

On representations of the McKay quiver and variation of GIT quotients

石井 亮

講演についての訂正

城崎での講演においては、 $\mathbb{C}^3/G$ の任意の (射影的とは限らない) crepant resolution と 籠 (quiver) の表現についての話をしましたが、証明の中で誤った議論をしておりました。モデュライ空間のフロップの起こる様子を "G-igsaw puzzle" で図式化したつもりだったのですが、単に「うまく行っている場合の図」に過ぎませんでした。(あのようにはならない場合が存在します。) 本稿提出の時点では修正できておりません。誤った証明に基づいて講演したことをお詫び致します。

本稿においては、GIT 商の変化を調べる立場からのアプローチ (従って射影的な場合) について説明します。おもに 2 次元の場合 (知られていることですが) に McKay 対応や伊藤-中村の定理と関連づけて説明し、最後に 3 次元の場合に A. Craw 氏 (Utah 大学) と共同で研究していることについて簡単に触れます。

1 McKay 対応と同変連接層

まず McKay の発見について復習する。 $G \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ を有限部分群とする。 G の既約表現の (同値類の) 全体を

$$\mathrm{Irr}(G) = \{ \rho_0, \rho_1, \dots, \rho_r \}$$

と書く。ただし、 ρ_0 は自明な表現である。 $G \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ から定まる 2 次元表現を ρ_{nat} と書く。

$$\rho_i \otimes \rho_{\mathrm{nat}} \cong \bigoplus_j \rho_j^{\oplus a_{ij}}$$

と分解することにより、 $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ が定まる。McKay の発見したこと [M] は、既約表現を頂点として $a_{ij} = a_{ji}$ 本の辺で ρ_i と ρ_j とを結ぶと、アフィン Dynkin 図式が現れる、というものであった。あるいは、 $(2\delta_{ij} - a_{ij})$ がアフィン Cartan 行列である、

とも言うことができる。本節では、中島啓に従い、McKay 対応を $\mathbb{C}^2$ 上の G -同変接続層のことばで言い換えてみる。

G を $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ の有限部分群とする。 $\mathbb{C}^n$ の上の接続層で G -同変な作用を持つもののなす圏を $\mathrm{Coh}^G(\mathbb{C}^n)$ と書くことにする。 $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Coh}^G(\mathbb{C}^n)$ に対し、

$$G\text{-}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}^G(\mathbb{C}^n)}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = (\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))^G$$

とし、

$$G\text{-}\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := (\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}))^G$$

とおく ($\mathbb{C}$ の標数が 0 で G は有限群なので、 G -不変部分をとる関手は完全である)。 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ の一方がコンパクトな台を持つとき、

$$G\text{-}\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong G\text{-}\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}}^{n-i}(\mathcal{G}, \mathcal{F} \otimes K_{\mathbb{C}^n})^*$$

が成り立つ (G -同変 Serre 双対性)。 $D^G(\mathbb{C}^n)$ を $\mathrm{Coh}^G(\mathbb{C}^n)$ から定まる導来圏とし、 $D_o^G(\mathbb{C}^n)$ をその台が原点 o に含まれるものからなる充満部分圏とする。 また、 $K^G(\mathbb{C}^n)$ 、 $K_o^G(\mathbb{C}^n)$ をそれぞれに対応する Grothendieck 群とする。 $K^G(\mathbb{C}^n)$ は $\rho_i \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ ($i = 0, \dots, r$) を、 $K_o^G(\mathbb{C}^n)$ は $\rho_i \otimes \mathcal{O}_o$ ($i = 0, \dots, r$) を基とする自由加群である。

$K^G(\mathbb{C}^n)$ と $K_o^G(\mathbb{C}^n)$ は

$$\langle \mathcal{F}, \mathcal{G} \rangle = \sum_{i=0}^n \dim G\text{-}\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

により互いに双対である。 また、 $K_o^G(\mathbb{C}^n)$ の二つの元についても $\langle \mathcal{F}, \mathcal{G} \rangle$ と書くことにする。 (注: $K_o^G(\mathbb{C}^n) \rightarrow K^G(\mathbb{C}^n)$ は単射ではないので、 $\langle, \rangle$ は $K_o^G(\mathbb{C}^n)$ 上は退化している。) $G \subset \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ ならば、 Serre 双対性により、 $\langle \mathcal{F}, \mathcal{G} \rangle = (-1)^n \langle \mathcal{G}, \mathcal{F} \rangle$ である。

$G \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ の時に、 $\langle \rho_i \otimes \mathcal{O}_o, \rho_j \otimes \mathcal{O}_o \rangle$ を計算してみよう。 Ext を計算するためには局所自由分解を取るのであるが、 それには Koszul 複体を用いる：

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{C}^2}^2 \rightarrow \Omega_{\mathbb{C}^2}^1 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \rightarrow \mathcal{O}_o \rightarrow 0.$$

$G \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ であるから、 これは

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \rightarrow \rho_{\mathrm{nat}} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \rightarrow \mathcal{O}_o \rightarrow 0$$

と書ける。 これに ρ_i をテンソルしたものを考えて、

$$\begin{aligned} \langle \rho_i \otimes \mathcal{O}_o, \rho_j \otimes \mathcal{O}_o \rangle &= 2 \langle \rho_i \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}, \rho_j \otimes \mathcal{O}_o \rangle - \langle \rho_{\mathrm{nat}} \otimes \rho_i \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}, \rho_j \otimes \mathcal{O}_o \rangle \\ &= 2\delta_{ij} - a_{ij} \end{aligned}$$

となる。 従って、 McKay の発見は次のように言い換えられる：

補題 1.1 (中島). $K_o^G(\mathbb{C}^2)$ の双線形形式 $\langle, \rangle$ の表現行列 $(\langle \rho_i \otimes \mathcal{O}_o, \rho_j \otimes \mathcal{O}_o \rangle)_{i,j}$ はアフィン Cartan 行列である.

$\tau: Y \rightarrow \mathbb{C}^2/G$ を最小特異点解消, $E_1, \dots, E_r$ を既約な例外因子とする. $K_o(Y)$ で, 例外集合に台を持つ Y 上の接続層のなす K 群を表す. $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in K_o(Y)$ に対しても, Ext の次元の交代和で $\langle \mathcal{F}, \mathcal{G} \rangle$ を定義する. これは, 0 次元の台を持つ層に対しては恒等的に消え, 因子に対しては交点数の符号を変えたものである. よって, 既約例外曲線と, fundamental cycle の (-1) 倍でアフィン Cartan 行列ができる. そこで, $K_o(Y)$ の基底として

$$-[\omega_{\tau^{-1}(o)}], \mathcal{O}_{E_1}(-1), \dots, \mathcal{O}_{E_r}(-1)$$

を取れば, これについての $\langle, \rangle$ の行列表示がアフィン Cartan 行列になる. ここで, $\omega_{\tau^{-1}(o)}$ は fundamental cycle $\tau^{-1}(o)$ の dualizing sheaf であり, $\mathcal{O}_{E_i}(-1)$ は $E_i \cong \mathbb{P}^1$ 上の次数 -1 の直線束である. 従って, (番号 $1, \dots, r$ を適当に付け替えれば) $\rho_0 \otimes \mathcal{O}_o, \dots, \rho_r \otimes \mathcal{O}_o$ を上の基底に対応させることによって, $(K_o^G(\mathbb{C}^2), \langle, \rangle)$ と $(K_o(Y), \langle, \rangle)$ との間の同型が得られる. この同型が G -Hilb の場合の Fourier-向井変換からできること, および, この同型と Weyl 群の作用を合成したものが, 他のモデュライ空間の場合の Fourier-向井変換からできることを, 後で説明する.

注 1.2. 上の $K_o(Y)$ の基底は, $\langle \mathcal{O}_Y, -[\omega_{\tau^{-1}(o)}] \rangle = 1, \langle \mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_{E_i}(-1) \rangle = 0$ という条件で選んだ.

2 モデュライ空間とその構成

McKay 対応の解釈, 3次元での crepant resolution の統一的構成, といった点で, 中村の導入した, 群軌道の Hilbert scheme (G -Hilb) は大きな役割を果たしている. ここでは, $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ に対し, G -Hilb($\mathbb{C}^n$) を次のように定義する:

$$G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^n) = \left\{ \mathcal{Z} \left| \begin{array}{l} \mathcal{Z} \text{ は } \mathbb{C}^n \text{ の } G\text{-不変な有限部分スキームで,} \\ H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}) \text{ は } G \text{ の正則表現である} \end{array} \right. \right\}.$$

(このように定義すると, 一般次元では既約とは限らない.) 上のような $\mathcal{Z}$ を G -cluster と呼ぶ. すなわち, G -Hilb は G -cluster のモデュライ空間である. これから考えるのは, G -Hilb を, 部分スキームよりはむしろ G -同変接続層 $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}$ のモデュライ空間と見て, 一般化したものである. 2次元の場合には, 本質的には, Kronheimer [Kr] のモデュライ空間 (の複素パラメータ 0 の場合) ([CS] 参照) であり, 一般には Sardo-Infirri [S] のものと同じものである.

$\theta : \text{Irr}(G) \rightarrow \mathbb{Q}$ を任意の写像とする. G の有限次元表現 $V = \bigoplus_{\rho \in \text{Irr}(G)} V_{\rho} \otimes \rho$ に対し, $\theta(V) = \sum_{\rho \in \text{Irr}(G)} \theta(\rho) \dim V_{\rho}$ と置く. 有限の台を持つ $E \in \text{Coh}^G(\mathbb{C}^n)$ についても, $\theta(E) = \theta(H^0(E))$ と置く.

定義 2.1. 有限の台を持つ $E \in \text{Coh}^G(\mathbb{C}^n)$ が θ -stable とは,

- $\theta(E) = 0$,
- $F \subset E$ が自明でない同変真部分加群であれば, $\theta(F) > 0$,

が成り立つことを言う. 不等号が等号付きであるとき, E は θ -semi-stable であるという.

後で主に考えるのは, $H^0(E)$ が G の正則表現 R である場合である.

$$R = \bigoplus_{\rho \in \text{Irr}(G)} R_{\rho} \otimes \rho$$

と分解したとき, $\dim R_{\rho} = \dim \rho$ となるのが正則表現であった. $E \in \text{Coh}^G(\mathbb{C}^n)$ で G の表現として $H^0(E) \cong R$ となるものを, 筆者の共同研究者である A. Craw に倣って G -constellation と呼び, G -constellation の全体を $\text{Coh}_R^G(\mathbb{C}^n)$ と表すことにする.

補題 2.2. $\theta : \text{Irr}(G) \rightarrow \mathbb{Q}$ を, $\theta(R) = 0$ かつ $\theta(\rho_0) < 0$, $\theta(\rho) > 0$ ($\rho \neq \rho_0$) を満たすものとする. このとき, $E \in \text{Coh}_R^G(\mathbb{C}^n)$ について, 次は同値である.

- E は θ -stable である.
- E は θ -semi-stable である.
- $E \cong \mathcal{O}_Z$ となる subscheme (すなわち, G -cluster) $Z \subset \mathbb{C}^n$ が存在する.

Proof. $\theta(R) = \sum_{\rho \in \text{Irr}(G)} (\dim \rho) \theta(\rho) = 0$ であって $\dim \rho_0 = 1$ であるから, 仮定により R の非自明な部分表現 S については $\theta(S) \neq 0$ である. 従って θ -stability と θ -semi-stability は一致する. さらに, $\theta(S) < 0$ となるのは S が $R_{\rho_0} \otimes \rho_0$ を含むときである. 従って, E が θ -stable であるということは, $E \cong_G R$ としたときに, E が $R_{\rho_0} \otimes \rho_0$ の一つ元で $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ -加群として生成されるということと同値である. $\square$

従って, 上のような θ に対しては, $G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^n)$ が, θ -stable な G -constellation のモデュライ空間である, ということになる.

以下, 中島に従って $\mathbb{C}^n$ 上の同変連接層を「可換性条件」を満たす簾の表現とみなし, そのモデュライ空間を構成する. すなわち, G の表現 V と $\theta(V) = 0$ と

る $\theta : \text{Irr}(G) \rightarrow \mathbb{Q}$ について, θ -stable な $E \in \text{Coh}_V^G(\mathbb{C}^n)$ のモデュライ空間を構成する. $Q = \mathbb{C}^n$ で, $G \subset \text{GL}(n, \mathbb{C})$ により与えられる G の表現を表すことにする. $E \in \text{Coh}_V^G(\mathbb{C}^n)$ と G の表現空間としての同型 $E \cong_{\mathbb{C}[G]} V$ の組を与えるということは, V への多項式環の G -同変な作用を与える, ということである. そこで,

$$\mathcal{N}(V) = \{ B \in \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V, Q \otimes V) \mid B \wedge B = 0 \},$$

とおく. ただし, $B \wedge B$ は $\text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V, \wedge^2 Q \otimes V)$ の元である. $B \in \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V, Q \otimes V)$ は V への $\bigoplus_n (\otimes^n Q^*)$ の作用を与え, $B \wedge B = 0$ はそれが可換である, すなわち多項式環の作用から来るための条件である. よって, $B \in \mathcal{N}(V)$ が上のような $E \in \text{Coh}_V^G(\mathbb{C}^n)$ と $E \cong_{\mathbb{C}[G]} V$ の組だと思える. $\text{Aut}_{\mathbb{C}[G]}(V) \subset \text{GL}(V)$ により G の表現としての V の自己同型群を表す. これは,

$$\text{Aut}_{\mathbb{C}[G]}(V) = \prod_{\rho \in \text{Irr}(G)} \text{GL}(V_\rho).$$

と分解する.

$$\text{PAut}_{\mathbb{C}[G]}(V) := \text{Aut}_{\mathbb{C}[G]}(V) / \mathbb{C}^*$$

とおく. ただし, $\mathbb{C}^*$ は V のスカラー乗法群である. この $\text{PAut}_{\mathbb{C}[G]}(V)$ は $\mathcal{N}(V)$ に共役により作用する. $\text{PAut}_{\mathbb{C}[G]}(V)$ の指標群は

$$\{ \theta : \text{Irr}(G) \rightarrow \mathbb{Z} \mid \theta(V) = 0 \}$$

であることに注意する. このような θ は $\mathcal{N}(V)$ 上の自明な直線束の線形化を与える.

定理 2.3 (King[Ki]). $B \in \mathcal{N}(V)$ とする. これが $\text{PAut}_{\mathbb{C}[G]}(V)$ の作用と線形化 θ に関して GIT の意味で (semi-)stable であることと, 対応する $E \in \text{Coh}_V^G(\mathbb{C}^n)$ が θ -(semi-)stable であることは, 同値である.

そこで,

$$\mathcal{M}_\theta(V) := \mathcal{N}(V)^{\theta\text{-s}} // \text{PAut}_{\mathbb{C}[G]}(V), \quad \overline{\mathcal{M}_\theta(V)} := \mathcal{N}(V)^{\theta\text{-ss}} // \text{PAut}_{\mathbb{C}[G]}(V)$$

とおくと, これらは θ -stable および θ -semi-stable な $E \in \text{Coh}_V^G(\mathbb{C}^n)$ のモデュライ空間となる. $\overline{\mathcal{M}_\theta(V)}$ はアフィンスキームであり, $\overline{\mathcal{M}_\theta(V)}$ はその上に射影的である.

本稿においては, V が正則表現の場合を考察する. G -Hilb に対しては, Hilbert-Chow morphism というものが存在したが,

命題 2.4. $V = R(\text{正則表現})$ のとき, $\mathcal{M}_\theta \rightarrow \mathbb{C}^n/G : E \mapsto \text{supp}(E)$ はスキームの射になる. 特に, 自由軌道のなす開集合上この射は同型である. また, θ -stability と θ -semi-stability とが一致するとき, この射は射影的である.

さらに,

命題 2.5. $V = R$ のとき, $M_\theta := M_\theta(R)$ 上には *universal family* が存在する.

Proof. $\mathcal{N} := \mathcal{N}(R)$ 上のベクトル束 $\bigoplus_{\rho \in \text{Irr}(G)} R_\rho \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{N}}$ は自然な $\text{Aut}_{\mathbb{C}[G]}(R)$ の作用を持つ. 部分群 $\text{Aut}'_{\mathbb{C}[G]}(R) \subset \text{Aut}_{\mathbb{C}[G]}(R)$ を

$$\text{Aut}'_{\mathbb{C}[G]}(R) = \{ (g_\rho)_{\rho \in \text{Irr}(G)} \in \text{Aut}_{\mathbb{C}[G]}(R) \mid g_{\rho_0} = 1 \}$$

により定義する. ここで, ρ_0 は自明な表現であるから, $\dim R_{\rho_0} = 1$ であり,

$$\text{Aut}'_{\mathbb{C}[G]}(R) \cong \text{PAut}_{\mathbb{C}[G]}(R)$$

となる. $\text{PAut}_{\mathbb{C}[G]}(R)$ の $\mathcal{N}^{\theta_s}$ への作用は自由であり, $R_\rho \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{N}}$ は $\text{Aut}'_{\mathbb{C}[G]}(R)$ の同変な作用を受けるから, $\mathcal{M}_\theta$ 上のベクトル束 $\mathcal{R}_\rho$ に decent する. $\mathcal{N}$ の定義から universal homomorphism

$$\bigoplus_{\rho \in \text{Irr}(G)} R_\rho \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{N}} \rightarrow Q \otimes \left(\bigoplus_{\rho \in \text{Irr}(G)} R_\rho \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{N}} \right)$$

が存在するが, これは $\text{Aut}'_{\mathbb{C}[G]}(R)$ の作用と可換であるから, $\mathcal{M}_\theta$ 上の

$$\bigoplus_{\rho \in \text{Irr}(G)} \mathcal{R}_\rho \rightarrow Q \otimes \left(\bigoplus_{\rho \in \text{Irr}(G)} \mathcal{R}_\rho \right)$$

に decent する. すなわち, $\mathcal{R} := \bigoplus_{\rho \in \text{Irr}(G)} \mathcal{R}_\rho \otimes \rho$ には多項式環 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}_\theta} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ の作用が入り, universal family となる. $\square$

定義 2.6. 上の証明中の $\mathcal{R}_\rho$ を tautological vector bundle と呼ぶ.

$\text{Aut}'_{\mathbb{C}[G]}(R)$ の定義により, $\mathcal{R}_{\rho_0}$ は自明な直線束である.

$\eta : \text{Irr}(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ に対し,

$$L(\eta) := \bigotimes_{\rho \in \text{Irr}(G)} \det(\mathcal{R}_\rho)^{\otimes \eta(\rho)} \quad (2.1)$$

とおく. $\mathcal{M}_\theta$ の構成により, $L(\theta)$ は ample である.

3 Bridgeland-King-Reid の定理

この節では、 $G \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ または、 $G \subset \mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ とし、 θ -stability と θ -semi-stability は一致すると仮定する. 簡単のため $\mathcal{M}_\theta$ を $\mathcal{M}$ と表すことにする. $\mathcal{M}$ 上には, universal family を与える $\mathcal{R} = \bigoplus_\rho \mathcal{R}_\rho \otimes \rho$ が存在したが, これを $\mathcal{M} \times \mathbb{C}^n$ 上の G -同変接続層とみて, $\mathcal{C}$ と書く. ただし, G は $\mathcal{M}$ には自明に作用している. $\pi_{\mathcal{M}}, \pi_{\mathbb{C}^n}$ により $\mathcal{M} \times \mathbb{C}^n$ からのそれぞれの射影を表す. $D(\mathcal{M})$ および $D^G(\mathbb{C}^n)$ により, $\mathcal{M}$ および $\mathbb{C}^n$ 上の接続層および G -同変接続層の作る導来圏を表す. 関手 $\Phi: D(\mathcal{M}) \rightarrow D^G(\mathbb{C}^n)$ および $\Psi: D^G(\mathbb{C}^n) \rightarrow D(\mathcal{M})$ を次のように定義する:

$$\Phi(-) = \mathbb{R}\pi_{\mathbb{C}^n*}(\pi_{\mathcal{M}}^*(- \otimes \rho_0) \otimes \mathcal{C})$$

そして

$$\Psi(-) = \left(\mathbb{R}\pi_{\mathcal{M}*}(\mathcal{C}^\vee[n] \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \pi_{\mathbb{C}^n}^*(-)) \right)^G.$$

ここで,

$$\mathcal{C}^\vee = \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{M} \times \mathbb{C}^n}}(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{M} \times \mathbb{C}^n})$$

は $\mathcal{C}$ の derived dual である. [BKR] と全く同じ議論により, 次が示される.

定理 3.1. $G \subset \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, $n = 2$ または 3 とする. このとき, $\mathcal{M}_\theta \rightarrow \mathbb{C}^n/G$ は crepant resolution であり, Φ, Ψ は互いに逆の圏同値である.

4 $G \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ の場合

前節における圏同値としての McKay 対応を前提として, $\mathcal{M}_\theta$ が θ に応じてどのように変わるのか, 考えよう. $G \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ のときは, generic な θ に対しては $\mathcal{M}_\theta$ はみな $\mathbb{C}^2/G$ の最小特異点解消であり代数多様体としては同じものであるが, GIT 商としては変化するものである. この様子は Weyl 群により記述できる (Kronheimer, [Kr]). 本節では, このことを関手 Φ を使って説明する.

$$\Pi := \{\theta : \mathrm{Irr}(G) \rightarrow \mathbb{Q} \mid \theta(R) = 0\}$$

とおく. θ -stability によって, Π にはいわゆる chamber structure が入る.

補題 1.1 により, $K_\circ^G(\mathbb{C}^2)$ は, 既約表現を単純ルートに対応させることにより, アフィンルート系に対するルート格子だと見ることができる. (正則表現が minimal imaginary root に対応する.) すると, $K_\circ^G(\mathbb{C}^2)/\mathbb{Z}[R \otimes \mathcal{O}_\circ]$ は有限型のルート格子であり, Π は, それに対応するウェイトの空間となる.

次は本質的には Kronheimer によるもので, 2次元の場合の chamber structure を調べる際に重要な鍵となる. 次のような定式化及び証明は中島による.

補題 4.1 (Root Lemma, [Kr], [CS]). $S \neq 0$ を正則表現 R の部分表現とし, 適当な θ に対して $\mathcal{M}_\theta(S)$ が空でないとする. このとき, $\mathcal{M}_\theta(S)$ は 2次元または 0次元である. 2次元になるとき, $S = R$ であり, 0次元になるとき, S は $K_o^G(\mathbb{C}^2)/\mathbb{Z}[R \otimes \mathcal{O}_o]$ においてルートに対応する.

Proof. $F \in \mathcal{M}_\theta(S)$ とする. この点における $\mathcal{M}_\theta(S)$ の (接空間の) 次元は

$$\begin{aligned} \dim G\text{-Ext}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}^1(F, F) &= \dim G\text{-Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}(F, F) + \dim G\text{-Ext}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}^2(F, F) - \langle F, F \rangle \\ &= 2 - \langle F, F \rangle. \end{aligned}$$

従って, $\mathcal{M}_\theta(S) \neq \emptyset$ ならば, $\langle F, F \rangle \leq 2$ である. これは, S を有限型ルート格子の元と見ると, 0 またはルートに対応することと同値である. $\square$

$\theta \in \Pi$ を $\text{Coh}_R^G(\mathbb{C}^2)$ 上 semi-stability と stability とが一致するものと仮定する. Π において, θ の属する chamber を次のように定義する:

$$C(\theta) = \{ \eta \in \Pi \mid \eta\text{-stability と } \theta\text{-stability は一致する} \}$$

命題 4.2. $\eta \in C(\theta)$ であることと, (2.1) の $L(\eta)$ が $\mathcal{M}_\theta$ 上 ample であることは同値である.

Proof. $\eta \in C(\theta)$ ならば, モデュライの構成により $L(\eta)$ は ample である. θ_0 を $C(\theta)$ を囲む wall 上に general に (これは本質的ではない) 取る. θ_0 は wall 上にあるから, $E \in \mathcal{M}_\theta$ で θ_0 -stable でないものが存在する. θ_0 を wall 上 general に取ったから, $F \subset E$ で, F と E/F が θ_0 -stable になるものが存在する. F と E/F は同型ではなく (G の表現としても同型でない) ともに θ_0 -stable なので, $G\text{-Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}(E/F, F)$ や $G\text{-Ext}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}^2(E/F, F)$ は (後者は Serre 双対をとれば) 消える. 従って,

$$\dim G\text{-Ext}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}^1(E/F, E) = -\langle F, E/F \rangle = \langle F, F \rangle = 2$$

となる. 射 $\mathcal{M}_\theta \rightarrow \overline{\mathcal{M}_{\theta_0}}$ は, このような E をみな $F \oplus E/F$ のクラスに写すから, 少なくとも一つの射影直線を一点につぶす. $L(\theta_0)$ は $\overline{\mathcal{M}_{\theta_0}}$ 上 GIT により定まる (fractional) line bundle の引き戻しであるから, ample でない. $\square$

これを函手 Φ を使って言い換える. $\eta: \text{Irr}(G) \rightarrow \mathbb{Q}$ は $K_o^G(\mathbb{C}^2)$ から $\mathbb{Q}$ への写像に拡張できるが, $D_o^G(\mathbb{C}^2)$ の object も $\eta(\cdot)$ の中に代入することにする.

系 4.3. $\mathcal{M}_\theta \rightarrow \mathbb{C}^2/G$ の例外直線を $E_1, \dots, E_r$ とすると,

$$C(\theta) = \{ \eta \in \Pi \mid \eta(\Phi(\mathcal{O}_{E_i})) > 0 (i = 1, \dots, r) \}$$

Proof. $\Phi(\mathcal{O}_{E_i})$ は $\mathbb{R}\Gamma(\mathcal{R}|_{E_i})$ を $D_o^G(\mathbb{C}^2)$ の object と思ったものに他ならない. すると, E_i 上の Riemann-Roch の定理により, $\eta(\Phi(\mathcal{O}_{E_i}))$ は $L(\eta)|_{E_i}$ の次数と一致する. $\square$

系 4.4. $C(\theta)$ は Weyl chamber である.

Proof. $\{[\mathcal{O}_{E_i}]\} \subset K_0(\mathcal{M}_\theta)$ は $(\langle, \rangle$ について) ルート系の基底をなすが, Φ は双線形形式 $\langle, \rangle$ を保つので, $[\Phi(\mathcal{O}_{E_i})]$ もルート系の基底となる. よって上の系から $C(\theta)$ は Weyl chamber である. $\square$

とくに, $\mathcal{M}_\theta$ が G -Hilb と (モデュライ空間として) 一致するときを考えると,

系 4.5. G -Hilb($\mathbb{C}^2$) に対応する chamber C_0 は $\{\eta \in \Pi \mid \eta(\rho) > 0 (\rho \neq \rho_0)\}$ である.

Proof. C_0 は補題 2.2 により, 上の集合を含む Weyl chamber なので上の集合そのものである. $\square$

5 伊藤-中村の定理

前節の考察と, 伊藤-中村の定理の関係を説明する. G -Hilb というのは, モデュライ空間のうち, tautological vector bundle $\mathcal{R}_\rho$ がすべて global section で生成される, ということによって特徴付けられる. G -Hilb に対応する chamber C_0 は,

$$\begin{aligned} C_0 &= \{\eta \in \Pi \mid \eta(\rho) > 0 (\rho \neq \rho_0)\} \\ &= \{\eta \in \Pi \mid \eta(\Phi(\mathcal{O}_{E_i})) > 0\} \end{aligned}$$

であった. これらの不等式はそれぞれ wall を定めるから, 非自明な既約表現に $\rho_1, \dots, \rho_r$ と適当に番号を付けると,

$$\eta(\rho_i) = \eta(\Phi(\mathcal{O}_{E_i})) \quad \forall \eta \in \Pi$$

となる. Π の定義により, $\rho_i \otimes \mathcal{O}_o$ と $\Phi(\mathcal{O}_{E_i})$ は $K_o^G(\mathbb{C}^2)/\mathbb{Z}[R \otimes \mathcal{O}_o]$ の中で一致する. ここで $[\Phi(\mathcal{O}_{E_i}(-1))] = [\Phi(\mathcal{O}_{E_i})] - [\Phi(\text{point})]$ もまた同じクラスを定めるが, $\mathcal{R}_\rho$ が global section で生成されることから $\Phi(\mathcal{O}_{E_i}(-1)) = \mathbb{R}\Gamma(\mathcal{R} \otimes \mathcal{O}_{E_i}(-1))$ は sheaf であり, さらに $\mathcal{R}_{\rho_0}$ が自明な直線束であることから G の表現としては ρ_0 を含まない. 従って $K_o^G(\mathbb{C}^2)$ の中で $[\Phi(\mathcal{O}_{E_i}(-1))] = [\rho_i \otimes \mathcal{O}_o]$ であり, $\Phi(\mathcal{O}_{E_i}(-1))$ は sheaf であるから,

$$\Phi(\mathcal{O}_{E_i}(-1)) \cong \rho_i \otimes \mathcal{O}_o$$

である. すなわち, 第1節で予告したように対応している. なお, [KV] や [I] とは Φ や Ψ の定義が違う ($\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}^\vee[n]$ が入れ替わっている) ので, この表示も少しずれている.

上のことと Φ が圏同値であることから, $y \in \mathcal{M} = G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^2)$ をとると,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{M}}}(\mathcal{O}_{E_i}(-1), \mathcal{O}_y) &\cong G\text{-}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}(\mathcal{O}_o \otimes \rho_i, \Phi(\mathcal{O}_y)) \\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathcal{M}}}^1(\mathcal{O}_y, \mathcal{O}_{E_i}(-1)) &\cong G\text{-}\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}^1(\Phi(\mathcal{O}_y), \mathcal{O}_o \otimes \rho_i).\end{aligned}$$

左辺はいずれも $y \in E_i$ のとき 1 次元, それ以外の時 0 であり, $\Phi(\mathcal{O}_y)$ は $y \in \mathcal{M}$ に対応する G -cluster Z_y の構造層である. 従って, 次の二つが得られた.

定理 5.1 (中島の Hecke 対応の例 [N1] Theorem 5.10; [N2] Exapmle 6.3). 次は同値.

$$\begin{aligned}y \in E_i &\iff \mathcal{O}_{Z_y} \text{ の socle が } \rho_i \text{ を含む} \\ &\iff \mathcal{O}_{Z_y} \text{ の socle が } \rho_i \text{ を一つだけ含む}\end{aligned}$$

定理 5.2 (伊藤-中村 [INm2]). 次は同値.

$$\begin{aligned}y \in E_i &\iff 0 \rightarrow \mathcal{O}_o \otimes \rho_i \rightarrow \mathcal{O}_{Z'} \rightarrow \mathcal{O}_{Z_y} \rightarrow 0 \text{ の形の拡大が存在} \\ &\iff I_y/mI_y \text{ が } \rho_i \text{ を含む} \\ &\iff I_y/mI_y \text{ が } \rho_i \text{ を一つだけ含む}\end{aligned}$$

注 5.3 (中島 [N2]). $\langle [\mathcal{O}_o \otimes \rho_i], [\Phi(\mathcal{O}_y)] \rangle = \langle [\mathcal{O}_o \otimes \rho_i], [R \otimes \mathcal{O}_o] \rangle = 0$ などから, $\dim G\text{-}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}(\mathcal{O}_o \otimes \rho_i, \Phi(\mathcal{O}_y)) = \dim G\text{-}\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}^1(\Phi(\mathcal{O}_y), \mathcal{O}_o \otimes \rho_i)$ となるので, 上の二つの定理は同値である.

Φ が圏同値であることを使って C_0 の wall を決定し, さらに定理 5.1 および定理 5.2 を導いた. 逆に定理 5.1 があれば C_0 は簡単に求められることに注意しておく. すなわち, 自明でない既約表現 ρ は必ず socle にあらわれるので, $\eta \in C_0$ について $\eta(\rho) > 0$ を満たす.

6 $G \subset \mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ の場合

この節では, A. Craw (Utah 大学) と現在行っている共同研究について触れる. $G \subset \mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ の場合を考える. この場合は $\mathbb{C}^3/G$ の crepant resolution はいろいろあり, $\mathcal{M}_\theta$ も実際変化する. そのような様子について調べ, 特に任意の射影的 crepant resolution は $\mathcal{M}_\theta$ として得られるか, ということを問題にする.

2次元の時と違ってはや(補題 4.1 や) 命題 4.2 のようなことは成り立たない。 Π の次元の方が Picard 群のランクよりも一般には高くなること(そして, $C(\theta)$ は狭義凸であること)を思えば, これは必然である。 η に $L(\eta)$ を対応させる写像が, $C(\theta)$ から $\mathcal{M}_\theta$ の ample cone への全射であることを期待して, 現在研究中である。(もしそうであれば, すべてのフロップが wall crossing により得られる.)

$C(\theta)$ を系 4.3 と同様の形に書くことができる:

定理 6.1. $G \subset \mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ をアーベル群とし, $\theta \in \Pi$ を θ -stability と θ -semi-stability とが一致するものとする. このとき, $\mathcal{M}_\theta$ 上コンパクトな divisor と既約表現の組 $(D_1, \sigma_1), \dots, (D_s, \sigma_s)$ および $(E_1, \tau_1), \dots, (E_t, \tau_t)$ があって, $C(\theta)$ は $\eta \in \Pi$ についての, 次のような形の不等式で定義される.

1. 任意の例外直線 C について, $\eta(\Phi(\mathcal{O}_C)) > 0$
2. $i = 1, \dots, s$ について, $\eta(\Phi(\mathcal{R}_{\sigma_i}^*|_{D_i})) > 0$
3. $i = 1, \dots, t$ について, $\eta(\Phi(\mathcal{R}_{\tau_i}^* \otimes \omega_{E_i})) < 0$

1 は 2次元の時と同様, $L(\eta)$ が ample であるための条件であり, C は端射線を定めるものに限って良い. 2 も 3 も Φ が sheaf (のシフト) 同士の対応を与える場合ばかりである. その意味では, このような wall を調べることは, 伊藤-中村の定理の高次元化とみることができる. 実際, G -Hilb の場合には, 上の不等式は Craw による explicit な McKay 対応 [C] と関係がある. なお, アーベル群に限っているのは, 城崎で喋った "G-igsaw puzzle" によるモデュライの記述を用いるためである.

References

- [BKR] Bridgeland, T., King, A. and Reid, M.: The McKay correspondence as an equivalence of derived categories, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), no. 3, 535-554
- [CS] Cassens, H. and Slodowy, P.: On Kleinian singularities and quivers, in Singularities (Oberwolfach, 1996), Progr. Math. **162**(1998), 263-288
- [C] Craw, A.: An explicite construction of the McKay correspondence for A -Hilb $\mathbb{C}^3$, preprint alg-geom/0010053
- [I] Ishii, A.: On the McKay correspondence for a finite small subgroup of $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, J. Reine. Angew. Math. (to appear)

- [INj] Ito, Y. and Nakajima, H.: McKay correspondence and Hilbert schemes in dimension three, *Topology* **39**(2000), 1155-1191
- [INm1] Ito, Y. and Nakamura, I.: McKay correspondence and Hilbert schemes, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **72** (1996), no. 7, 135-138
- [INm2] Ito, Y. and Nakamura, I.: Hilbert schemes and simple singularities, *New Trends in Algebraic Geometry*, (Proc. Warwick, 1996, K. Hulek et al., eds), Cambridge University Press (1999), 151-233
- [KV] Kapranov, M. and Vasserot, E.: Kleinian singularities, derived categories and Hall algebras, *Math. Ann.* **316** (2000), no. 3, 565-576
- [Ki] King, A.: Moduli of representations of finite dimensional algebras, *Quart. J. Math. Oxford* **45**(1994), 515-530
- [Kr] Kronheimer, P.: The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients, *J. Diff. Geom.* **29**(1989), 665-683
- [M] McKay, J.: Graphs, singularities and finite groups, *Proc. Symp. Pure Math.*, **37**, Amer. Math. Soc. (1980), 183-186.
- [N1] Nakajima, H.: Varieties associated with quivers, in *Representation theory of algebras and related topics*, CMS conference proceedings **19**, AMS (1996), 139-157
- [N2] Nakajima, H.: Quiver varieties and McKay correspondence –Lectures at Hokkaido University, 2001 Dec.–, 「開カラビ・ヤウ多様体をめぐって」報告集
- [S] Sardo-Infirri, A.: Resolutions of orbifold singularities and the transposition problem on the McKay quiver, preprint *alg-geom/-9610005*
- [T] Thaddeus, M.: Geometric invariant theory and flips, *J. Amer. Math. Soc.* **9**(1996), 691-723

京都大学工学研究科土木システム工学専攻

email: akira@kusm.kyoto-u.ac.jp