

$\bar{\partial}$ -Neumann 問題の解の大域的実解析性

東北大 理 大学院 小松 玄

§ 0. 序

本稿の目的は、いわゆる $\bar{\partial}$ -Neumann 問題の解の、境界の近傍での大域的実解析性について論ずることである。

この問題の C^∞ 級の準楕円性は Kohn [3] によって初め示されたが、現在最も標準的と思われる証明は、Kohn-Nirenberg [4] によって与えられたものである。それは *subelliptic estimate* を *a priori* 評価式とするものであるが、その方法で解の実解析性を示すことは困難と思われる。

ここでは、境界の近傍で定義されたある特別な vector 場を用いて、解のその方向の *derivatives* をまず評価することによって解の実解析性を導く。その vector 場は、Levi form が非退化ならば構成でき、commutators の評価を可能にする。

L. Nirenberg 教授によれば、最近 Demidji と Tautakoff が同様の結果を得たとのことである ([7] の序文)。

§ 1. 結果

M は $\mathbb{C}^n$ 内の領域で, compact な閉包 $\bar{M}$ と実解析的な境界 bM を持つものとする. r は bM からの距離関数で, M の内部に負, 外部に正として測ったものとする. Ω'_ρ は bM の $\mathbb{C}^n$ における十分小さい幅 ρ の管状近傍とし, $\Omega_\rho = \Omega'_\rho \cap \bar{M}$ とおく. Ω'_ρ 上の tangent bundle の複素化を $\mathbb{C}T$ とし, その subbundle T_t を

$$T_t = \{X \in \mathbb{C}T; \langle dr, X \rangle = 0\}$$

により定義する. ここで $\langle, \rangle$ は covectors と vectors の間の duality である. さらに $T^{1,0}$ 及び $T^{0,1}$ とそれぞれ $(1,0)$ 及び $(0,1)$ 型の vectors から成る $\mathbb{C}T$ の subbundle とし,

$$T_t^{1,0} = T^{1,0} \cap T_t, \quad T_t^{0,1} = T^{0,1} \cap T_t$$

とおく. この時, 点 $P \in \Omega'_\rho$ における Levi form が, $T_t^{1,0}$ の点 P における fibre $(T_t^{1,0})_P$ 上の Hermite 形式として,

$$(T_t^{1,0})_P \times (T_t^{1,0})_P \ni (X_1, X_2) \mapsto \langle \partial \bar{\partial} r, X_1 \wedge \bar{X}_2 \rangle$$

によって定義される. ここで $\bar{X}_2$ は X_2 の複素共役である.

$Q^{p,q}$ を $\bar{M}$ 上の (p,q) -forms で $\mathbb{C}^n$ への C^∞ 拡張を持つものの空間とし, $Q^{p,q}$ の元に対する L^2 -内積を次の様に定義する:

$$(\varphi, \psi) = \int_M \langle \varphi, \psi \rangle dV, \quad \varphi, \psi \in Q^{p,q}.$$

ここで $\langle, \rangle$ は $\mathbb{C}^n$ の標準的な Hermite 計量による pointwise な内積で, dV は M 上の体積要素である. さて Cauchy-Riemann 作用素 $\bar{\partial}: Q^{p,q-1} \rightarrow Q^{p,q}$ とその formal adjoint $\partial: Q^{p,q} \rightarrow Q^{p,q-1}$

に対して, 部分積分により次の等式を得る:

$$(\partial\varphi, \psi) = (\varphi, \bar{\partial}\psi) + \int_{bM} \langle \sigma(\partial, dr) \varphi, \psi \rangle dS.$$

ここで $\sigma(\cdot, dr)$ は作用素 $\cdot$ の dr における主 symbol で, dS は bM 上の体積要素である. これと考えに入れて,

$$\mathcal{D}^{p,q} = \{ \varphi \in \mathcal{Q}^{p,q}; \sigma(\partial, dr) \varphi = 0 \text{ on } bM \}$$

とおき, $\mathcal{D}^{p,q}$ 上の二次形式を, $\varphi, \psi \in \mathcal{D}^{p,q}$ に対して,

$$Q(\varphi, \psi) = (\bar{\partial}\varphi, \bar{\partial}\psi) + (\partial\varphi, \partial\psi) + (\varphi, \psi)$$

によって定義する.

次の変分問題の解の, 実解析的な regularity を考えよう.

問題 ([1, 3, 4]). $\delta > 0$ とし, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathcal{Q}^{p,q}$ が与えられたとき, 次の方程式 (1) を満たす $\varphi \in \mathcal{D}^{p,q}$ を求めよ:

$$(1) \quad Q(\varphi, \psi) + (\lambda \varphi, \psi) = (\alpha, \psi) \quad \text{for } \forall \psi \in \mathcal{D}^{p,q}.$$

我々の定理は次の通りである.

定理. Ω'_p 上で Levi form は非退化であり, その負の固有値の個数は δ 個ではないとする. この時, 方程式 (1) の任意の解 $\varphi \in \mathcal{D}^{p,q}$ は, α が Ω_p で実解析的ならば, やはりそこで実解析的である.

(注意1). この定理は, 実解析的な Hermitian 計量を持つ複素多様体内の領域 M の場合に容易に拡張される.

(注意2). この定理における Levi form に関する条件は,

(I) Ω_p の各点で, Levi form は非退化であり,

(II) そこで正の固有値と $n-g$ 個以上持つか, 又は負の固有値と $g+1$ 個以上持つ

ことと同値である. 条件 (II) は我々の *a priori* 評価式 (補題1) の成立を保証し, 条件 (I) は補題2における vector 場の構成と可能にする.

§2. *a priori* 評価式

$\mathcal{Q}_p^{p,q}$ を Ω_p 内に support を持つ $\mathcal{Q}^{p,q}$ の元の空間とし, $\mathcal{D}_p^{p,q} = \mathcal{Q}_p^{p,q} \cap \mathcal{Q}_p^{p,q}$ とおく. さて $\bar{\pi} = \sigma(-\bar{\partial}\partial, dr)$ とすると, $\bar{\pi}: \mathcal{Q}_p^{p,q} \rightarrow \mathcal{Q}_p^{p,q}$ は内積 $\langle, \rangle$ に関する直交射影である. $\Gamma(\cdot)$ を vector bundle $\cdot$ の Ω_p 上の sections の空間とし, $\nabla_X: \mathcal{Q}_p^{p,q} \rightarrow \mathcal{Q}_p^{p,q}$ を vector 場 $X \in \Gamma(\mathcal{L}T)$ に沿う (複素) 共変微分とする. さて, $\tilde{\nabla}_X: \mathcal{Q}_p^{p,q} \rightarrow \mathcal{Q}_p^{p,q}$ を bundle 的に次の様に定義する:

$$\tilde{\nabla}_X = \bar{\pi} \nabla_X \bar{\pi} + (1 - \bar{\pi}) \nabla_X (1 - \bar{\pi}), \quad X \in \Gamma(\mathcal{L}T).$$

この時, $X \in \Gamma(T_+)$ に対して $\tilde{\nabla}_X$ は $\mathcal{D}_p^{p,q}$ をそれ自身にうつす.

$R \in \Gamma(T'^0)$ を ∂r の dual とし, T'^0 の局所正規直交基底

$L_1, \dots, L_n = R$ を使, て, $\psi \in \mathcal{D}_P^{p,8}$ に対して

$$N(\psi) = \left(\int_M \left(\sum_{i=1}^n |\tilde{\nabla}_{L_i} \psi|^2 + \sum_{i=1}^{n-1} |\tilde{\nabla}_{L_i} \psi|^2 + |\psi|^2 \right) dV \right)^{\frac{1}{2}}$$

とおく (ここで $|\psi|^2 = \langle \psi, \psi \rangle$). この時 $N(\psi)$ は基底 (L_i) の取り方によらずに $\psi \in \mathcal{D}_P^{p,8}$ に対して well-defined である.

さて, $\mathcal{D}^{p,8}$ 上で basic estimate が成立するとは,

$$(2) \exists C > 0 \text{ s.t. } \int_{bM} |\psi|^2 dS \leq C Q(\psi, \psi) \quad \text{for } \forall \psi \in \mathcal{D}^{p,8}$$

をいう. §1 の注意 2 における条件 (ロ) は (2) と同値である

([2]) から, 我々の仮定のもとで (2) は成立する. さて,

補題 1 (a priori 評価式). $\mathcal{D}^{p,8}$ において basic estimate が成立しているとする, ある $C > 0$ が存在して,

$$\frac{1}{C} N(\psi)^2 \leq Q(\psi, \psi) \leq C N(\psi)^2 \quad \text{for } \forall \psi \in \mathcal{D}_P^{p,8}.$$

§3. ある特別な vector 場

我々の定理の証明は, いわゆる “commutators の評価” に基くが, 次の補題における vector 場 Y は, そこでの評価において本質的役割を果たす.

補題 2. Ω'_P において Levi form が非退化とする. この時, もし P が十分小さければ, 次の性質を持つ実解析的な vector 場 $Y \in \Gamma(T_t)$, $\bar{Y} = -Y$ が存在する:

$$(3) \langle \partial r, [X, Y] \rangle = 0 \text{ in } \Omega'_P \quad \text{for } \forall X \in \Gamma(T_t^{1,0} \oplus T_t^{0,1}),$$

$$(4) \langle \partial r, [\bar{R}, Y] \rangle = 0 \text{ on } bM, \quad \langle \partial r, Y \rangle = 1 \text{ on } bM.$$

ここで, $[X_1, X_2] = X_1 X_2 - X_2 X_1$ とする.

(証明) $T^{1,0}$ の局所正規直交基底 $L_1, \dots, L_n = R$ を取り,

$(\lambda_{i\bar{j}})_{1 \leq i, j \leq n}$ 及び $(\lambda^{i\bar{j}})_{1 \leq i, j \leq n-1}$ を次の様に定義する:

$$\lambda_{i\bar{j}} = \langle \partial \bar{\partial} r, L_i \wedge \bar{L}_j \rangle, \quad \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{k\bar{j}} \lambda^{i\bar{j}} = \delta_k^i \quad (k < n).$$

さて求める vector 場 Y が局所的に, 函数 u, v^j, w^j により,

$$Y = u(R - \bar{R}) + \sum_{j=1}^{n-1} v^j L_j - \sum_{j=1}^{n-1} \bar{w}^j \bar{L}_j$$

と書かれたとすると, 条件 (3) は次の様に書き直される:

$$v^j = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^{j\bar{i}} (\bar{L}_i - \lambda_{n\bar{i}}) u, \quad \bar{w}^j = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^{i\bar{j}} (L_i - \lambda_{i\bar{n}}) u.$$

この式によ, て v^j, w^j を決めれば, 条件 (4) は, Ω'_P 全体で基底 (L_i) の取り方によらずに定義された一階微分作用素

$$P = \bar{R} - \lambda_{n\bar{n}} - \sum_{i,j=1}^{n-1} \lambda_{j\bar{n}} \lambda^{j\bar{i}} (\bar{L}_i - \lambda_{n\bar{i}})$$

によ, て次の様に書き表わされる:

$$(5) \quad Pu = 0 \quad \text{on } bM, \quad u = 1 \quad \text{on } bM.$$

従つて (5) の実数値の解 u で, Ω'_P において実解析的なものを求めればよいが, 作用素 $P - \bar{P}$ が一階の項のみから成り (従つて vector 場と見られ), $\langle dr, P - \bar{P} \rangle = 0$ であることに注意すれば, (5) は, 次の初期値問題に帰着される:

$$(6) \quad (P + \bar{P})u = 0 \quad \text{in } \Omega_P, \quad u = 1 \quad \text{on } bM.$$

作用素 $P + \bar{P}$ に関して初期曲面 bM は非特性的であり, $P + \bar{P}$ は実数値実解析的な係数を持つから, ρ が十分小さければ, Cauchy-Kowalewski の定理により, (6) は Ω'_P で実解析的な実数値解 u と持つ.

g. e. d.

§ 4. 定理の証明の概略

$T_t^{1,0} \oplus T_t^{0,1}$ を Ω'_P の各点で張るような実解析的な vector 場 $Z_1, \dots, Z_{2n} \in \Gamma(T_t^{1,0} \oplus T_t^{0,1})$ を取り, 順序のついた整数の組 $K = (k_1, \dots, k_\ell)$, $1 \leq k_i \leq 2n$ に対して, $|K| = \ell$, $\tilde{\nabla}_Z^K = \tilde{\nabla}_{Z_{k_1}} \cdots \tilde{\nabla}_{Z_{k_\ell}}$ と書き, $\psi \in \mathcal{D}_P^{p,q}$ に対して次の様におく:

$$N(\psi; \ell, m) = \frac{1}{(\ell + m)!} \max_{|K| = \ell} N(\tilde{\nabla}_Z^K \tilde{\nabla}_Y^m \psi).$$

さて, 方程式 (1) の解 φ が, 複素 Laplacian $\square = \bar{\partial}\partial + \partial\bar{\partial}$ に関する次の二階微分方程式を満たすことを思い出そう:

$$\square \varphi + (\lambda + 1) \varphi = \alpha.$$

作用素 $\square$ は実解析的係数を持ちかつ楕円型であるから、解 φ の Ω_P における実解析性は α のそれから従い、 φ の bM の近傍での実解析性は、Holmgren の定理より φ の bM 上での Cauchy data のそれから従うことは良く知られている ([6]).

そこで、 Ω_P に support を持つ r のみに依存する函数で、 bM の近傍で恒等的に 1 であるものとする。この時、 φ の Cauchy data の実解析性は、次の評価式と同値である：

$$(7) \quad N(\zeta \varphi; \ell, m) \leq C_0 C_1^\ell C_2^m \quad \text{for } \forall \ell \geq 0, \forall m \geq 0.$$

さて、 $\zeta \varphi$ がいわゆる $\bar{\partial}$ -Neumann 条件

$$\zeta \varphi \in \mathcal{D}^{p, q}, \quad \bar{\partial}(\zeta \varphi) \in \mathcal{D}^{p, q+1}$$

を満たすことより、 $D = \tilde{\nabla}_Z^k \tilde{\nabla}_Y^m$, $|K| = \ell$ に対して、

$$Q(\zeta \varphi, D^* D \zeta \varphi) + (\lambda \zeta \varphi, D^* D \zeta \varphi) = ((\square + \lambda + 1) \zeta \varphi, D^* D \zeta \varphi),$$

(ここで D^* は D の formal adjoint), が成立するから、補題 1 により、(7) の証明は norm N による

$$(8) \quad Q(D \zeta \varphi, D \zeta \varphi) - Q(\zeta \varphi, D^* D \zeta \varphi), \quad D = \tilde{\nabla}_Z^k \tilde{\nabla}_Y^m, \quad |K| = \ell,$$

の評価に帰着される。

(7) は二段階の帰納法によつて証明される。(7) はまず $\ell = 0$ の場合に、対応する (8) の評価を inductive に用いる

ことにより示される。 $\ell > 0$ の場合は、対応する (8) の評価と、 $\ell = 0$ の場合の結果と併用することにより、やはり inductive に証明される。

(8) の評価は、次に述べる $\bar{\partial}$ と ∂ に対する局所表示に注意すれば、補題 2 における vector 場 Y の性質と使、てなされる：
 $L_1, \dots, L_n = R$ を $T^{1,0}$ の局所正規直交基底とし、 $\omega^1, \dots, \omega^n$ をその dual basis とする時、 $\psi \in \mathcal{Q}_p^{p,q}$ に対して局所的に、

$$\bar{\partial}\psi = \sum_{i=1}^n \bar{\omega}^i \wedge \tilde{\nabla}_{\bar{L}_i} \psi + (\psi \text{ を微分しない項}),$$

$$\partial\psi = -\sum_{i=1}^n \bar{\omega}^i \vee \tilde{\nabla}_{L_i} \psi + (\psi \text{ を微分しない項})$$

と書かれる。ここで $\vee$ は、 $\langle \eta \vee \omega, \theta \rangle = \langle \omega, \eta \wedge \theta \rangle$ により定義される contraction operation である。

詳しくは [5] を見られたい。

文 献

- [1] G. B. Folland and J. J. Kohn, The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex, Ann. of Math. Studies, No. 75, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey (1972).
- [2] L. Hörmander, L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator, Acta Math., 113 (1965), 89-152.
- [3] J. J. Kohn, Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds. I, Ann. of Math., 78 (1963), 112-148; II, *ibid.*, 79 (1964), 450-472.
- [4] J. J. Kohn and L. Nirenberg, Non-coercive boundary value problems, Comm. Pure Appl. Math., 18 (1965), 443-492.
- [5] G. Komatsu, Global analytic-hypoellipticity of the $\bar{\partial}$ -Neumann problem, to appear in Tôhoku Math. J., 28, 1 (1976).
- [6] C. B. Morrey, Jr. and L. Nirenberg, On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 10 (1957), 271-290.
- [7] D. S. Tartakoff, On the real analyticity of solutions to $\square_b$ on compact manifolds, preprint.