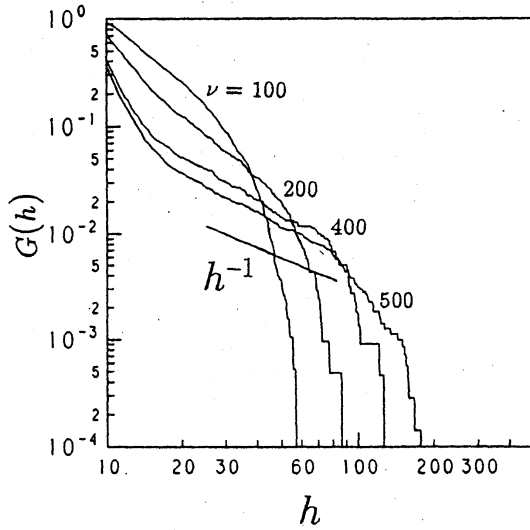


図 5
確率分布関数 $G(h)$ 。
パラメータは $\nu = 100, 200, 400, 500$ 。

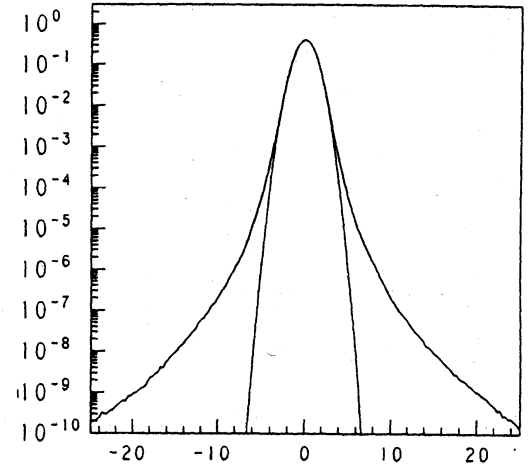


図 6
 ψ の実部と虚部の確率分布関数。
ガウス分布を比較のため図示している。

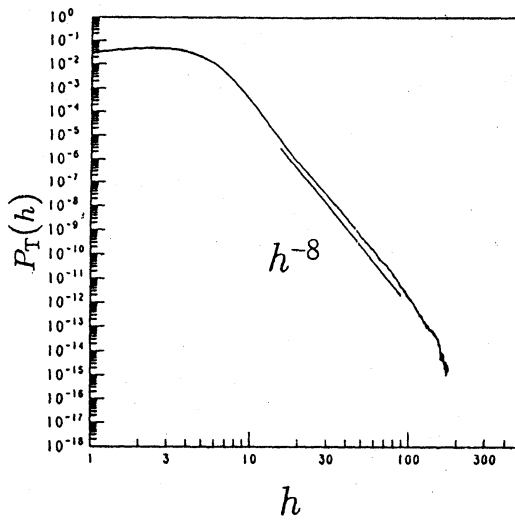


図 7
確率分布関数 $P_T(h)$ 。

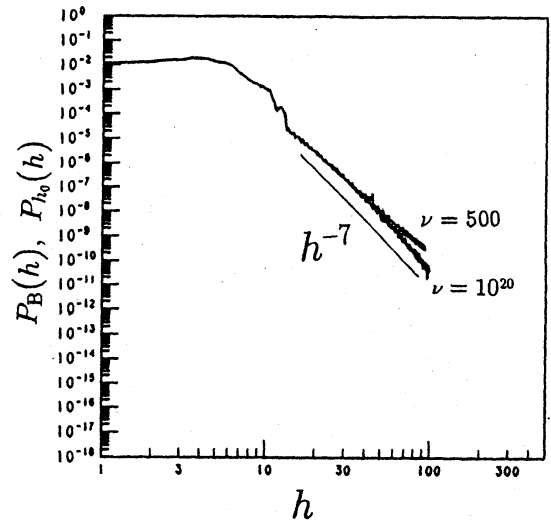


図 8
確率分布関数 $P_B(h)$ ($\nu = 500$)
及び $P_{h_0}(h)$ ($\nu = 10^{20}$)。
ただし $h_0 = 100$ である。