

RATIONAL MAPS DEFINED BY MULTIPLES OF $K+D$ ON ALGEBRAIC SURFACES

埼玉大理 酒井文雄

X を代数閉体 k , $\text{char}(k)=0$, X の非特異射影代数曲面とする。 K を X の標準因子、 D を X 上の正因子 (effective divisor) とする。 Φ_m を線型系 $|m(K+D)|$ によって定義される有理写像とする ($m > 0$)。 $\phi_0, \dots, \phi_N \in H^0(X, \mathcal{O}(m(K+D)))$ の基底とすれば、 Φ_m は

$$X \ni z \longrightarrow (\phi_0(z), \dots, \phi_N(z)) \in \mathbb{P}^N$$

で与えられる。十分大きな m について、 Φ_m が双有理になるとき、組 (X, D) は 一般型 であるという。これは、 $\kappa(K+D, X) = 2$ と同値。

次の問題を考えたい。

問題 曲面と正因子の組 (X, D) は上の意味で一般型とする。このとき、 (X, D) に依らない一定の正整数 m_0 が存在して、 $m \geq m_0$ ならば、 Φ_m は双有理写像となるか？ もし存在するならば最小の m_0 を求めよ。

一般型曲面の結果 $([K], [B])$ から、 X 自身が一般型曲面であれば、任意の正因子 D について、 $m \geq 5$ ならば Φ_m は双有理写像である。

$D = \sum n_i D_i$ を既約分解とすると、 D は X 上の 1 次元部分スキーム (曲線) と考えられる。 D 上の可逆層 $\mathcal{L}$ が numerically effective とは

$$\deg_{D_i} (\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{D_i}) \geq 0$$

がすべての成分 D_i について成り立つ事とする。 D の双対化層 ω_D は $\mathcal{O}(K+D) \otimes \mathcal{O}_D$ で与えられる。

以下、部分的解答である次の定理を中心に、関連する所を述べる。

定理 (X, D) を曲面と正因子の組とする。

正因子 D' , $0 \leq D' \leq D$ があって

(i) (X, D') は一般型、

(ii) $\omega_{D'}$ は numerically effective

とする。このとき、 (X, D) に対する Φ_m は $m \geq 5$ について双有理写像。

定理の仮定のもとで、 Φ_4 は双有理にならない

い例がある。次の例は ω_D が numerically effective でない場合、 χ_5 は必ずしも双有理にならない事を示している。

例 X を楕円 K3 曲面とする。 $P: X \rightarrow P^1$ を楕円構造とし、 $D = b + f$ とおく。但し、 b は切断、 f はファイバーとする。この時、 $b^2 = -2$ 、 $bf = 1$ 、 $f^2 = 0$ 。従って、 $Db = -1$ 、よって $\omega_D = \mathcal{O}(D) \otimes \mathcal{O}_D$ は numerically effective ではない。しかし、 $\kappa(D, X) = 2$ 。 $|5D| = |5f + 2b| + 3b$ が成り立つ。 $5f + 2b$ を P のファイバーに制限すると位数 2 の因子。このことから、 χ_5 が双有理にならない事が従う。この例では χ_6 は双有理である事を注意しておく。

定理 1.1 S を normal Gorenstein 曲面とする。
 $\kappa(\omega_S, S) = 2$ の意味で S は一般型とする。
 この時、線型系 $|\omega_S^{\otimes m}|$ によって定義される写像 χ_m は $m \geq 5$ に対しては双有理。ここで ω_S は S の双対化層。

証明. $f: X \rightarrow S$ を minimal resolution とする。

この時、正因子 D があって、 $f^*\omega_S = \mathcal{O}(K+D)$ 。
 D の support は S の特異点の逆像にあるから、
 ω_S が可逆層 (Gorenstein 曲面の定義) に注意すると、
 $\omega_D \cong \mathcal{O}_D$ が成り立つ。従って、組 (X, D)
 に定理を適用すればよい。

§1 で正因子の一般的性質を述べ、§2 で定理の証明を概説する。特に D が正規交差する被約曲線 C の場合には、 $\kappa(K+C, X)$ は $S=X-C$ の 対数的小平次元 $\bar{\kappa}(S)$ に他ならない。この場合には ω_C が numerically effective ということは C が準安定 (semi-stable) 曲線という事と同値である。
 §3 で、 $\bar{\kappa}(S)$ による準安定曲線の分類を述べる。
 §4 では、古典的な問題設定、すなわち D が超平面切断になっている場合に言及する。詳細はどこかに発表の予定である。§3 については、[Sa 2] を参照。

§1 Effective divisors on a surface

X を曲面とする。 X 上の因子 D は

$$D = \sum n_i D_i \quad (\text{有限和})$$

と素因子 D_i の和に書かれる。すべての i について $n_i \geq 0$ のとき、 D を 正因子 (又は 曲線) という。この時、 $D_{\text{red}} = \sum D_i$ と書く。

定義 D 上の可逆層 $\mathcal{L}$ について

$$\deg_D(\mathcal{L}) = \sum n_i \deg_{D_i}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{D_i})$$

で 次数 を定義する。すべての i について

$\deg_{D_i}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{D_i}) \geq 0$ の時、 $\mathcal{L}$ は numerically effective であった。

(1.1) 補題 曲線 $D = \sum n_i D_i$ について

$$\begin{aligned} \deg_{D_i}(\omega_D) &= (K + \sum n_j D_j) \cdot D_i \\ &= 2p_g(D_i) - 2 + \sum_{j \neq i} n_j D_j \cdot D_i + (n_i - 1) D_i^2 \end{aligned}$$

(1.2) 系 $n_i = 1$ または $D_i^2 \geq 0$ ならば、 $D_i \cong \mathbb{P}^1$ 、 $D_i \cdot (D - D_i) \leq 1$ のときを除いて $\deg_{D_i}(\omega_D \otimes \mathcal{O}_{D_i}) \geq 0$ 。

これは $\omega_D \cong \mathcal{O}(K + D) \otimes \mathcal{O}_D$ から従う。

定義 曲線 D は D_{red} が連結のとき 連結 という。

定義 曲線 $D = \sum n_i D_i$ の 組成列 とは昇鎖

$$D^{(1)} \subset D^{(2)} \subset \cdots \subset D^{(n)} = D$$

で $D^{(1)} = D_{i_1}$ 、 $D^{(j)} = D^{(j-1)} + D_{i_j}$ となっているものをいう。ここで $n = \sum n_i$ 。常に

$$D^{(j-1)} \cdot D_{i_j} \geq 1 \quad j=2, \dots, n$$

となっている組成列を 連結な組成列 といい。

(1.3) 補題 曲線 D が連結な組成列をもてば、

$$H^0(D, \mathcal{O}_D) \cong k。$$

証明 $D = D' + D''$ と分解すれば完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{D'}(-D'') \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow \mathcal{O}_{D''} \rightarrow 0$$

が成り立つ。組成列にくり返し適用すればよい。

定義 すべての分解 $D = D' + D''$, $D' > 0$, $D'' > 0$ について、 $D' \cdot D'' \geq 1$ となるとき、曲線 D は 数値的に連結 であるという。

(1.4) 補題 曲線 D が数値的に連結ならば、 D は連結な組成列を持つ。

証明 $D^{(1)} = D_{i_1}$ は任意にとり、以下帰納的に定める。 $D = D^{(j-1)} + Z^{(j-1)}$, $1 < j < n$ とする。と仮定から $D^{(j-1)} \cdot Z^{(j-1)} \geq 1$ 。従って、 $Z^{(j-1)}$ の成分 D_{i_j} があって $D^{(j-1)} \cdot D_{i_j} \geq 1$ 。そこで、 $D^{(j)} = D^{(j-1)} + D_{i_j}$ とおけばよい。

例 D_1, D_2 を既約曲線で交点数行列が

$$(D_i D_j) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

で与えられるとする。このとき、 $D = 2D_1 + 2D_2$ は連結な組成列 $D_1 \subset D_1 + D_2 \subset 2D_1 + D_2 \subset D$ を持つ。しかし、 $(D_1 + D_2)^2 = 0$ である。

例 特異点解消の基本サイクルは連結な組成列をもつ。
(Laufer, On rational singularities, Amer. J. Math. 94 (1972))

定義 X 上の因子 D が numerically effective とは $DC \geq 0$ が X 上のすべての曲線について成り立つ事とする。 $h^0(D) = \dim H^0(X, \mathcal{O}(D))$ と書く。

(1.5) 補題 D を numerically effective な因子とすると $\kappa(D, X) = 2$ と $D^2 > 0$ は同値。

証明 $\kappa(D, X) = 2$ とする。 $h^0(mD) \geq 2$ とする。
 F を固定成分として、 $|mD| = |L| + F$ と書く。
 $D^2 = 0$ ならば、 $(mD)^2 = L^2 + LF + mDF \geq 0$
 から $L^2 = 0$ でなければならぬ。従って、像
 $\Phi_{mD}(X) = \Phi_L(X)$ は曲面にはならない。これは
 $\kappa(D, X) = 2$ に反する。逆は R-R より従う。

numerically effective な因子の性質をまとめておく。
 証明については [B], [Ra], [F] 参照。

(1.6) 補題 D を numerically effective な因子で $D^2 > 0$
 とする。このとき

- (i) 集合 $\mathcal{E}(D) = \{\text{既約曲線 } E \mid DE = 0\}$ は有限、
- (ii) $m > 0$ について、 $H^1(X, \mathcal{O}(-mD)) = 0$ 、
- (iii) $h^0(mD) > 1 + mD^2$ ならば $\dim \Phi_{mD}(X) = 2$ 、
- (iv) $\Delta(X, D) = 2 + D^2 - h^0(D) \geq 0$ 。

次の消滅定理が §2 の主道具となる。

(1.7) 定理 ([Ra], [B]) D は X 上の正因子で、
 $\kappa(D, X) = 2$ 、 $H^0(D, \mathcal{O}_D) \cong k$ とすると
 $H^1(X, \mathcal{O}(-D)) = 0$ 。

§2 Proof of the main theorem

主定理の証明 初めから (X, D) 一般型、 ω_D numerically effective を仮定してよい。次に $K+D$ が numerically effective としてよい事をみよう。
もし $K+D$ が numerically effective でないとするれば既約曲線 E があって、 $(K+D)E < 0$ 。 ω_D が numerically effective だから、 $E \notin D_{\text{red}}$ 。このことから、

$$E^2 = -1, KE = -1.$$

従って、 E は第1種例外曲線で $E \cap D_{\text{red}} = \emptyset$ 。

そこで、 $\pi: X \rightarrow X'$ を E の contraction とする。

$D' = \pi(D)$ とおけば、 $K+D = \pi^*(K'+D') + E$ 。

よって、 $H^0(X', \mathcal{O}(m(K'+D')))) \cong H^0(X, \mathcal{O}(m(K+D)))$ 。

故に、 Φ_m は Φ'_m を経由する。 Φ'_m が双有理なら

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \pi \downarrow & \searrow \Phi_m & \\ X' & \xrightarrow{\Phi'_m} & \mathbb{P}^N \end{array}$$

Φ_m も自動的に双有理となる。 D と D' は同型だから、 $\omega_{D'}$ も numerically effective。このようにして有限回の contraction をくり返す事によって、元々 $K+D$ は numerically effective として考えてよい。

このとき補題(1.5)により $(K+D)^2 > 0$ である。

さて写像 Φ_m の双有理性をいうには線型系

$|mK+(m-1)D|$ によって定義された写像 φ_m が双有理である事をいえば充分である。このためには、 φ_m が X の殆んどすべての点を分離する事を示せばよい。 x, y を X 上の相異なる二点とする。 $\pi: \widetilde{X} \rightarrow X$ を x, y における blowing up とし、 $E_x = \pi^{-1}(x)$, $E_y = \pi^{-1}(y)$ とおく。双対性から $H^1(\widetilde{X}, \mathcal{O}(\pi^*(mK+(m-1)D) - E_x - E_y)) \cong H^1(\widetilde{X}, \mathcal{O}(-G_m))$ ここで、 $G_m = \pi^*((m-1)(K+D)) - 2E_x - 2E_y$ とおいた。もし $H^1(\widetilde{X}, \mathcal{O}(-G_m)) = 0$ ならば

$$H^0(X, \mathcal{O}(mK+(m-1)D)) \rightarrow k_x \oplus k_y$$

は onto、従って $\varphi_m(x) \neq \varphi_m(y)$ 。補題(1.6)から $\mathcal{E} = \mathcal{E}(K+D)$ は有限個の曲線である。次を示す。

(2.1) $m \geq 5$ のとき、 $x, y \in X - \mathcal{E}$ ならば

$$H^1(\widetilde{X}, \mathcal{O}(-G_m)) = 0$$

これは φ_m 、そして Φ_m の双有理性を示す。定理(1.7)と補題(1.4)から次の3条件を満たしている事をいえば充分である。

(i) $G_m^2 > 0$ (ii) G_m は数値的に連結 (iii) $\dim |G_m| \geq 0$

$G_m^2 = (m-1)^2(K+D)^2 - 8$ だから、(i) は $m \geq 4$ で成立する。
 (ii) は $m \geq 4$ (例外 $m=4, (K+D)^2=1$) で成立 ([Sa2] 参照)。
 以下 (iii) を見よう。 $h^0((m-1)(K+D)) \geq 7$ を示せば充
 分。実際そのとき正因子 $Z \in |(m-1)(K+D)|$ で x, y
 に特異点をもつものがある。 $\pi^*Z = \bar{Z} + 2E_x + 2E_y$
 で $\bar{Z}$ は正因子。よって $\bar{Z} \in |G_m|$ 。さて補題
 (1.4) から $m > 0$ で $H^1(X, \mathcal{O}(-m(K+D))) = 0$ 。 $m \geq 2$ で
 $0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}(mK + (m-1)D)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}(m(K+D))) \rightarrow H^0(D, \omega_D^{\otimes m}) \rightarrow 0$
 は完全系列。 R - R と合わせて、 $m \geq 2$ の範囲で
 (2.2)

$$h^0(m(K+D)) = \frac{m(m-1)}{2}(K+D)^2 + \frac{m-1}{2}(K+D)D + h^1(\omega_D^{\otimes m}) + \chi(-D)$$

ここで $\chi(-D) = \frac{1}{2}(K+D)D + \chi(\mathcal{O}_X) \geq 0$ 。 $\chi(\mathcal{O}_X) < 0$ 時
 に確かめれば充分。このとき X は ruled 曲面
 $p: X \rightarrow B$ 。 D は B の上に写される成分を持つ。
 Hurwitz の公式から、 $(K+D)D \geq 2(g(B)-1)$ 。従って、
 $\chi(-D) \geq 0$ 。次に $(K+D)D = 0$ ならば $h^1(\omega_D^{\otimes m}) \geq 1$
 に注意する。実際公式 $\chi(\omega_D^{\otimes m}) = \frac{2m-1}{2}(K+D)D$
 から $h^0(\omega_D^{\otimes m}) = h^1(\omega_D^{\otimes m})$ 。 $h^0(\omega_D) = h^1(\omega_D) = h^0(\mathcal{O}_D)$
 ≥ 1 。故に、 $h^0(\omega_D^{\otimes m}) \geq 1$ を得る。以上を総合
 すると $m \geq 4$ で (iii) は成立 (例外 $m=4, (K+D)^2=1$)。

これで主定理の証明は終る。使用した議論は次の多少精密な結果も示している。

(2.3) 定理 (X, D) を曲面と正因子の組で一般型、又 $K+D$ は numerically effective とする。このとき、 Φ_m は $m \geq 4$ (例外 $m=4, (K+D)^2=1$) で双有理。

例 (Φ_4 が双有理にならない例) $Q \subset \mathbb{P}^3$ を 2 次の cone とする。Z を 5 次曲面とし、 $B=Z \cap Q$ で分岐する 2 次被覆を S とし、 $\pi: X \rightarrow S$ を minimal resolution とする。特に B が被約曲線ならば、 S は normal Gorenstein 曲面。 $\pi^* \omega_S = \mathcal{O}(K+D)$ で D を定めれば $\omega_D \simeq \mathcal{O}_D$ 。このとき、 $\Phi_m, m \leq 4$ は 2:1 写像で双有理にはならない。 $(K+D)^2=1, h^0(K+D)=2$ 。

定理 (2.3) において、 $K=0$ ならば、 $\Phi_m = \gamma_m$ だから、 Φ_m は $m \geq 3$ で双有理写像。K3 曲面については numerically effective を落としても成り立つ。
(2.4) 定理 ([M], [SD]) X を K3 曲面 ($K=0, g=0$)、 D を正因子で $D^2 > 0$ 。 Φ_m は $m \geq 3$ で双有理。

§3 Semi-stable curves

D が被約かつ正規直交曲線 C の場合を考察する。 $S = X - C$ とおく。 $\Theta(K+C) \cong \Omega^2(\log C)$ である。記号 $\overline{P}_m(S) = h^0(m(K+C))$, $\overline{P}_g = \overline{P}_1$ を用いる。 $\overline{\pi}(S) = \kappa(K+C, X)$ は 対数的小平次元。

系(1.2)から、 ω_C は numerically effective と C は 準安定 曲線すなわち C の非特異有理成分は他の成分と ϵ 点以上で交わる事と同値である。

定義 第1種例外曲線 E は $E \cdot C \leq 1$ のとき C -例外曲線と呼ばれる。

§2の冒頭と同様にして、 C -例外曲線は無いとして議論して支障ない事がわかる。一種の minimal model (相対)である。今後はこれを仮定する。 $\overline{\pi}$ による曲面と準安定曲線の分類を試みた。結果を表にまとめる ([Sa2] 参照)。

$\overline{\pi} = -\infty$	(ruled 曲面, 切断)
$\overline{\pi} = 0$	(i) $K+C \sim 0$ $(\mathbb{P}^2, 3\text{次曲線}) (F_e, 2\text{-切断})$ $(\text{楕円ruled曲面}, 2\text{つの切断})$ (ii) $2(K+C) \sim 0$

	(楕円ruled曲面, 既約2-切断)
$\pi = 1$	(i) (ruled曲面, 2-切断 + ファイバー) (ii) (楕円曲面, ファイバー達) この場合には Φ_m はファイバーを経由する。又 ϕ_m は $m \geq 8$ で埋込。 $ \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Phi_m} & \mathbb{P}^N \\ p \downarrow & G \nearrow & \\ B & & \phi_m \end{array} $

 $\pi = 2$

Φ_m は $m \geq 3$ で morphism (例外 $m=3, (K+C)^2 \leq 2$)、又 $m \geq 4$ な $s \bmod 6$ で埋込み (例外 $m=4, (K+C)^2=1$)、
 あるいは $(K+C)^2 \geq 5$ 又は $(K+C)^2 \geq 3$ かつ $\overline{\rho}_g \geq 2$ ならば Φ_3 も双有理。
 不等式 ($k = \mathbb{C}$ とする)

$$\overline{c}_1^2 \leq 3 \overline{c}_2$$

が成立する。ここで $\overline{c}_1^2 = (K+C)^2$ 、

$\overline{c}_2 = S$ のオイラー数

注意 ファイバー構造 $p: X \rightarrow B$ について、
 曲線 D が n -切断とは、 $Df = n$ が一般の
 ファイバー f について成り立つ事とした。

§4 Hyperplane sections

この節では D が超平面切断である場合を考える。 $Y \subset \mathbb{P}^N$ を曲面 (非特異に限らない) とし、 Y を $\mathbb{P}^N$ の超平面で切って Y の超平面切断を得る。 Y は $\mathbb{P}^N$ の超平面には含まれないとする。このとき

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)) \rightarrow H^0(Y, \mathcal{O}_Y(1)).$$

$\pi: X \rightarrow Y$ を minimal resolution とする。Bertini の定理から、一般の元 $C \in |\pi^* \mathcal{O}_Y(1)|$ は非特異かつ既約。 $d = C^2$ と置くと、 $d = \deg Y$ 。又

$$(1) \quad h^0(C) \geq N+1,$$

(4.1) (ii) $\mathcal{O}(C)$ は切断によって生成される、

(iii) $\pi|_C$ は双有理写像。

特に、 C は numerically effective。(1.4) から

$$(iv) \quad \Delta(X, C) = 2 + d - h^0(C) \geq 0.$$

$h^0(C) = N+1$ ならば、 Y は $\mathbb{P}^N$ で projectively normal。

定義 C の種数 g は (X, C) の 切断種数 と呼ばれる。

問題 d, g による (X, C) の分類をせよ。

文献として $[C]$ 、 $[S_0]$ 、 $[F]$ 等を挙げておく。
 簡単な場合 $g=0$ を見ておこう。 $KC+C^2=-2$
 だから $KC<0$ 。よって $P_m(X)=0$ 。さらに $g=0$ 。
 もし $g>0$ とすれば、アルバネーゼ写像の像
 $\alpha(C)$ は一点。これは $C^2>0$ に反する。故に X
 は有理曲面。従って $h^0(C) \geq C^2+2$ 、(iv) と合
 わせて、 $h^0(C)=C^2+2$ ($\Delta(X,C)=0$) を得る。
 従って、 Y は $\mathbb{P}^{d+1}$ 内の d 次曲面。これはいろ
 いろな所で分類されている。次は Picard の定理。
 (4.2) 定理 (X,C) を超平面切断とし、 $g=0$
 とする。このとき次のどれかと同型

(i) $(\mathbb{P}^2, \text{直線})$

(ii) $(\mathbb{P}^2, \text{2次曲線})$

(iii) $(F_e, C \in |\mathcal{O}(b+(e+k)f)|)$ $k \geq 0$

ここで、 b は $b^2=-e$ なる切断、 f はファイバー。

$g \geq 1$ の場合は準安定曲線の特別の場合にな
 る。 $d \leq 4$ ならば Y の分類は既知である。
 興味ある場合として、 C が超楕円曲線の時
 がある。重は双有理にはなれない。 $[S_0]$ 参照。

References

- [B] Bombieri, E.: Canonical models of surfaces of general type.
Publ. Math. IHES 42, 172-219 (1973)
- [C] Castelnuovo, G.: Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche. Rend. Cir. Math. Palermo 1890
- [F] Fujita, T.: On the structure of polarized varieties with Δ genera zero. J. Fac. Sci. Uni. Tokyo 103-115 (1975)
- [K] Kodaira, K.: Pluricanonical systems of algebraic surfaces of general type. J. Math. Soc. Japan, 170-195 (1968)
- [M] Mayer, A. I.: Families of K3 surfaces. Nagoya Math. J. 48, 1-17 (1972)
- [N] Nagata, M.: On rational surfaces I. Mem. Coll. Uni. Kyoto 32 (1960)
- [P] Persson, U.: On degenerations of algebraic surfaces. Mem. Amer. Math. Soc. 189 (1977)
- [Ra] Ramanujam, C. P.: Remarks on the Kodaira vanishing theorem. J. Indian Math. Soc. 36, 41-51 (1972), 38, 121-124 (1974)
- [Re] Reid, M.: Special linear systems on curves lying on a K3 surface. J. London Math. (2) 13, 454-458 (1976)
- [SD] Saint-Donat, B.: Projective models of K3 surfaces. Amer. J. Math. 96, 602-639 (1977)
- [Sa1] Sakai, F.: Canonical models of complements of stable curves. In Int. Symp. Alg. Geom. Kyoto 1977, pp 643-661 (1978)
- [Sa2] _____.: Semi-stable curves on algebraic surfaces and logarithmic pluricanonical maps. To appear
- [So] Sommese, A. J.: Hyperplane sections of projective surfaces. Duke Math. J. 46, 377-401 (1979)
- [V] Van de Ven, A.: On the 2-connectedness of very ample divisors on a surface. Duke Math. J. 46, 403-407 (1979)