

二規準非正方行列ゲームに対する利得関数の像形状による分類

Classification of graphical images of payoff functions for bicriteria non-square matrix games

埼玉大学大学院理工学研究科 樋口 政和 (MASAKAZU HIGUCHI)
Graduate School of Science and Engineering,
Saitama University

新潟工科大学教育センター 木村 健志 (KENJI KIMURA)
Education Center,
Niigata Institute of Technology

新潟大学大学院自然科学研究科 田中 環 (TAMAKI TANAKA)
Department of Mathematical Science,
Graduate School of Science and Technology,
Niigata University

概要: 複数の評価規準の下で行われる二人零和ゲームにおいて, その利得関数が行列の二次形式で表されるとき, 多規準行列ゲームという. 多規準行列ゲームの利得関数はベクトル値関数として与えられるが, ベクトル同士の順序関係を導入することで, この種のゲームにおいても古典ゲームと似た性質を有することが知られている. しかし, 一般にベクトル値関数の性質を把握することは困難であり, 多規準行列ゲームの解析の難しさはそこに起因する. そのため, 二つや三つの評価規準に限定してこのゲームに対するベクトル値利得関数の像を二次元や三次元の目的空間にプロットすることで像を視覚的に捉え, その性質を像形状から特徴付ける研究が行われている. それらのこれまでの研究では, 利得関数を構成する行列は正方行列に限定した研究のみであった. そこで, 本研究では二つの評価規準の下で非正方行列から構成されるベクトル値利得関数の像を考える. そして, 二次元の目的空間上でその像形状から利得関数の特徴付けを行う.

キーワード: ゲーム理論, 多規準行列ゲーム, ベクトル値関数, ミニマックス問題.

1 研究背景

多規準ゲームの研究において近年広く用いられているベクトル値版のミニマックス値・マックスミニ値および鞍点の概念は 1980 年代に考案された. それらの概念は, 1970 年代に提案されたベクトル最適化における支配解の考えに基づいている. そして, 今日に至るまで, この分野において多数の定義や理論が構築されてきた. ここで重要なことは, ベクトル同士の半順序を用いて古典ゲームにおける実数値利得関数のミニマックス値・マックスミニ値の概念をベクトル値に拡張した場合, 従来と同様の結果は得られない. つまり, 古典ゲームでの有用な結果がそのまま多基準ゲームへと拡張されるわけではないということである. 例えば, 古典ゲームにおいて代表的な単一規準の行列ゲームでは, ゲーム理論の発展に多大な貢献を果たしたミニマックス定理が成立しゲームが確定する [3]. 多規準行列ゲームでは, ベクトル同士の半順序を用いてベクトル値利得関数のミニマックス値およびマックスミニ値を定義した場合, それらが一致する保証はない (しかし, ある種のミニマックス不等式は成り立つ).

この分野におけるここ数年の研究では、多規準二人ゼロ和ゲームにおいて、ミニマックス定理に準ずるいくつかの定理が確立されている [1, 2, 4]. また、そのゲームについて、ミニマックス値およびマックスミニ値の一致性に関する研究も行なわれている [6]. ゲームの解析では、利得関数のミニマックス値およびマックスミニ値を解析することはゲームを解くための手掛かりとなり得る. 従って、多規準二人ゼロ和ゲームをその利得関数のミニマックス値およびマックスミニ値の観点から解析することは、この分野において重要な課題である.

単一規準行列ゲームでは、プレイヤー達の利得評価は実数空間で決定されるため、利得関数のミニマックス値およびマックスミニ値は容易に得ることができる. 多規準行列ゲームでは、利得の評価は多次元の目的空間で行なわれるため、ミニマックス値およびマックスミニ値を得るのは困難である. そこで、筆者らは多規準行列ゲームにおけるそれらの値を解析するための足掛かりとして、まずは具体的なゲーム設定の下でこの種のゲームの利得関数が目的空間上にどのようにマッピングされるかを調べた. まず、二次元の目的空間においてそのゲームの 2×2 行列の場合 (二規準 2×2 行列ゲーム) について、それらの行列を利得関数が持つ包絡線を手掛かりに複数のカテゴリで特徴付けた [5]. また、三次元の目的空間で 2×2 行列の場合 (三規準 2×2 行列ゲーム)、及び、二次元の目的空間で 3×3 交代行列の場合 (二規準 3×3 交代行列ゲーム) について、利得関数の像の端点の動きに着目した利得関数の像の形状分類も行われた [8, 9]. これらにより、ベクトル値利得関数の像を視覚的に把握することができ、視覚的観点からのミニマックス値およびマックスミニ値へのアプローチが可能となった.

一方において、線形ベクトル最適化問題とある種の多規準行列ゲームとの同値性、それを用いた解の最適性条件についての研究が行われた [7]. そこでの有用な結果は、やや複雑な条件が設定されているが、利得関数の像についての視覚的・図形的な観点から眺め直した場合、どのような表現・結果になるのかは興味深いところである.

筆者らのこれまでの研究では、利得関数を表現する行列は正方行列に限定してあった. 2×2 行列は、この研究の第一ステップとして最も適当であったため、研究対象として取り扱われた. 次の発展として、 3×3 行列が考えられたが、行列に制約が無いと非常に多くの像形状パターンが得られ分類が困難となるため、ある程度の対称性を考慮した 3×3 交代行列が対象となった. 更なる発展としては、制約なし 3×3 行列あるいは制約ありの 4 次以上の正方行列が考えられるが、前述の通りそれらは困難である. そこで、本稿では 2×2 と 3×3 の中間の複雑さを持つ 3×2 非正方行列で表現される利得関数について二つの評価基準の下でプレイされるゲーム (二規準 3×2 行列ゲーム) を考え、二次元の目的空間上でその利得関数の像形状からの特徴付けを行う.

2 多規準行列ゲーム

我々は、あるゲーム $\Gamma = (X, Y, -f, f)$ を考える. ここで、プレイヤー 1 と 2 の戦略集合 X と Y はそれぞれ p 次元空間、 q 次元空間の混合戦略の集合とする. すなわち、

$$X = \{x \in \mathbb{R}^p \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_p)^t, \sum_{i=1}^p x_i = 1, x_1, x_2, \dots, x_p \geq 0\} \quad (1)$$

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^q \mid y = (y_1, y_2, \dots, y_q)^t, \sum_{i=1}^q y_i = 1, y_1, y_2, \dots, y_q \geq 0\} \quad (2)$$

である. f はこのゲームの利得関数であり、 $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ とする. 各プレイヤーの利得については零和が成立しており、プレイヤー 1 の利得関数は $-f$ であるので、プレイヤー 1 は最小化プレイ

ヤーとなり、プレイヤー 2 は最大化プレイヤーとなる。ここで、 f として、行列の二次形式型の関数、

$$f(x, y) = x^t A y, \quad A \text{ は } p \times q \text{ の } n \text{ 次元ベクトル行列, すなわち,} \quad (3)$$

$$A := \begin{pmatrix} (a_{11_1}, \dots, a_{11_n})^t & (a_{12_1}, \dots, a_{12_n})^t & \cdots & (a_{1q_1}, \dots, a_{1q_n})^t \\ (a_{21_1}, \dots, a_{21_n})^t & (a_{22_1}, \dots, a_{22_n})^t & \cdots & (a_{2q_1}, \dots, a_{2q_n})^t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{p1_1}, \dots, a_{p1_n})^t & (a_{p2_1}, \dots, a_{p2_n})^t & \cdots & (a_{pq_1}, \dots, a_{pq_n})^t \end{pmatrix}, \quad (4)$$

を考える。このとき、 Γ を多規準行列ゲームと呼ぶ。

ここで、次のベクトル半順序を導入する。

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n, \quad z_1 \leq_C z_2 \iff z_2 - z_1 \in C. \quad (5)$$

C は $\text{int}C \neq \emptyset$ (solid) と $C \cap (-C) = \{\theta\}$ (pointed) を満たす $\mathbb{R}^n$ 上の凸錐である。

定義 2.1 (錐極小点, 錐極大点 [4]). $z_0 \in A \subset \mathbb{R}^n$ に対して, $\{z \in A \mid z \leq_C z_0, z \neq z_0\} = \emptyset$ が成り立つとき, z_0 を A の錐極小点と呼ぶ。 A のすべての錐極小点の集合を $\text{Min}A$ と表記する。同様に, $z_0 \in A \subset \mathbb{R}^n$ に対して, $\{z \in A \mid z_0 \leq_C z, z \neq z_0\} = \emptyset$ が成り立つとき, z_0 を A の錐極大点と呼ぶ。 A のすべての錐極大点の集合を $\text{Max}A$ と表記する。

錐極小点と錐極大点の概念を利用することにより、ベクトル値関数の鞍点、およびミニマックス値・マックスミニ値を実数値関数のそれらと同様に定義することができる。

定義 2.2 (錐鞍点 [1, 2]). $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ の定義域の点 $(x_0, y_0) \in X \times Y$ に対して, $f(x_0, y_0) \in \text{Max}f(x_0, Y) \cap \text{Min}f(X, y_0)$ が成り立つとき, (x_0, y_0) を f の錐鞍点と呼ぶ。 f のすべての錐鞍点の像を $\text{SV}(f)$ と表記する。ここで, $f(x_0, Y)$ は x_0 に対する Y の f の下での像である。すなわち, $f(x_0, Y) = \cup_{y \in Y} \{f(x_0, y)\} \subset \mathbb{R}^n$ である。同様に, $f(X, y_0)$ は y_0 に対する X の f の下での像である。すなわち, $f(X, y_0) = \cup_{x \in X} \{f(x, y_0)\} \subset \mathbb{R}^n$ である。

定義 2.3 (ミニマックス値集合, マックスミニ値集合 [1, 2]). $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\text{Min} \bigcup_{x \in X} \text{Max}f(x, Y) \subset \mathbb{R}^n \text{ と } \text{Max} \bigcup_{y \in Y} \text{Min}f(X, y) \subset \mathbb{R}^n$$

をそれぞれ f のミニマックス値集合, マックスミニ値集合と呼ぶ。

各プレイヤーがミニマックス原理に従って行動すると仮定すれば、単一基準行列ゲームと同様に多規準行列ゲームを解くことができる。プレイヤー 1 はプレイヤー 2 が選んだ戦略 y に対して $f(x_0, y) \in \text{Min}f(X, y)$ となるように最適反応戦略 $x_0 \in X$ を選択する。同様にプレイヤー 2 はプレイヤー 1 が選んだ戦略 x に対して $f(x, y_0) \in \text{Max}f(x, Y)$ となるように最適反応戦略 $y_0 \in Y$ を選択する。各プレイヤーの相手の戦略に対する最適反応戦略の集合をそれぞれ $R_1(y)$, $R_2(x)$ とし、

$$D_1 := \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in R_2(x), x \in X\}, \quad D_2 := \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in R_1(y), y \in Y\},$$

なる集合を考えれば、ミニマックス原理に従ってプレイヤー 1 はある $y' \in R_2(x^*)$ に対して $f(x^*, y') \in \text{Min}f(D_1)$ が成り立つような戦略 x^* を選び、プレイヤー 2 はある $x' \in R_1(y^*)$ に対して $f(x', y^*) \in$

$\text{Max}f(D_2)$ が成り立つような戦略 y^* を選ぶ. $f(x^*, y')$ と $f(x', y^*)$ はそれぞれミニマックス値集合とマックスミニ値集合の要素であるので, x^* と y^* をそれぞれプレイヤー 1 のミニマックス戦略とプレイヤー 2 のマックスミニ戦略と呼ぶ. 多規準行列ゲームでは, x' はミニマックス戦略とは限らず, y' もまたマックスミニ戦略とは限らない. また, プレイヤー 1 がミニマックス戦略を選んだとしても, プレイヤー 2 の選択によってはプレイヤー 1 はミニマックス値を実現できないときがある. 同様に, プレイヤー 2 がマックスミニ戦略を選んだとしても, プレイヤー 1 の選択によってはプレイヤー 2 はマックスミニ値を実現できないときがある. しかしながら, 上記のように選ばれた戦略の組は必ずしもミニマックス値あるいはマックスミニ値を実現するとは限らないが鞍点にはなっているので, 各プレイヤーは納得してゲームは確定する. 従って, ベクトル値関数の鞍点は多規準行列ゲームの筋の通った解概念となっている.

3 二次形式型ベクトル値利得関数とその像形状による分類

前節では多規準行列ゲームの概観について述べた. 本節では $p = 3, q = 2, n = 2$ の場合に対する多規準行列ゲームの利得関数について考察し, 具体的な例を通じてこの利得関数の像形状に対する分類を与える. これにより, このゲームの利得関数の像を視覚的に把握することができ, 視覚的観点からのミニマックス値集合・マックスミニ値集合へのアプローチが可能となり, 多規準行列ゲームを解く上での指針を与えることができる. ここで,

$$f(x, y) = x^t A y, \quad A = \begin{pmatrix} (a_{11_1}, a_{11_2})^t & (a_{12_1}, a_{12_2})^t \\ (a_{21_1}, a_{21_2})^t & (a_{22_1}, a_{22_2})^t \\ (a_{31_1}, a_{31_2})^t & (a_{32_1}, a_{32_2})^t \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \\ P_5 & P_6 \end{pmatrix} \quad (6)$$

と表すことにする. X と Y は混合戦略の集合なので, 利得関数の像は $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ の 6 点を端点とする図形となる.

x を X の端点 $(1, 0, 0)^t$ に固定させたとき, Y の端点 $(1, 0)^t, (0, 1)^t$ に対する利得点はそれぞれ P_1, P_2 となる. よって, y が Y の中で網羅的に変化すると, 目的空間上に P_1 と P_2 を結ぶ線分が形成される. 同様に, x を X の端点 $(0, 1, 0)^t$ に固定させ, y を Y の中で網羅的に変化させると, 目的空間上に線分 $P_3 P_4$ が形成される. x を X の端点 $(0, 0, 1)^t$ に固定させたときは, 線分 $P_5 P_6$ が形成される. x を X の中で網羅的に変化させると, Y の二端点に対応する点はそれぞれ三角形 $P_1 P_3 P_5, P_2 P_4 P_6$ の中を網羅的に変化するので, 線分群が形成されることになる.

一方, y を Y の端点 $(1, 0)^t$ に固定させたとき, X の端点 $(1, 0, 0)^t, (0, 1, 0)^t, (0, 0, 1)^t$ に対する利得点はそれぞれ P_1, P_3, P_5 となる. よって, x が X の中で網羅的に変化すると, 目的空間上に三角形 $P_1 P_3 P_5$ が形成される. 同様に, y を Y の端点 $(0, 1)^t$ に固定させ, x を X の中で網羅的に変化させると, 目的空間上に三角形 $P_2 P_4 P_6$ が形成される. y を Y の中で網羅的に変化させると, x の三端点に対応する点はそれぞれ線分 $P_1 P_2, P_3 P_4, P_5 P_6$ の中を網羅的に変化するので, 三角形群が形成されることになる (図 1 参照). [8] により, 端点 P_1, P_2, P_3, P_4 はその位置関係から一点, 線分, 三角形, 四角形, バタフライ, 輪郭に包絡線分を含む図形を形成することが分かる. 端点 P_3, P_4, P_5, P_6 と端点 P_5, P_6, P_1, P_2 についても同様である. これらの図形の組み合わせにより, 利得関数の像は様々な形状となる.

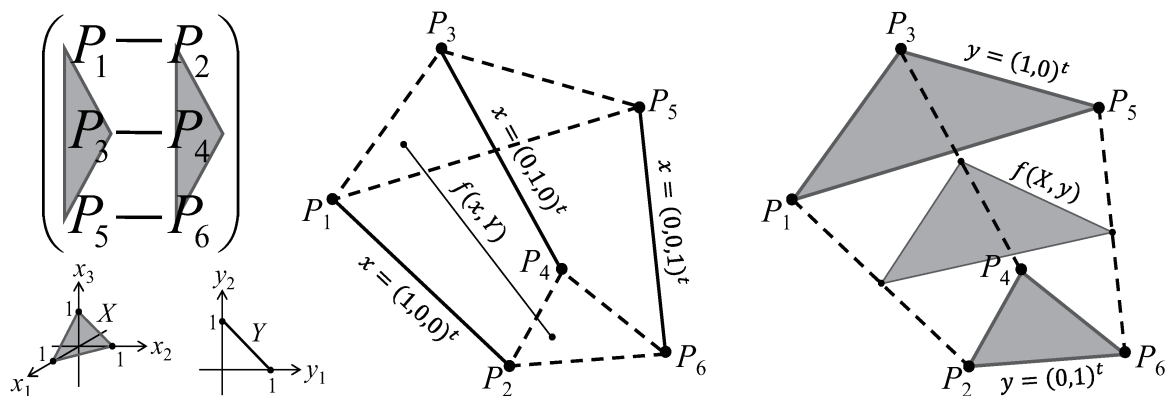


図 1: パラメータ変化による利得点の動き

3.1 一点型

利得関数の端点がすべて同じ点のとき, 明らかにその像形状は一点となる.

3.2 線分型

利得関数の端点がすべて同一直線上にあるとき, その像形状は線分となる.

3.3 三角形型

利得関数の像形状が三角形になる場合の一例を図 2 に示す. 図 2 の左は X の三端点に対する $f(x, Y)$, すなわち線分 P_1P_2 , P_3P_4 , P_5P_6 と Y の二端点に対する $f(X, y)$, すなわち三角形 $P_1P_3P_5$, $P_2P_4P_6$ のみを描いた図であり, 右は x と y をそれぞれ X と Y の中で網羅的に変化させて $f(x, Y)$ と $f(X, y)$ を描いた図である. 以降の図に対しても同様である. この例では, 端点 P_1 , P_2 , P_3 , P_4 と端点 P_5 , P_6 , P_1 , P_2 はともに三角形を形成する. 端点 P_3 , P_4 , P_5 , P_6 は包絡線分を持ったバタフライを形成する. 包絡線分は線分 P_3P_5 と P_4P_6 の間に形成されるが, それは三角形 $P_1P_5P_6$ の内部に含まれる.

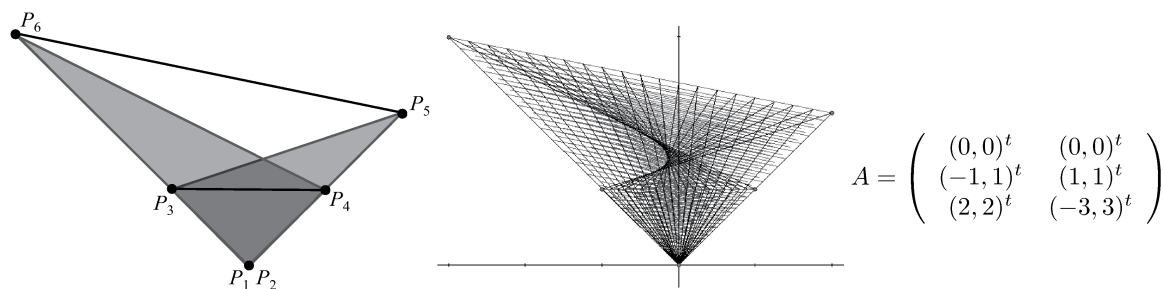


図 2: 三角形型の利得関数の像

3.4 四角形型

利得関数の像形状が四角形になる場合の一例を図 3 に示す。利得関数の端点の位置によっては凹四角形になる場合もある。この例では、端点 P_1, P_2, P_3, P_4 と端点 P_3, P_4, P_5, P_6 と端点 P_5, P_6, P_1, P_2 はすべて四角形を形成する。

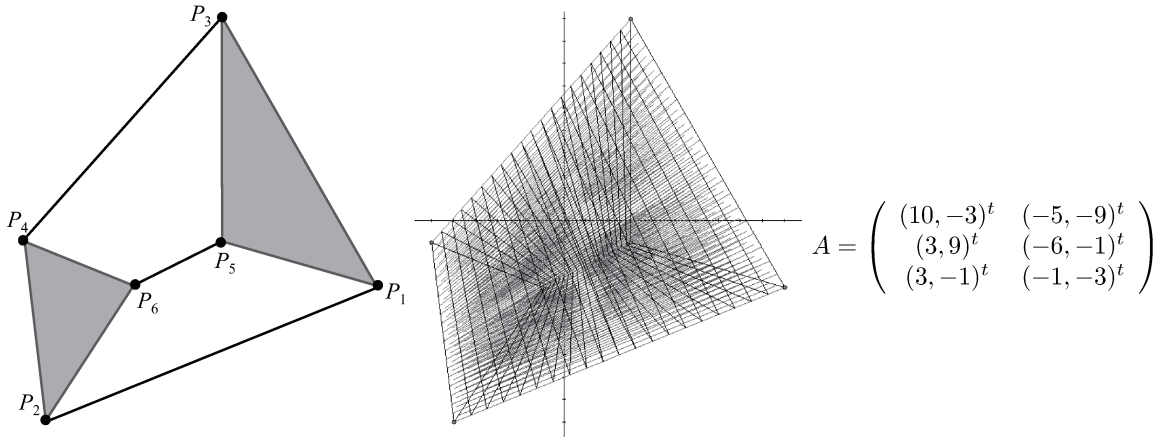


図 3: 四角形型の利得関数の像

3.5 五角形型

利得関数の像形状が五角形になる場合の一例を図 4 に示す。利得関数の端点の位置によっては凸五角形になる場合もある。この例では、端点 P_1, P_2, P_3, P_4 は一辺の一部が包絡線分となっている三角形、端点 P_3, P_4, P_5, P_6 は四角形、端点 P_5, P_6, P_1, P_2 は包絡線分を持ったバタフライを形成する。包絡線分はそれぞれ線分 P_2P_4 と P_3P_4, P_1P_5 と P_2P_6 の間に形成されるが、ともに四角形 $P_3P_4P_6P_5$ の内部に含まれる。

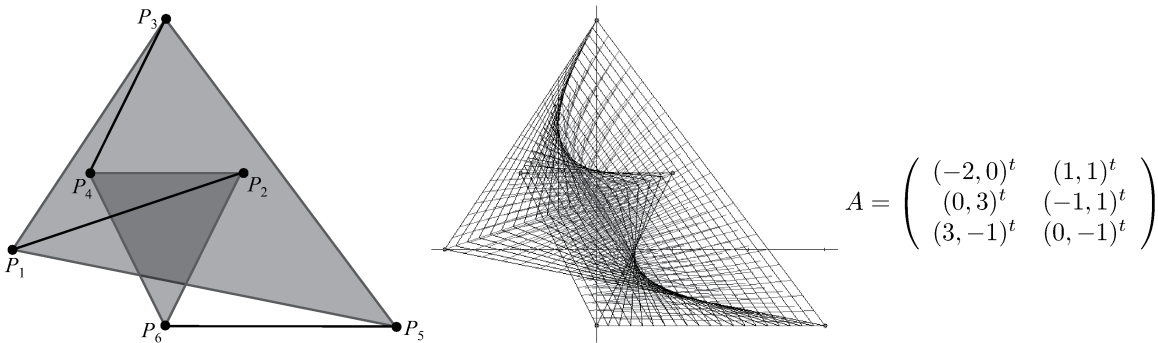


図 4: 五角形型の利得関数の像

3.6 六角形型

利得関数の像形状が六角形になる場合の一例を図 5 に示す。利得関数の端点の位置によっては凹六角形になる場合もある。この例では、端点 P_1, P_2, P_3, P_4 と端点 P_3, P_4, P_5, P_6 と端点

P_5, P_6, P_1, P_2 はすべて四角形を形成する.

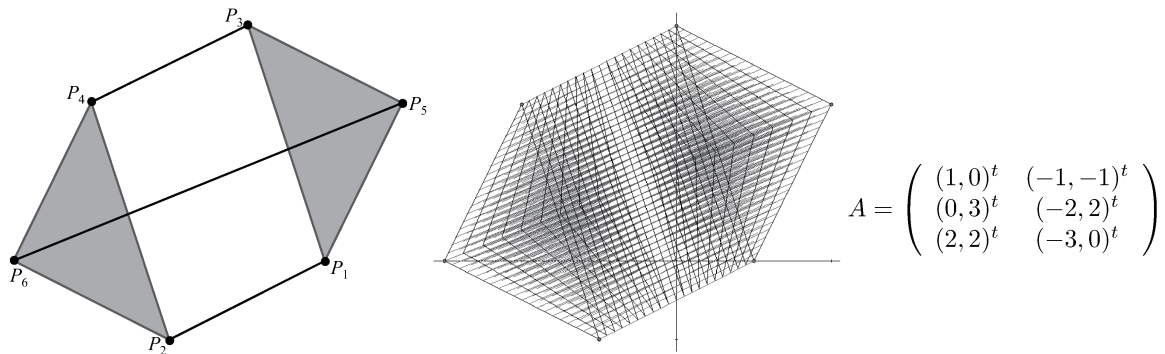


図 5: 六角形型の利得関数の像

3.7 七角形型

利得関数の像形状が七角形になる場合の一例を図 6 に示す. 七角形型には凸形は現れない. この例では, 端点 P_1, P_2, P_3, P_4 と端点 P_3, P_4, P_5, P_6 はともに四角形, 端点 P_5, P_6, P_1, P_2 は包絡線分を持ったバタフライを形成する. 包絡線分は線分 P_1P_2 と P_5P_6 の間に形成されるが, それは五角形 $P_1P_3P_4P_6P_5$ あるいは $P_1P_3P_4P_6P_2$ の内部に含まれる.

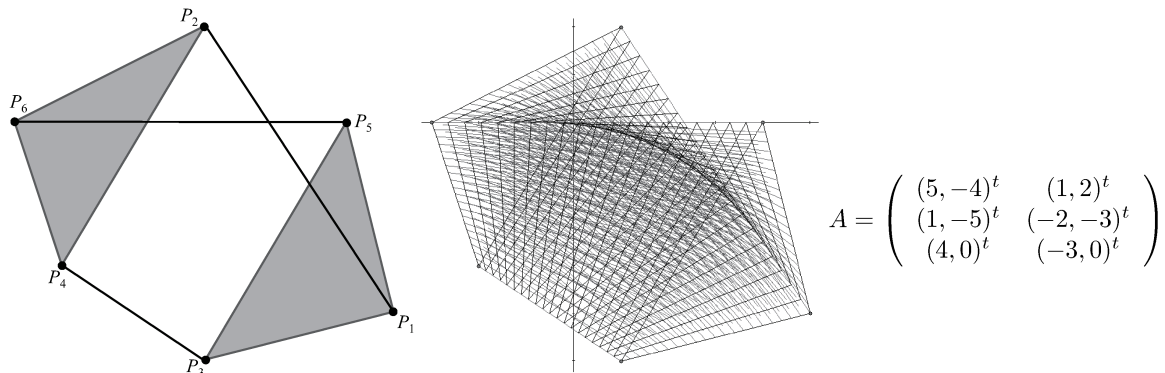


図 6: 七角形型の利得関数の像

3.8 八角形型

利得関数の像形状が八角形になる場合の一例を図 7 に示す. 八角形型には凸形は現れない. この例では, 端点 P_1, P_2, P_3, P_4 は一辺の一部が包絡線分となっている三角形, 端点 P_3, P_4, P_5, P_6 と端点 P_5, P_6, P_1, P_2 はともに包絡線分を持ったバタフライを形成する. 包絡線分はそれぞれ線分 P_1P_2 と P_2P_4 の間, 線分 P_3P_5 と P_4P_6 の間, 線分 P_1P_2 と P_5P_6 の間に形成される. 前者の二線分は三角形 $P_1P_3P_5$ と $P_2P_4P_6$ の合併図形の内部に含まれ, 後者の一線分は三角形 $P_1P_3P_5$ の内部に含まれる.

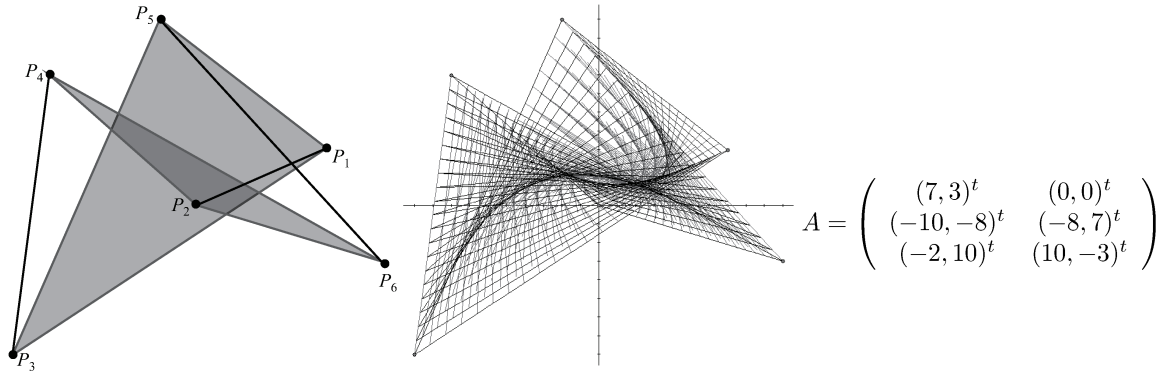


図 7: 八角形型の利得関数の像

3.9 九角形型

利得関数の像形状が九角形になる場合の一例を図 8 に示す. 九角形型には凸形は現れない. この例では, 端点 P_1, P_2, P_3, P_4 と端点 P_3, P_4, P_5, P_6 と端点 P_5, P_6, P_1, P_2 はすべて包絡線分を持ったバタフライを形成する. 包絡線分はそれぞれ線分 P_1P_3 と P_2P_4 の間, 線分 P_3P_4 と P_5P_6 の間, 線分 P_1P_5 と P_2P_6 の間に形成される. 最初と最後の包絡線分は三角形 $P_1P_3P_5$ と $P_2P_4P_6$ の合併図形の内部に含まれる. 線分 P_1P_5 と P_2P_6 の交点を Q とすると, 残りの一線分は五角形 $P_2P_4P_6P_5Q$ あるいは $P_2P_4P_3P_5Q$ の内部に含まれる.

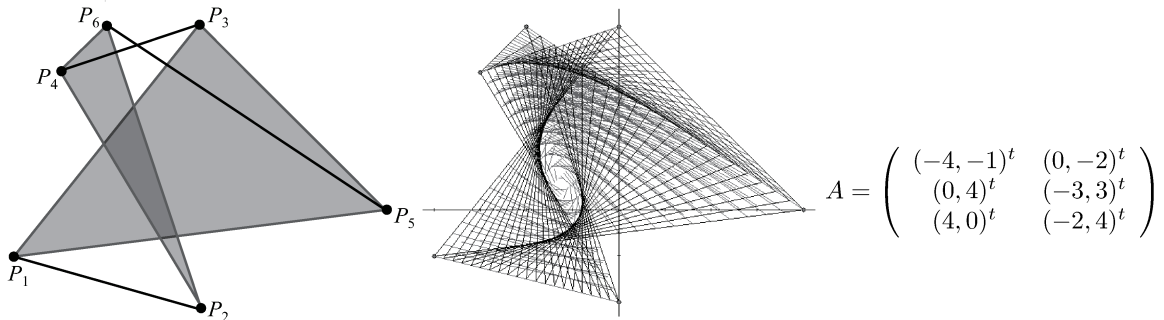


図 8: 九角形型の利得関数の像

3.10 十角形型

利得関数の像形状が十角形になる場合の一例を図 9 に示す. 十角形型には凸形は現れない. この例では, 端点 P_1, P_2, P_3, P_4 と端点 P_3, P_4, P_5, P_6 はともにバタフライ, 端点 P_5, P_6, P_1, P_2 は四角形を形成する.

3.11 十一角形型

利得関数の像形状が十一角形になる場合の一例を図 10 に示す. 十一角形型には凸形は現れない. この例では, 端点 P_1, P_2, P_3, P_4 と端点 P_3, P_4, P_5, P_6 と端点 P_5, P_6, P_1, P_2 はすべて包絡線分

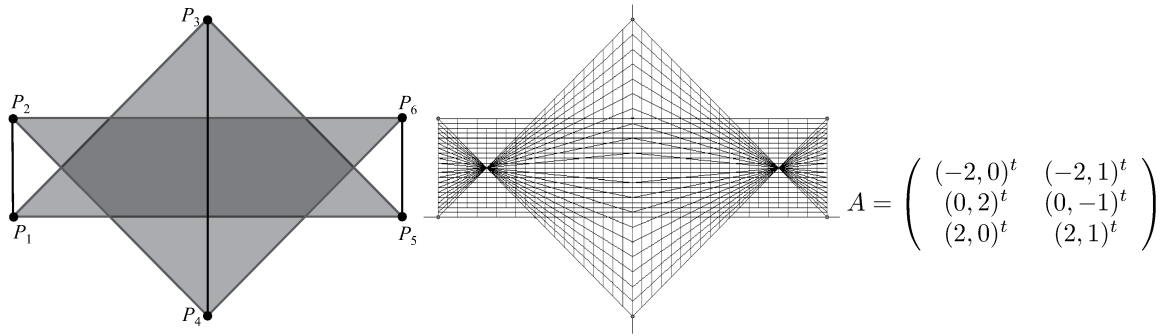


図 9: 十角形型の利得関数の像

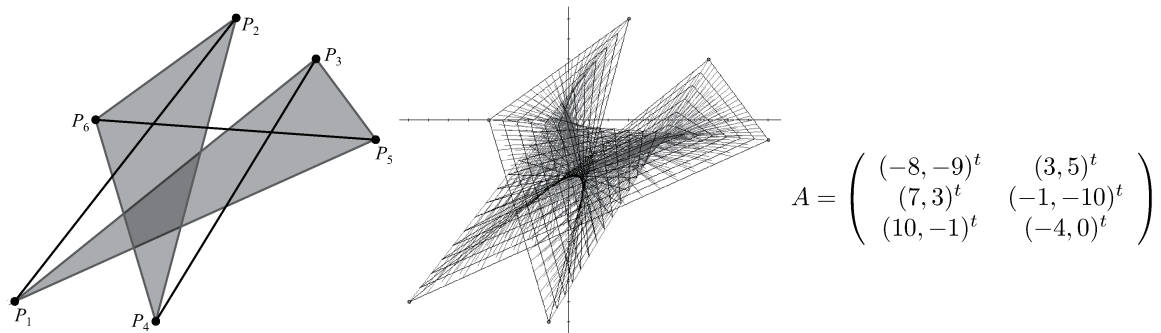


図 10: 十一角形型の利得関数の像

を持ったバタフライを形成する。包絡線分はそれぞれ線分 P_1P_3 と P_2P_4 の間, 線分 P_3P_4 と P_5P_6 の間, 線分 P_1P_2 と P_5P_6 の間に形成される。最初の包絡線分は三角形 $P_1P_3P_5$ と $P_2P_4P_6$ の合併図形の内部に含まれる。二本目の包絡線分は三角形 $P_1P_3P_5$ の内部に含まれる。なぜなら, 線分 P_3P_4 上の包絡線分の端点は線分 P_1P_5 と P_3P_4 の交点よりも右上に現れるからである。最後の包絡線分は三角形 $P_2P_4P_6$ の内部に含まれる。なぜなら, 線分 P_5P_6 上の包絡線分の端点は線分 P_2P_4 と P_5P_6 の交点よりも左上に現れるからである。

3.12 十二角形型

利得関数の像形状が十二角形になる場合の一例を図 11 に示す。十二角形型には凸形は現れない。この例では, 端点 P_1, P_2, P_3, P_4 と端点 P_3, P_4, P_5, P_6 は包絡線分を持ったバタフライ, 端点 P_5, P_6, P_1, P_2 はバタフライを形成する。包絡線分はそれぞれ線分 P_1P_2 と P_3P_4 の間, 線分 P_3P_4 と P_5P_6 の間に形成される。二線分とも三角形 $P_1P_3P_5$ と $P_2P_4P_6$ の合併図形の内部に含まれる。

3.13 分離型

利得関数の像形状が一点・線分ではないとき, その像形状を直線で分離しようとする, 異なる無限本の分離直線に対してそれぞれ同じ分離が得られる場合の一例を図 12 に示す。この例では, 端点 P_1, P_2, P_3, P_4 と端点 P_3, P_4, P_5, P_6 と端点 P_5, P_6, P_1, P_2 はすべてバタフライを形成する。

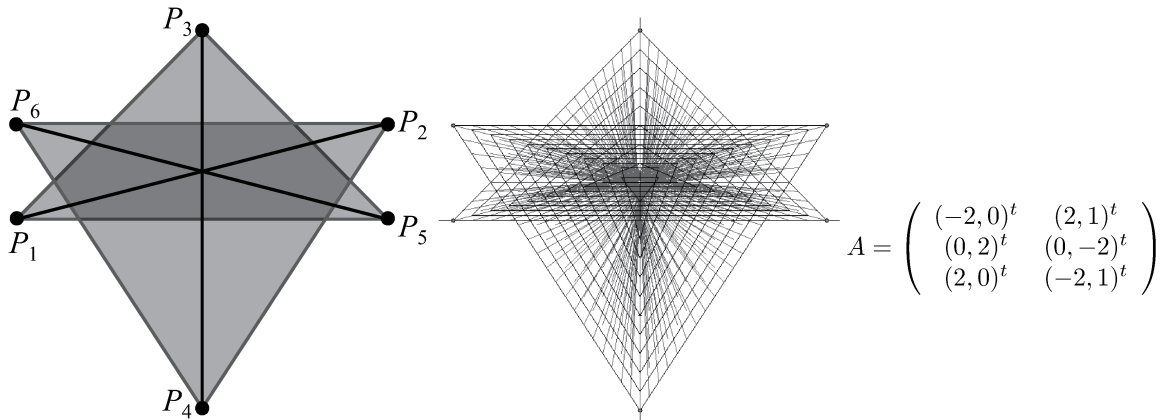


図 11: 十二角形型の利得関数の像

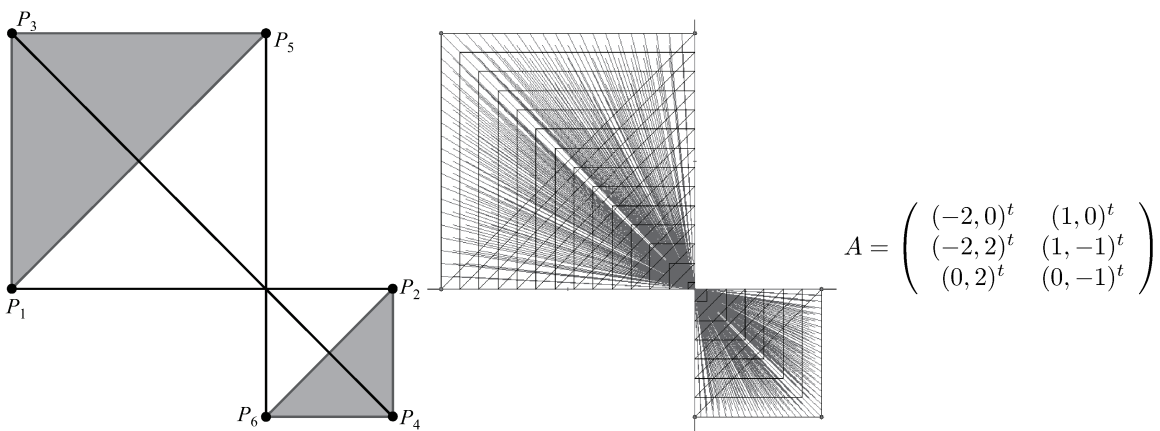


図 12: 分離型の利得関数の像

線分 P_1P_2 と P_3P_4 と P_5P_6 は同一点で交わる. その点を Q とすると, 利得関数の像は Q を通る傾き正の直線すべてで四角形 $P_1P_3P_5Q$ と $P_2P_4P_6Q$ の部分に分離される.

3.14 包絡線型

利得関数の像形状に包絡線が現れる場合の一例を図 13 に示す. この例では, 端点 P_1, P_2, P_3, P_4 と端点 P_3, P_4, P_5, P_6 と端点 P_5, P_6, P_1, P_2 はすべて包絡線分を持ったバタフライを形成する. 包絡線分はそれぞれ線分 P_1P_2 と P_3P_4 の間, 線分 P_3P_4 と P_5P_6 の間, 線分 P_1P_2 と P_5P_6 の間に形成される. 最初と最後の包絡線分の一部は, 利得関数の像の多角形領域から外にはみ出るので, 利得関数の像の輪郭の一部に包絡線分が現れる. 残りの一線分は利得関数の像の多角形領域に全く含まれない. 利得関数の像の輪郭に現れている包絡線分のうち下に凸な線分は, 二本目と最後の包絡線分が複合した包絡線分となっている.

利得関数の像形状の大部分は包絡線型に分類される. 包絡線型以外の形状は稀にしか現れないため, ある意味特殊な形状であると言えるが, これはつまり, 利得関数の像がそれらの形状をとるため

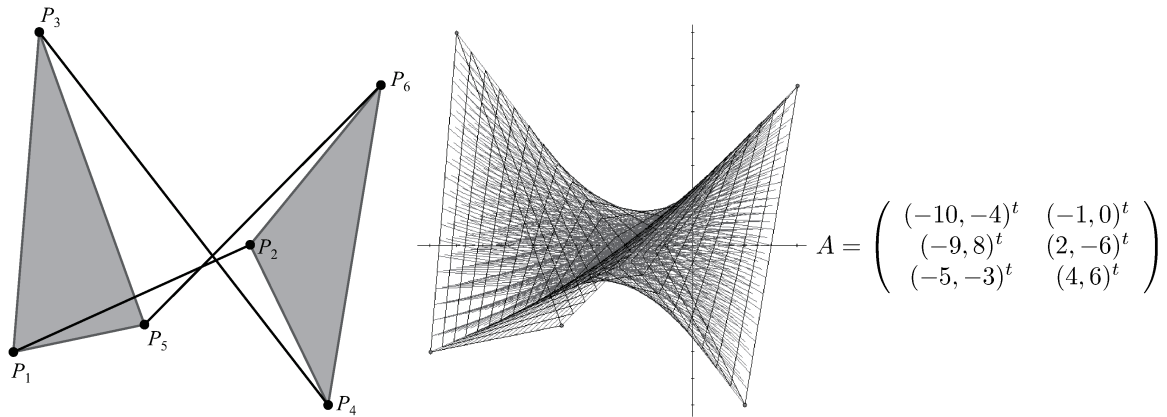


図 13: 包絡線型の利得関数の像

めの端点間の位置関係を与えることは比較的容易であるということである。

4 まとめ

本稿では、多規準行列ゲームの概要について述べ、そのゲームの一つである二規準 3×2 行列ゲームを考え、その利得関数の像形状による分類を行った。その結果、一点型、線分型、三角形型から十二角形型、分離型、包絡線型の分類が与えられた。利得関数の像形状を視覚的に把握することで、視覚的観点からのミニマックス値集合・マックスミニ値集合へのアプローチが可能となり、多規準行列ゲームを解く上での指針を与えることができると期待される。

現段階では分類のみを与えただけであり、利得関数の端点間の位置関係がどのような条件を満たすときに、どの分類に属するかということについては検討していない。それらの条件を与えることが今後の課題の一つである。

参考文献

- [1] J. W. Nieuwenhuis, *Some Minimax Theorems in Vector-Valued Functions*, Journal of Optimization Theory and Applications, vol.40, pp.463–475, 1983.
- [2] T. Tanaka, *Some Minimax Problems of Vector-Valued Functions*, Journal of Optimization Theory and Applications, vol.59, pp.505–524, 1988.
- [3] L. A. Petrosjan and N. A. Zenkevich, *Game Theory*, World Scientific, Singapore, 1996.
- [4] T. Tanaka, *Vector-Valued Minimax Theorems in Multicriteria Games*, New Frontiers of Decision Making for the Information Technology Era, edited by Y. Shi and M. Zeleny, World Scientific, Singapore, pp.75–99, 2000.
- [5] M. Higuchi and T. Tanaka, *Classification of Matrices by Means of Envelops for Bicriteria Matrix Games*, International Journal Mathematics, Game Theory, and Algebra, vol.12, issue 5, pp.371–378, 2002.

- [6] M. Higuchi and T. Tanaka, *On Minimax and Maximin Values in Multicriteria Games*, Multi-Objective Programming and Goal-Programming: Theory and applications, edited by T. Tanino, T. Tanaka, and M. Inuiguchi, Adv. Soft Comput., Springer, Berlin Heidelberg New York, pp.141-146, 2003.
- [7] J. M. Hong, M. H. Kim and G. M. Lee, *On Linear Vector Program and Vector Matrix Game Equivalence*, Optimization Letters, vol.6, pp.231-240, 2012.
- [8] M. Higuchi, K. Kimura and T. Tanaka, *Classification of Matrices for Tricriteria Two-Person Zero-Sum Matrix Game*, RIMS Kokyuroku, no.1821, pp.206-213, 2013.
- [9] K. Kimura, T. Tanaka, M. H. Kim and G. M. Lee, *On Graphical Image of the Value of Payoff Function for a Vector Matrix Game*, RIMS Kokyuroku, no.1841, pp.177-183, 2013.