

UNIVERSAL GRAPH SERIES, CHROMATIC FUNCTIONS, AND THEIR INDEX THEORY

三枝崎剛

ABSTRACT. この原稿は 2024 年 12 月 16 日に行われた, RIMS 共同研究 (公開型) 「有限群論, 代数的組合せ論, 頂点代数の研究」における講演の報告である. 論文は arXiv に同じタイトルで掲載済 (arXiv: 2403.09985) で, 宗政昭弘先生 (東北大学), 西村優作先生 (早稲田大学), 佐久間雅先生 (山形大学), 辻栄周平先生 (北海道教育大学) との共同研究である.

講演では普遍グラフ族という概念を定義し, これを用いてグラフの 4 つ不変量を導入し, その性質を議論した. 特にそのうちの一つは Stanley による彩色対称関数の一般化となっており, グラフの完全不変量であることを示した. これらについて概説する.

1. 導入

1.1. **彩色対称関数.** $G = (V_G, E_G), H = (V_H, E_H)$ を単純グラフ, 写像 $\varphi: V_G \rightarrow V_H$ を G から H への準同型とする. つまり

$$\{u, v\} \in E_G \Rightarrow \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E_H.$$

G から H への準同型がなす集合を $\text{Hom}(G, H)$ と書く.

定義 1.1. 有限単純グラフ G に対して, $\chi(G, n) = \#\text{Hom}(G, K_n)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) を満たす多項式 $\chi(G, t) \in \mathbb{Z}[t]$ が存在する. これを G の彩色多項式という. これはグラフの不変量である.

例 1.2. $\mathcal{T}_m$ を m 頂点の木の集合とする. このとき任意の $T \in \mathcal{T}_m$ に対して $\chi(T, n) = n(n-1)^{m-1}$ となる. したがって彩色多項式は木を区別しない.

論文 [8] にて, Stanley は次の彩色対称関数を導入した.

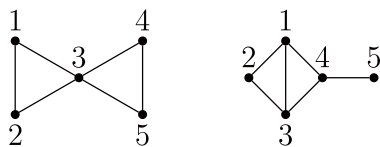
定義 1.3 ([8]).

$$X(G, x) := \sum_{\varphi \in \text{Hom}(G, K_{\mathbb{N}})} \prod_{v \in V_G} x_{\varphi(v)}$$

Date: December 24, 2024.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 05E05, 05C15; Secondary: 05C31, 05C63, 05C60, 05C09, 05A19.

Key words and phrases. Universal graphs, symmetric functions.

FIGURE 1. Graphs G_1 and G_2

を G の彩色対称関数という. ただし, $K_{\mathbb{N}}$ は $\mathbb{N}$ を頂点集合とする完全グラフである.

例えば, K_2 を 2 頂点完全グラフとする. このとき

$$X(K_2) = \sum_{i < j} 2x_i x_j.$$

ここで

$$\mathbf{1}^n := (\underbrace{1, \dots, 1}_n, 0, \dots)$$

に対し,

$$X(G, \mathbf{1}^n) = \chi(G, n)$$

を得る. したがって彩色対称関数は彩色多項式よりも強い不変量である. 実際, Stanley により次が予想されている.

予想 1.4 ([8]). 木全体の集合を $\mathcal{T}$ とする. 任意の $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ に対して, もし $X(T_1, x) = X(T_2, x)$ であれば, T_1 と T_2 は同型である.

Stanley の予想は彩色対称関数が $\mathcal{T}$ の完全不変量であることを主張する. しかしグラフ全体の集合を $\mathcal{G}$ としたとき, $\mathcal{G}$ の完全不変量ではない. 実際, Stanley は次の例を与えた [8]. 図 1 の $G_1 = (V, E_1)$ と $G_2 = (V, E_2)$ は明らかに非同型だが,

$$X(G_1) = X(G_2).$$

したがって次の問題を得る. すなわち

問題 1.5. 彩色対称関数の一般化で, グラフ全体の完全不変量となるものは存在するか.

この講演ではそのようなものの一例を与える.

我々は, Rado は普遍グラフという概念を参考にし [7], 普遍グラフ族という概念を導入した [6]. この概念を使ってグラフの 4 つの不変量を導入し, [6] にて基本的な性質を議論した. その紹介が本講演の目標である.

最初に Rado の普遍グラフを紹介しよう [7]:

定義 1.6 ([7]). G を無限グラフとする. このとき全ての有限単純グラフを G は誘導部分グラフとして含むとき, G を普遍グラフと呼ぶ.

普遍グラフ族はこの概念を一般化したものである.

定義 1.7. $N \subset \mathbb{N}$ とし, $\{H_n\}_{n \in N}$ をグラフの族とする. 全ての有限単純グラフ G に対して, ある $n \in N$ が存在して, G は H_n の誘導部分グラフとなっているとき, $\{H_n\}_{n \in N}$ を普遍グラフ族と呼ぶ.

さらに普遍グラフ族 $\{H_n\}_{n \in N}$ が次の性質を満たすとする: 全ての $m, n \in \mathbb{N}$ に対して, $m \leq n$ のとき, H_m が H_n の誘導部分グラフとなる, このとき普遍グラフ族 $\{H_n\}_{n \in N}$ は誘導普遍グラフ族と呼ぶ.

例えば, Kneser グラフの族 $\{K_{\mathbb{N},k}\}_{k=1}^{\infty}$ は誘導普遍グラフ族であり [5], Paley グラフの族 $\{P(q)\}_{q \in \mathcal{P}}$ は普遍グラフ族である [1, 2, 4]. ここで $\mathcal{P}$ は $q \equiv 1 \pmod{4}$ を満たすすべての素数べき q の集合である.

我々の不変量の定義のため, H -彩色関数を導入しよう:

定義 1.8. x_u ($u \in V(H)$) を不定元とし, H -彩色関数 $X_H(G)$ を次で定義する:

$$X_H(G) := X_H(G, x) := \sum_{\varphi \in \text{Hom}(G, H)} \prod_{v \in V(G)} x_{\varphi(v)}.$$

次が [6] の最初の結果である. 与えられた普遍グラフ族 $\{H_n\}_{n \in N}$ に対して, 次の 4 つのグラフ不変量を導入した [6]:

定義 1.9. $H = \{H_n\}_{n \in N}$ を普遍グラフ族, G を有限単純グラフとする. $\mathcal{G}$ を全ての有限単純グラフからなる集合とする.

(1) G の普遍 H -彩色関数を次で定義する:

$$\{X_{H_n}(G)\}_{n \in N}.$$

(2) グラフの族 $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ に対して, H -関数指数 $I_H(\mathcal{A})$ を次で定義する:

$$I_H(\mathcal{A}) = \min\{t \in N \mid \{X_{H_n}(\bullet)\}_{n=1}^t \text{ は } \mathcal{A} \text{ の完全不変量}\}.$$

(3) H -誘導指数 $i_H(G)$ を次で定義する:

$$i_H(G) = \min\{n \in N \mid G \text{ は } H_n \text{ の誘導部分グラフ}\}.$$

(4) H -指数 $\tilde{i}_H(G)$ を次で定義する:

$$\tilde{i}_H(G) = \min\{n \in N \mid G \text{ は } H_n \text{ の部分グラフ}\}.$$

注意 1.10. $H = \{H_n\}_{n \in N}$ を誘導普遍グラフ族とする. このとき全ての $m, n \in N$ に対して, $m \leq n$ ならば $X_{H_n}(\bullet)$ は $X_{H_m}(\bullet)$ より強い不変量である. つまり任意の $G, G' \in \mathcal{G}$ に対して, $X_{H_n}(G) = X_{H_n}(G')$ ならば $X_{H_m}(G) = X_{H_m}(G')$ が成立する. 例えば $\{K_{\mathbb{N},k}\}_{k=1}^{\infty}$ は誘導普遍グラフ族であった. したがって $X_{K_{\mathbb{N},k+1}}(\bullet)$ は $X_{K_{\mathbb{N},k}}(\bullet)$ より強い不変量である.

本講演の主結果を紹介しよう．もし普遍グラフ族が存在するなら，それに応じてグラフの完全不変量を構成できる：

定理 1.11. (1) H を普遍グラフとする．このとき

$$X_H(\bullet)$$

は有限単純グラフの完全不変量である．

(2) $H = \{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を普遍グラフ族とする．このとき

$$\{X_{H_n}(\bullet)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

は有限単純グラフの完全不変量である．

例えば $\{K_{\mathbb{N},k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ Kneser グラフ族とする．このとき

$$\{X_{K_{\mathbb{N},k}}(\bullet)\}_{k=1}^{\infty}$$

はグラフの完全不変量である． $K_{\mathbb{N},1} = K_{\mathbb{N}}$ に注意すると， $X_{K_{\mathbb{N},1}}(\bullet)$ は彩色対称関数 $X(\bullet)$ であることに注意されたい．したがって，この不変量は Stanley の彩色対称関数の一般化である．

次の定理は，いくつかのグラフに対して，Paley（誘導）指数の上からの評価を与える． q を $q \equiv 1 \pmod{4}$ を満たす素数べきとし， $P(q)$ をサイズ q の Paley グラフとする． K_{k_1,k_2} を完全 2 部グラフとし，それぞれの部集合のサイズは k_1 と k_2 とする． C_k と P_k は，それぞれサイズ k のサイクルとパスとする．

定理 1.12. q を奇数の素数べきとする．

(1) $P = \{P((q^2)^{3^n})\}_{n=1}^{\infty}$ は，誘導普遍グラフ族である．

(2) $\mathcal{A}_k$ を高々 k 頂点の全ての単純グラフの集合とする．このとき次が成立する：

$$I_P(\mathcal{A}_k) \leq \lceil \log_3 \log_q((k-1)2^{k-2}) \rceil.$$

(3) k_1 と k_2 を $q^{3^m-1} - 1 \leq k_1 \leq k_2 \leq q^{3^m} - 1$ を満たす整数とする．

(a) 次でグラフの族を定義する：

$$\mathcal{H} = \{K_{k_1,k_2}, C_{2k_1}, P_{k_1+k_2-1}\}$$

このとき任意の $G \in \mathcal{H}$ に対して，次が成立する：

$$i_P(G) \leq \left\lceil \log_3 \log_q((q^{3^m} - 2) \left(\frac{q^{3^m} - 1}{2} + 1 \right)) \right\rceil.$$

(b) 次が成立する：

$$\begin{aligned} & i_P(C_{2k_1+1}) \\ & \leq \left\lceil \log_3 \log_q \left(\left((2q^{3^m} - 3) \left(\frac{q^{3^m} - 1}{2} \right) - q^{3^m} + 2 \right) 2^{q^{3^m}-1} \right) \right\rceil. \end{aligned}$$

(4) 任意の整数 k に対して、次が成立する：

$$\tilde{i}_P(C_k) = \tilde{i}_P(P_k) = \left\lceil \log_3 \frac{1}{2} (\log_q k) \right\rceil.$$

[8, Theorem 2.5] にて、Stanley はべき和対称関数からなる基底を用いて、 $X(\bullet)$ を展開する公式を与えた．最後の主結果はこの公式の $\{X_{K_{\mathbb{N},k}}(\bullet)\}_{k=1}^{\infty}$ への一般化である．(未定義の記号 $(\mathcal{A}_S^{(k)})$ と p_λ) はセクション 3 を参照のこと.)：

定理 1.13. 次が成立する：

$$X_{K_{\mathbb{N},k}}(G) = \sum_{S \subseteq E(G)} (-1)^{|S|} \sum_{\lambda \in \mathcal{A}_S^{(k)}} p_\lambda.$$

以上が [6] の内容である．以降のセクションでは、より詳しく内容を見ていこう．セクション 2 では、定理 1.11 の証明を行う．セクション 3 では定理 1.13 の解説を行う．定理 1.12 に関する議論は割愛する．詳しくは [6] を参照されたい．最後にセクション 4 にて、いくつかの未解決問題を紹介する．

2. 定理 1.11 の証明

定理 1.11 の証明のため、次の補題を引用しよう：

補題 2.1 ([3, p.128 Exercise 11]). G_1 と G_2 を有限グラフとする．全ての有限グラフ F に対して、 $|\text{Hom}(G_1, F)| = |\text{Hom}(G_2, F)|$ が成立するなら、 G_1 と G_2 は同型である．

定理 1.11 の証明．．(1) の証明を与えよう．(2) も同様に証明できる．

$X_H(G_1) = X_H(G_2)$ と仮定する． F を有限グラフとしよう． H は普遍グラフだから、 F は H の誘導部分グラフになっている．このとき、 $w \in V(F)$ か否かに応じて、次のように変数に値を代入する： $x_w = 1$ または 0．すると $|\text{Hom}(G_1, F)| = |\text{Hom}(G_2, F)|$ を得る．補題 2.1 を用いて G_1 と G_2 は同型になることがわかる．□

3. $X_{K_{\mathbb{N},k}}(G, x)$ のべき和展開

このセクションでは定理 1.13 の証明を与える．Kneser グラフ $\text{Aut}(K_{\mathbb{N},k})$ の自己同型群は対称群 $S_{\mathbb{N}}$ と同型で、 $X_{K_{\mathbb{N},k}}(G)$ は $S_{\mathbb{N}}$ の自然な作用で不変である． $\text{Sym}^{(k)}$ を $R_{K_{\mathbb{N},k}}^{S_{\mathbb{N}}}$ の部分環、有限次数からなるものとする． $X_{K_{\mathbb{N},k}}(G)$ は次数が $|V(G)|$ の斉次だから、 $X_{K_{\mathbb{N},k}}(G)$ は $\text{Sym}^{(k)}$ に属す． $\text{Sym}^{(1)}$ は対称関数環で、 $X_{K_{\mathbb{N},1}}(G)$ は G の彩色対称関数であることに注意しよう．

$\{I_1, \dots, I_n\}$ と $\{J_1, \dots, J_n\}$ を $\binom{\mathbb{N}}{k}$ の元からなる, 2つの多重集合とする. 同値関係 $\{I_1, \dots, I_n\} \sim \{J_1, \dots, J_n\}$ を, ある $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$ が存在して, 次を満たすときとして定義しよう:

$$\{I_1, \dots, I_n\} = \{\sigma(J_1), \dots, \sigma(J_n)\}.$$

ただし等号は多重集合で考える.

定義 3.1. $\mathcal{P}_n^{(k)}$ を上で定義した多重集合の同値類からなる集合とする. また $\mathcal{P}^{(k)} := \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n^{(k)}$ と定義する.

$\lambda \in \mathcal{P}_n^{(k)}$ とし, $\{I_1, \dots, I_n\}$ を λ の代表元とする. すると λ は k -様なハイパー多重グラフとみなすことができる. ここで頂点集合は $V_\lambda = I_1 \cup \dots \cup I_n$, 辺の多重集合は $E_\lambda = \{I_1, \dots, I_n\}$ である. このハイパーグラフの同型類は代表元 $\{I_1, \dots, I_n\}$ の選び方に依存しないことに注意されたい. また全ての n, k に対して, $\mathcal{P}_n^{(k)}$ は有限集合である.

例えば $k = 1$ のとき, グラフ λ は 1-様ハイパー多重グラフである. この場合 λ は λ のハイパーエッジからなる整数の分割と同一視される. こうして $\mathcal{P}^{(1)}$ は整数の分割の集合となる. $k = 2$ のとき, λ は 2-様ハイパー多重グラフとなる. したがって $\mathcal{P}^{(2)}$ はループや孤立点のない多重グラフの集合となる.

$\lambda \in \mathcal{P}^{(k)}$ と仮定しよう. 単項 k -重対称関数 $m_\lambda = m_\lambda^{(k)} \in \text{Sym}^{(k)}$ を次で定義しよう:

$$m_\lambda := \sum_{\{I_1, \dots, I_n\} \in \lambda} x_{I_1} \cdots x_{I_n}.$$

$\text{Sym}^{(k)}$ の全ての斉次部分は有限次元であり, 集合 $\{m_\lambda\}_\lambda$ は $\text{Sym}^{(k)}$ の $\mathbb{C}$ 上の基底となる.

$\lambda \in \mathcal{P}^{(k)}$ がハイパー多重グラフとして連結のとき, $\lambda \in \mathcal{P}^{(k)}$ を連結と呼ぼう. ハイパー多重グラフ λ は $\lambda = \lambda_1 \sqcup \dots \sqcup \lambda_\ell$ の非交和に, 通常の方法で分解される. するとべき和 k -重対称関数 $p_\lambda = p_\lambda^{(k)} \in \text{Sym}^{(k)}$ を以下のように定義できる:

$$p_\lambda := m_{\lambda_1} \cdots m_{\lambda_\ell}.$$

$k = 1$ のとき, p_λ は通常のべき和対称関数であることに注意されたい.

命題 3.2. 集合 $\{p_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}^{(k)}}$ は $\text{Sym}^{(k)}$ の $\mathbb{C}$ 上の基底をなす. 特に $\text{Sym}^{(k)}$ は $\mathbb{C}$ -代数として, $\{p_\lambda \in \mathcal{P}^{(k)} \mid \lambda \text{ は連結} \}$ で自由に生成される.

定義 3.3. G を n 頂点の連結グラフとする. $\lambda \in \mathcal{P}_n^{(k)}$ が G -admissible とは, 全単射 $\varphi: V(G) \rightarrow E_\lambda$ が存在して, $\{u, v\} \in E(G)$ ならば $\varphi(u) \cap \varphi(v) \neq \emptyset$ を満たすものである. $\mathcal{A}_G^{(k)}$ を $\mathcal{P}_n^{(k)}$ の元で, G -admissible なものの全体とする.

G が非連結, $G = G_1 \sqcup \dots \sqcup G_\ell$ を連結成分への分解のとき, 次のように定義する: $\mathcal{A}_G^{(k)} := \mathcal{A}_{G_1}^{(k)} \times \dots \times \mathcal{A}_{G_\ell}^{(k)}$.

定理 3.4 (定理 1.13 (再掲)). 次が成立する：

$$X_{K_{\mathbb{N},k}}(G) = \sum_{S \subset E(G)} (-1)^{|S|} \sum_{\lambda \in \mathcal{A}_S^{(k)}} p_\lambda,$$

ここで $\mathcal{A}_S^{(k)}$ は次を意味し $\mathcal{A}_{G_S}^{(k)}$, G_S は G の辺集合 S で生成される全域部分グラフである.

例 3.5. $G = P_3$, $k = 2$ とする. G の全域部分グラフは, 次のどれかと同型である: $3K_1, K_2 \sqcup K_1, P_3$. したがって次を得る：

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{3K_1}^{(2)} &= \mathcal{A}_{K_1}^{(2)} \times \mathcal{A}_{K_1}^{(2)} \times \mathcal{A}_{K_1}^{(2)} = \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right\}, \\ \mathcal{A}_{K_2 \sqcup K_1}^{(2)} &= \mathcal{A}_{K_2}^{(2)} \times \mathcal{A}_{K_1}^{(2)} = \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} \right\}, \\ \mathcal{A}_{P_3}^{(2)} &= \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

以上より, 次の展開式を得る：

$$\begin{aligned} X_{K_{\mathbb{N},2}}(P_3) &= \sum_{\lambda \in \mathcal{A}_{3K_1}^{(2)}} p_\lambda - 2 \sum_{\lambda \in \mathcal{A}_{K_2 \sqcup K_1}^{(2)}} p_\lambda + \sum_{\lambda \in \mathcal{A}_{P_3}^{(2)}} p_\lambda \\ &= p_{\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}} - 2p_{\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}} - 2p_{\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}} + p_{\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}} + p_{\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}} + p_{\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}} + p_{\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}}. \end{aligned}$$

例 3.6. $G = K_3$, $k = 2$ とする. G の全域部分グラフは, 次のどれかと同型である: $3K_1, K_2 \sqcup K_1, P_3, K_3$. 次に注意して,

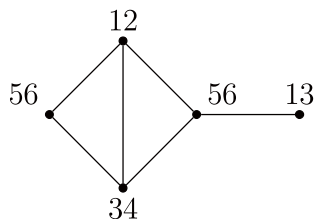
$$\mathcal{A}_{K_3}^{(2)} = \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} \right\}$$

以下の展開式を得る：

$$\begin{aligned} X_{K_{\mathbb{N},2}}(K_3) &= \sum_{\lambda \in \mathcal{A}_{3K_1}^{(2)}} p_\lambda - 3 \sum_{\lambda \in \mathcal{A}_{K_2 \sqcup K_1}^{(2)}} p_\lambda + 3 \sum_{\lambda \in \mathcal{A}_{P_3}^{(2)}} p_\lambda - \sum_{\lambda \in \mathcal{A}_{K_3}^{(2)}} p_\lambda \\ &= p_{\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}} - 3p_{\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}} - 3p_{\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}} + 3p_{\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}} + 2p_{\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}} + 2p_{\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}} + 2p_{\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}}. \end{aligned}$$

4. 関連する問題について

注意 4.1. $X_{K_{\mathbb{N},2}}(\bullet)$ は図 1 の G_1 と G_2 を区別する. 実際, G_2 から $K_{\mathbb{N},2}$ への準同型写像は次のように存在する：



一方で, G_1 から $K_{\mathbb{N},2}$ への準同型写像で, 像が $\{12, 13, 34, 56, 56\}$ となるものは存在しない.

問題: 非同型グラフのペア G_1, G_2 で $X_{K_{\mathbb{N},2}}(G_1) = X_{K_{\mathbb{N},2}}(G_2)$ となるものは存在するか?

注意 4.2. $\mathcal{T}$ を木全体の集合とし, $I_K(\mathcal{T})$ を $\mathcal{T}$ の Kneser-関数指数とする. Stanley の予想 1.4 は $I_K(\mathcal{T}) = 1$ を意味する.

問題: $I_K(\mathcal{T})$ を上から評価することは可能か?

REFERENCES

- [1] A. Blass, G. Exoo, and F. Harary, Paley graphs satisfy all first-order adjacency axioms, *J. Graph Theory* **5** (1981), no. 4, 435–439.
- [2] B. Bollobás and A. Thomason, Graphs which contain all small graphs, *European J. Combin.* **2** (1981), no. 1, 13–15.
- [3] C.D. Godsil and G. Royle, *Algebraic graph theory*, Graduate texts in mathematics, no. 207, Springer, New York, 2001.
- [4] R.L. Graham and J.H. Spencer, A constructive solution to a tournament problem, *Canad. Math. Bull.* **14** (1971), 45–48.
- [5] P. Hamburger, A. Por, and M. Walsh, Kneser representations of graphs. *SIAM J. Discrete Math.* **23** (2009), no. 2, 1071–1081.
- [6] T. Miezaki, A. Munemasa, Y. Nishimura, T. Sakuma, and S. Tsujie, Universal graph series, chromatic functions, and their index theory, submitted.
- [7] R. Rado, Universal graphs and universal functions, *Acta Arith.* **9** (1964), 331–340.
- [8] R.P. Stanley, A symmetric function generalization of the chromatic polynomial of a graph, *Adv. Math.* **111** (1995), no. 1, 166–194.

早稲田大学基幹理工学部

Email address: miezaki@waseda.jp