

外部非負システムへの変換による 離散時間線形時不変システムの H_2 解析*

蛸原 義雄[†]・瀬部 昇[‡]・増淵 泉[§]・脇 隼人[¶]・管野 政明^{||}・椿野 大輔[◇]

H_2 Analysis of LTI Discrete-Time Systems via Conversion to Externally Positive Systems*

Yoshio EBIHARA[†], Noboru SEBE[‡], Izumi MASUBUCHI[§],
Hayato WAKI[¶], Masaaki KANNO^{||} and Daisuke TSUBAKINO[◇]

In this paper, we explore H_2 analysis techniques of general, not necessarily positive, discrete-time linear time-invariant (LTI) systems by means of positive system theory. While externally positive systems are a particular class of systems whose impulse responses take only nonnegative values, we often encounter such impulse responses even in the analysis of general LTI systems. A typical example is the computation of the H_2 norm where we focus on squared impulse responses. In view of this observation, we first clarify that we can construct an SISO externally positive system whose impulse response is given by the square of the impulse response of a given SISO LTI system. This system conversion allows us to reduce the H_2 norm computation problem of a general LTI system to the l_∞ -induced norm computation problem (or l_1 problem in short) of the resulting externally positive system. It also turns out that this problem reduction enables us to derive various alternative formulas for the H_2 norm of general discrete-time LTI systems.

1. はじめに

近年、制御理論分野において非負システムに関する研究が注目を集めている。ある線形時不変システムが“任意の非負の初期状態と任意の非負の入力に対して状態と出力が常に非負になる”という性質を有するとき、このシステムを内部非負であるという [1,2]。このような内部非負性を有するシステムは工学、経済学、化学や生物学などの多彩な分野に存在しており、これが非負システムに関する研究を推進するうえでの大きな動機になっている。さらに内部非負システムの解析や設計は凸最適化と親和性が高いという数理的な側面を有しており、制御理論分野では線形計画や線形行列不等式 (Linear Matrix Inequality, LMI) および半正定値計画 (Semidefinite Programming, SDP) といった凸最適化手法を用いた解析や設計に関する研究が精力的に進め

られている [3–11]。

一方、内部非負システムよりも緩いクラスの非負システムとして、入出力信号の非負性に基づいて定義される外部非負システムがある。ある線形時不変システムが外部非負システムであるための必要十分条件は、そのインパルス応答行列が非負であることである [1,2]。とくにこの非負性により、SISO の外部非負システムに対しては、そのインパルス応答の L_1 (l_1) ノルム (すなわちシステムの L_∞ (l_∞) 誘導ノルム) を状態方程式の係数行列を用いて閉形式で表現することが可能である [10]。

外部非負システムは、上記のようにインパルス応答の非負性といういくぶん強い性質によって特徴づけられるものの、一般の (すなわち外部非負とは限らない) 線形時不変システムの解析においても、しばしば非負信号の取り扱いが現れる。その典型例が線形時不変システムの H_2 解析であり、 H_2 ノルムの計算は本質的には2乗されたインパルス応答 (したがって非負信号) の L_1 (l_1) ノルムを求める問題と捉えることができる。したがって、この非負信号をインパルス応答として有する外部非負システムを構成することができれば、線形時不変システムの H_2 ノルムを求める問題は、(本論文で注目する離散時間システムであれば) 外部非負システムの l_∞ 誘導ノルムを求める問題に帰着できると考えられる。本論文の目

* 原稿受付 2017年6月8日

[†] 京都大学 大学院 工学研究科

[‡] 九州工業大学 大学院 情報工学研究院

[§] 神戸大学 大学院 システム情報学研究科

[¶] 九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所

^{||} 新潟大学 工学部附属工学力教育センター

[◇] 名古屋大学 大学院 工学研究科

Key Words: system conversion, positive system, H_2 norm, l_∞ -induced norm.

的は、このような外部非負システムの構築手法を示すとともに、外部非負システムへの変換を通した離散時間線形時不変システムの H_2 ノルムの新たな特徴づけを与えることである。

本論文では、上記の目的を達成するために、はじめにインパルス応答として $g_1(k)$, $g_2(k)$ (k は離散時間を表す) を有する与えられた二つの SISO システムから、インパルス応答として両者の積 $g_1(k)g_2(k)$ を有する (有限次元) SISO システムを構築する手法を確立する。これにより、インパルス応答として $g(k)$ を有する SISO システムから、インパルス応答として $g(k)^2$ を有する SISO 外部非負システムを構成することが可能になる。さらにこの結果を MIMO システムの取り扱いが可能になるように拡張し、SISO 外部非負システムの l_∞ 誘導ノルムの解析を通して、MIMO の線形時不変システムの H_2 ノルムを特徴づける閉形式表現や新たな LMI 条件を導出する。後述のように、導出する閉形式表現は (離散型) Lyapunov 方程式や Sylvester 方程式を介さないという点で導出手順はまったく異なるもののよく知られた可制御性グラミアン、可観測性グラミアンに基づく表現 [12] や、モデル低次元化の分野で研究が進められているクロスグラミアンに基づく表現 [13] と本質的には等価である。一方、LMI による表現は、安定な外部非負システムの l_∞ 誘導ノルムを特徴づける LMI 表現の導出に基づくものであり、筆者らの知る限り新しい条件である。本論文の結果は、一般の (すなわち非負とは限らない) 線形時不変システムの H_2 ノルムの計算が外部非負システムの l_∞ 誘導ノルムの計算に密接に関連していることを示しており、線形時不変システムの H_2 ノルム解析に対して新たな視点を与えるものになっていると考える。

本論文ではつぎの表記を用いる。サイズが n の対称行列、半正定行列、正定行列の集合をそれぞれ S^n , S_+^n および S_{++}^n で表す。行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ に対して、その固有値の集合を $\sigma(A)$ で表す。さらに 0 以上の整数の集合を $\mathbb{N}_+$ で表す。ベクトル $v \in \mathbb{R}^n$ に対して、 $\|v\|_\infty$ はその ∞ ノルムを表す。すなわち $\|v\|_\infty = \max_i |v_i|$ である。離散時間信号 $v: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ に対して、 $\|v\|_\infty$ はその l_∞ ノルムを表す。すなわち $\|v\|_\infty = \sup_{0 \leq k < \infty} \|v(k)\|_\infty$ である。行列 $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m_1}$ と $A_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times m_2}$ に対して、 $A_1 \otimes A_2 \in \mathbb{R}^{n_1 n_2 \times m_1 m_2}$ は両者のクロネッカ積を表す。

2. 基本事項の整理と本研究の目的

つぎの離散時間線形時不変システム G を考える。

$$G: \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bw(k) \\ z(k) = Cx(k) + Dw(k) \end{cases} \quad (1)$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{l \times n}, D \in \mathbb{R}^{l \times m}$$

ただし $k \in \mathbb{N}_+$ である。このシステムのパルス伝達関数行列およびインパルス応答行列はそれぞれ次式で表される。

$$G(z) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = C(zI - A)^{-1}B + D \quad (2)$$

$$g(k) = \begin{cases} D & (k=0) \\ CA^{k-1}B & (k \geq 1) \end{cases} \quad (3)$$

システム G の外部非負性の定義、およびシステム G が外部非負システムになるための必要十分条件は、それぞれつぎのように表される。

【定義 1】 [1,2] (1) 式で表される離散時間システム G を考える。初期状態 $x(0)$ が 0 のもとで、任意の非負の入力に対して出力が常に非負になるとき、このシステム G は外部非負システムであるという。

【命題 1】 [1,2] (1) 式で表される離散時間システム G が外部非負システムになるための必要十分条件は、(3) 式で表されるインパルス応答行列が非負になること、すなわち $g(k) \geq 0$ ($\forall k \in \mathbb{N}_+$) が成立することである。

一方、(1) 式で表されるシステム G の H_2 ノルムおよび l_∞ 誘導ノルムは次のように定義される。

【定義 2】 [12] (1) 式で表される離散時間システム G が安定であるとする。すなわち、(1) 式の係数行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が Schur 安定であるとする。このとき、システム G の H_2 ノルムは次式で定義される。

$$\begin{aligned} \|G\|_2 &:= \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \text{trace}(g(k)^T g(k))} \\ &= \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m g_{ij}(k)^2} \end{aligned} \quad (4)$$

ここで g は (3) 式で表されるシステム G のインパルス応答行列である。

【定義 3】 (1) 式で表される離散時間システム G が安定であるとする。すなわち、(1) 式の係数行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が Schur 安定であるとする。このとき、システム G の l_∞ 誘導ノルムは次式で定義される。

$$\|G\|_{\infty, \infty} := \sup_{\|w\|_\infty \leq 1} \|z\|_\infty \quad (5)$$

以上の基本事項の整理のもと、本研究の動機と目的を述べる。(1) 式で表されるシステム G が SISO である場合 (すなわち $m=l=1$ である場合)、(4) 式より明らかに次式が成立する。

$$\|G\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} g(k)^2} \quad (6)$$

一方、(5) 式より次式が成立することも明らかである。

$$\|G\|_{\infty, \infty} = \sum_{k=0}^{\infty} |g(k)|$$

すなわち、SISO であるシステム G の l_∞ 誘導ノルム $\|G\|_{\infty, \infty}$ はそのインパルス応答 g の l_1 ノルムに一致する (これが、 l_∞ 誘導ノルムに関連する問題がしばしば l_1 問題とよばれる理由である)。さらにシステム G が外部非負システムであれば、 $g(k) \geq 0$ ($\forall k \in \mathbb{N}_+$) であるため上

式において絶対値をとる必要がなく、したがって次式のように l_∞ 誘導ノルムを閉形式で簡単に表現できる。

$$\|G\|_{\infty,\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) = C(I-A)^{-1}B + D (= G(1)) \quad (7)$$

以上で示した (6) 式と (7) 式より、SISO かつ安定でインパルス応答として $g(k)$ ($k \in \mathbb{N}_+$) を有するシステム G の H_2 ノルムに関して、つぎのことがわかる。すなわち、この与えられたシステム G に対して、もしインパルス応答として $g(k)^2$ ($k \in \mathbb{N}_+$) を有する SISO かつ安定な外部非負システム G_{sq} を構成することができれば、システム G の H_2 ノルム $\|G\|_2$ の 2 乗を G_{sq} の係数行列を用いて (7) 式の形で求めることができるというものである。本研究の目的は、与えられた線形時不変システム G から上記のような性質を有する外部非負システム G_{sq} を生成するためのシステム変換手法を構築し、さらにこのシステム変換に基づいて線形時不変システムの H_2 ノルムを特徴づける閉形式表現や新たな LMI 条件を導出することである。

3. 外部非負システムへの変換

本節では、はじめに、インパルス応答として $g_1(k), g_2(k)$ ($k \in \mathbb{N}_+$) を有する与えられた二つの SISO システムから、インパルス応答として両者の積 $g_1(k)g_2(k)$ ($k \in \mathbb{N}_+$) を有する SISO システムを構築する手法を確立する。次の定理は、そのようなシステム構築を可能にするものである。後述のように、定理の正当性の証明ではクロネッカ積の特徴的な性質 [14] を活用している。

【定理 1】 パルス伝達関数およびインパルス応答が次式で表される SISO システム G_1 および G_2 を考える。

$$G_1(z) = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}, g_1(k) = \begin{cases} D_1 & (k=0) \\ C_1 A_1^{k-1} B_1 & (k \geq 1) \end{cases} \quad (8)$$

$$G_2(z) = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}, g_2(k) = \begin{cases} D_2 & (k=0) \\ C_2 A_2^{k-1} B_2 & (k \geq 1) \end{cases}$$

これらの SISO システムに対して、次式で SISO システム G_{pr} を構成する。

$$G_{\text{pr}}(z) = \begin{bmatrix} A_{\text{pr}} & B_{\text{pr}} \\ C_{\text{pr}} & D_{\text{pr}} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A_1 \otimes A_2 & B_1 \otimes B_2 \\ C_1 \otimes C_2 & D_1 \otimes D_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

このとき、システム G_{pr} のインパルス応答 g_{pr} は次式を満足する。

$$g_{\text{pr}}(k) = g_1(k)g_2(k) \quad (k \in \mathbb{N}_+) \quad (10)$$

(定理 1 の証明) (9) 式で定義されたシステム G_{pr} のインパルス応答 $g_{\text{pr}}(k)$ ($k \in \mathbb{N}_+$) を考える。システム G_{pr} の定義より、明らかに $k=0$ に対して $g_{\text{pr}}(0) = D_1 \otimes D_2 = D_1 D_2 = g_1(0)g_2(0)$ が成立する。さらにクロネッカ積の性質 [14] より、 $k \geq 1$ に対して次式が明らかに成立する。

$$\begin{aligned} g_{\text{pr}}(k) &= C_{\text{pr}} A_{\text{pr}}^{k-1} B_{\text{pr}} \\ &= (C_1 \otimes C_2)(A_1 \otimes A_2)^{k-1}(B_1 \otimes B_2) \\ &= (C_1 \otimes C_2)(A_1^{k-1} \otimes A_2^{k-1})(B_1 \otimes B_2) \\ &= (C_1 A_1^{k-1} B_1) \otimes (C_2 A_2^{k-1} B_2) \\ &= g_1(k)g_2(k) \end{aligned}$$

以上より (10) 式が成立することが示された。 $\square$

この定理よりつぎの系がただちに成立する。

【系 1】 パルス伝達関数が (2) 式、インパルス応答が (3) 式で表される SISO システム G に対して、次式で SISO システム G_{sq} を構成する。

$$G_{\text{sq}}(z) = \begin{bmatrix} A_{\text{sq}} & B_{\text{sq}} \\ C_{\text{sq}} & D_{\text{sq}} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A \otimes A & B \otimes B \\ C \otimes C & D \otimes D \end{bmatrix} \quad (11)$$

このとき、システム G_{sq} のインパルス応答 g_{sq} は次式を満足する。

$$g_{\text{sq}}(k) = g(k)^2 \quad (k \in \mathbb{N}_+) \quad (12)$$

この系より、インパルス応答として $g(k)$ ($k \in \mathbb{N}_+$) を有する線形時不変システム G から、インパルス応答として $g(k)^2$ ($k \in \mathbb{N}_+$) を有する外部非負システム G_{sq} を構成できることがわかった。さらに、 $A_{\text{sq}} = A \otimes A \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ が Schur 安定であるための必要十分条件は、 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が Schur 安定であることも容易にわかる。これはクロネッカ積の性質より $\sigma(A_{\text{sq}}) = \{\lambda_i \lambda_j : \lambda_i, \lambda_j \in \sigma(A)\}$ が成立するためである。詳細は文献 [14] を参考にされたい。

4. l_1 問題への帰着による H_2 ノルムの表現

4.1 SISO の場合

(1) 式で表される線形時不変システム G が SISO である場合、(6), (12), (7) および (11) 式より容易に次の結果を得ることができる。

【補題 1】 (1) 式で表されるシステムが SISO かつ安定であると仮定する。すなわち $m=l=1$ でありかつ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が Schur 安定であると仮定する。このとき、次式が成立する。

$$\begin{aligned} \|G\|_2^2 &= \sqrt{\|G_{\text{sq}}\|_{\infty,\infty}} = \sqrt{C_{\text{sq}}(I-A_{\text{sq}})^{-1}B_{\text{sq}} + D_{\text{sq}}} \\ &= \sqrt{(C \otimes C)(I-A \otimes A)^{-1}(B \otimes B) + D \otimes D} \quad (13) \end{aligned}$$

ただし G_{sq} は (11) 式で表される SISO かつ安定な外部非負システムである。

4.2 MIMO の場合

(1) 式が MIMO の場合の H_2 ノルムを解析するために、入力行列 $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ および出力行列 $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ をつぎのように分割することを考える。

$$B = [B_1 \ \cdots \ B_m], \quad C = [C_1^T \ \cdots \ C_l^T]^T \quad (14)$$

すなわち、 B_j ($j=1, \dots, m$) は行列 $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ の第 j 列を、 C_i ($i=1, \dots, l$) は行列 $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ の第 i 行を表す。このとき、(4) 式で定義されるシステム G の H_2 ノルムに関して、(13) 式より明らかに次式が成立する。

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_{ij}(k)^2 = (C_i \otimes C_i)(I-A \otimes A)^{-1}(B_j \otimes B_j) + D_{ij} \otimes D_{ij} \quad (15)$$

この結果を踏まえ、SISO の外部非負システム G_{sq} を次

式で定義する.

$$G_{\text{sq}}(z) = \begin{bmatrix} \frac{A_{\text{sq}} B_{\text{sq}}}{C_{\text{sq}} D_{\text{sq}}} \\ \vdots \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A \otimes A & \sum_{j=1}^m B_j \otimes B_j \\ \sum_{i=1}^l C_i \otimes C_i & \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m D_{ij} \otimes D_{ij} \end{bmatrix} \quad (16)$$

上式において $m=l=1$ とすればこのシステムの定義は (11) 式に一致する. なお, 上式で定義される G_{sq} は明らかに外部非負システムである. これは, そのインパルス応答 g_{sq} が次式で表され, したがって $g_{\text{sq}}(k) \geq 0$ ($k \in \mathbb{N}_+$) が成立することから容易に確認できる.

$$g_{\text{sq}}(k) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m g_{ij}(k)^2 \quad (k \in \mathbb{N}_+) \quad (17)$$

以上に示した (16) 式および (17) 式に基づくことで, 本論文の主結果の一つである次の定理を得ることができる.

【定理 2】 (1) 式で表されるシステム G が安定である, すなわち行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が Schur 安定であるとする. このとき, 次式が成立する.

$$\begin{aligned} \|G\|_2 &= \sqrt{\|G_{\text{sq}}\|_{\infty, \infty}} \\ &= \sqrt{C_{\text{sq}}(I - A_{\text{sq}})^{-1} B_{\text{sq}} + D_{\text{sq}}} \\ &= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^l C_i \otimes C_i \right) (I - A \otimes A)^{-1} \left(\sum_{j=1}^m B_j \otimes B_j \right) + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m D_{ij} \otimes D_{ij}} \end{aligned} \quad (18)$$

ただし G_{sq} は (16) 式で表される SISO かつ安定な外部非負システムである.

(定理 2 の証明) (18) 式が成立することは, (4), (17), (7) および (16) 式より次のように容易に確認できる.

$$\begin{aligned} \|G\|_2 &= \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m g_{ij}(k)^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} g_{\text{sq}}(k)} \\ &= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^l C_i \otimes C_i \right) (I - A \otimes A)^{-1} \left(\sum_{j=1}^m B_j \otimes B_j \right) + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m D_{ij} \otimes D_{ij}} \end{aligned}$$

□

この定理は, 一般の (すなわち非負とは限らない) n 次の MIMO システムの H_2 ノルムを, n^2 次の SISO 外部非負システムの l_∞ 誘導ノルムを計算することで (あるいは同じことであるがインパルス応答の l_1 ノルムを計算する l_1 問題を解くことで) 求められることを示している.

5. グラミアンに基づく表現との関係

5.1 可制御性グラミアン・可観測性グラミアンに基づく表現との関係

線形時不変システムの H_2 ノルムは可制御性グラミアン, あるいは可観測性グラミアンを用いて表現できることがよく知られている [12,17]. すなわち, (1) 式で表さ

れるシステム G が安定であるとき, その H_2 ノルムはつぎのように表現できる.

$$\|G\|_2^2 = \text{trace}(CXC^T + DD^T) \quad (19)$$

ただし上式における $X \in \mathbb{S}_+^n$ は次の (離散型) Lyapunov 方程式の唯一解として定まる可制御性グラミアンである.

$$AXA^T - X + BB^T = 0 \quad (20)$$

ここで, 前節で導いた H_2 ノルムの閉形式表現 (18) 式は, 上記の可制御性グラミアンに基づく H_2 ノルムの表現と本質的に等価であることがつぎのように確かめられる.

まず, (20) 式を満足する可制御性グラミアン $X \in \mathbb{S}_+^n$ は, つぎのように表現できる.

$$\text{vec}(X) = (I - A \otimes A)^{-1} \left(\sum_{j=1}^m (B_j \otimes B_j) \right) \quad (21)$$

ここで $\text{vec}(X) \in \mathbb{R}^{n^2}$ は行列 X の列展開である. さらに次式が成立することも容易に確認できる.

$$\text{trace}(CXC^T) = \left(\sum_{i=1}^l (C_i \otimes C_i) \right) \text{vec}(X) \quad (22)$$

以上で示した (21), (22) 式より, (18) 式で示した H_2 ノルムの閉形式表現は標準的な可制御性グラミアンに基づくアプローチによっても導かれることがわかる. すなわち, 定理 2 で示した結果は, 必ずしも新しいものではない. しかしながら定理 2 の結果は, 先述のように一般の (すなわち非負とは限らない) MIMO の線形時不変システムの H_2 ノルムの計算が SISO の外部非負システムの l_∞ 誘導ノルムの計算に密接に関連していることを示しており, 古くから研究が進められている線形時不変システムの H_2 ノルムの解析に対して新たな視点を与えるものになっている. なお, 定理 2 をシステム G の双対システムに対して適用することで, つぎのような H_2 ノルムの表現を得ることも可能である.

$$\|G\|_2 = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^m B_j^T \otimes B_j^T \right) (I - A^T \otimes A^T)^{-1} \left(\sum_{i=1}^l C_i^T \otimes C_i^T \right) + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l D_{ij} \otimes D_{ij}}$$

さらに上式が, 可観測性グラミアンに基づく標準的な H_2 ノルム表現と本質的に等価であることも容易に確認できる.

5.2 クロスグラミアンに基づく表現との関係

前節では, はじめにインパルス応答として $g(k)$ ($k \in \mathbb{N}_+$) を有する SISO システム G を考察の対象とし, これに対してインパルス応答として $g(k)^2$ ($k \in \mathbb{N}_+$) を有する SISO 外部非負システム G_{sq} を構成することでシステム G の H_2 ノルムの解析を行った. さらにこの結果を (15) 式を介して直接的に MIMO システムに拡張した. 一方, 通常の MIMO システムの取り扱いにおいては, (SISO システムでは $g(k)^2$ と本質的に違いはないものの) $g(k)^T g(k)$ ないし $g(k)g(k)^T$ といったインパルス応

答に注目することが可能でありまた自然でもある。本節ではこれらのインパルス応答に着目することで、前節とは異なる形の線形時不変システムの H_2 ノルムの表現を導く。

はじめに、インパルス応答として $g(k)$ ($k \in \mathbb{N}_+$) を有する SISO システム G に対して、インパルス応答として $g(k)^T g(k)$ を有する SISO の外部非負システム G_{ip} を定理 1 に直接的に基づいて構成することを考える。つぎの系と補題はそれぞれ定理 1 と (7) 式よりただちに導かれる。

【系 2】 パルス伝達関数が (2) 式、インパルス応答が (3) 式で表される SISO システム G に対して、次式で SISO システム G_{ip} を構成する。

$$G_{ip}(z) = \begin{bmatrix} A_{ip} & B_{ip} \\ C_{ip} & D_{ip} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A^T \otimes A & C^T \otimes B \\ B^T \otimes C & D^T \otimes D \end{bmatrix} \quad (23)$$

このとき、システム G_{ip} のインパルス応答 g_{ip} は次式を満足する。

$$g_{ip}(k) = g(k)^T g(k) \quad (k \in \mathbb{N}_+) \quad (24)$$

【補題 2】 (1) 式で表されるシステム G が SISO かつ安定であると仮定する。すなわち $m=l=1$ でありかつ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が Schur 安定であると仮定する。このとき、次式が成立する。

$$\|G\|_2 = \sqrt{\|G_{ip}\|_{\infty, \infty}} = \sqrt{C_{ip}(I - A_{ip})^{-1}B_{ip} + D_{ip}} \\ = \sqrt{(B^T \otimes C)(I - A^T \otimes A)^{-1}(C^T \otimes B) + D^T \otimes D} \quad (25)$$

ただし G_{ip} は (23) 式で表される SISO かつ安定な外部非負システムである。

以下では、(1) 式で表されるシステム G が SISO かつ安定であるという仮定のもとで、(25) 式で示した H_2 ノルムの表現を Sylvester 方程式の解を用いて表現し直すことを考える。はじめに、行列 A が Schur 安定であれば、Sylvester 方程式 $AFA - F + BC = 0$ は唯一解 F をもつ [14] に注意する。さらに (20) 式および (21) 式と同様の議論をたどることにより、唯一解 F は $\text{vec}(F) = (I - A^T \otimes A)^{-1}(C^T \otimes B)$ と表現できることがわかる。加えて $(B^T \otimes C)\text{vec}(F) = CFB$ が成立することも容易に確認できる。以上の結果をまとめることで、つぎの補題を得る。

【補題 3】 (1) 式で表されるシステム G が SISO かつ安定であると仮定する。すなわち $m=l=1$ でありかつ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が Schur 安定であると仮定する。このとき、次式が成立する。

$$\|G\|_2 = \sqrt{CFB + D^2} \quad (26)$$

ここで $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は次の Sylvester 方程式を満足する唯一解である。

$$AFA - F + BC = 0 \quad (27)$$

(注意 1) 上記の補題 3 における行列 $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ はクロスグラミアンとよばれており [13]、さらに (26) 式で表されるクロスグラミアンに基づいた H_2 ノルムの表現も広く知られている [13]。この補題において、(26) 式に現

れる $CFB + D^2$ の非負性を (27) 式に基づいてただちに言い出すことは容易ではないと思われるが、この非負性は (23) で定義されるシステム G_{ip} の外部非負性によって保証されると解釈できる。

以降では、補題 3 の結果を MIMO システムに拡張することを考える。(14) 式で表される入力行列および出力行列の分割に着目すれば、補題 2 および 3 より次式が成立することがわかる。

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_{ij}(k)^T g_{ij}(k) \\ = (B_j^T \otimes C_i)(I - A^T \otimes A)^{-1}(C_i^T \otimes B_j) + D_{ij}^T \otimes D_{ij} \\ = C_i F_{ij} B_j + D_{ij}^2 \quad (28)$$

ここで F_{ij} ($i=1, \dots, l, j=1, \dots, m$) はそれぞれ Sylvester 方程式 $AF_{ij}A - F_{ij} + B_j C_i = 0$ の唯一解である。これよりただちにつぎの結果を得る。

【定理 3】 (1) 式で表されるシステム G が安定である、すなわち行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が Schur 安定であるとすると、このとき、次式が成立する。

$$\|G\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m (C_i F_{ij} B_j + D_{ij}^2)} \quad (29)$$

ただし F_{ij} ($i=1, \dots, l, j=1, \dots, m$) はつぎの Sylvester 方程式の唯一解である。

$$AF_{ij}A - F_{ij} + B_j C_i = 0 \quad (30)$$

(注意 2) 定理 3 の結果をシステム G の双対システムに適用することを考える。双対システムが H_2 ノルムを保存することに注意すると、容易に次式が導かれる。

$$\|G\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l (B_j^T J_{ji} C_i^T + D_{ij}^2)} \quad (31)$$

ただし J_{ji} ($j=1, \dots, m, i=1, \dots, l$) はつぎの Sylvester 方程式の唯一解である。

$$A^T J_{ji} A^T - J_{ji} + C_i^T B_j^T = 0 \quad (32)$$

しかしながら、(32) 式と (30) 式を比較すると、 $J_{ji} = F_{ij}^T$ が成立することは明らかであり、したがって (31) 式は (29) 式に帰着する。すなわち、双対システムを考慮しても、導出される H_2 ノルムの条件は元のシステムから導出される条件と本質的に変わらない。この点は、(20) 式で表される可制御性グラミアンに基づいて (19) 式の形で双対システムの H_2 ノルムを評価すると、結果的に元のシステムの可観測性グラミアンに基づいた (異なる) H_2 ノルムの表現が導かれる点とは大きく異なっている。

(注意 3) 定理 2 では、与えられた離散時間システム G に対して、 $\|G\|_2^2$ と l_∞ 誘導ノルムが一致する SISO の外部非負システム G_{sq} を構成することができた。これは、(15) 式の右辺第 1 項の構造が左から $(C_i \otimes C_i)$ が、右から $(B_j \otimes B_j)$ がかかる形になっており、そのためこれらを $i=1, \dots, l$ および $j=1, \dots, m$ に関してまとめる形で G_{sq} を (16) 式のように定義することで次式を成立させることができたためである。

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{\infty} g_{ij}(k)^2 = C_{sq}(I - A_{sq})^{-1} B_{sq} + D_{sq}$$

この点は、単一の Lyapunov 方程式 (20) に基づいて H_2 ノルムを (19) 式の形で特徴づけられている点と密接に関連している。一方、(28) 式の中段の式の第 1 項の構造は、左から $(B_j^T \otimes C_i)$ が、右から $(C_i^T \otimes B_j)$ がかかる形になっている。したがってこの表現に直接的に基づいて l_∞ 誘導ノルムが $\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{\infty} g_{ij}(k)^T g_{ij}(k)$ と一致するよ

うな単一の n^2 次の SISO 外部非負システムを構成することは難しい。この点が、定理 3 においては (30) 式で表される lm 個の Sylvester 方程式を解かねばならない理由になっていると考えられる。

6. LMI を用いた H_2 ノルムの新たな表現

線形時不変システムの H_2 ノルムは、LMI によっても特徴づけられることがよく知られている。すなわち、(1) 式で表されるシステム G が安定であり（すなわち行列 A が Schur 安定であり）かつ $\|G\|_2 < \gamma$ が成立するための必要十分条件は、 $AXA^T - X + BB^T \prec 0$ および $\text{trace}(CXC^T + DD^T) < \gamma^2$ を満足する $X \in \mathbb{S}_{++}^n$ が存在することである [15–17]。 H_2 ノルムに限らず、制御性能を特徴づける LMI 表現はたとえばパラメトリックな不確かさを有するシステムのロバスト性能解析や設計などにおいて有用である [18]。さらに新たな LMI 表現を導くことで、解析や設計における保守性を低減できる可能性がある。そこで本節では、離散時間線形時不変システムの H_2 ノルムに関して、上記のよく知られた LMI とは異なる形の LMI を (16) 式で表される外部非負システムに基づいて導出することを考える。そのような LMI 表現は、(18) 式より SISO の外部非負システムの l_∞ 誘導ノルムを特徴づける LMI を導出すれば獲得できることが容易にわかる。この LMI をつぎの定理に示す。

【定理 4】 (1) 式で表されるシステム G が SISO で外部非負であると仮定する。このとき、与えられた $\gamma > 0$ に対してつぎの条件は等価である。

(i) 行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が Schur 安定でありかつ $\|G\|_{\infty, \infty} = G(1) < \gamma$ が成立する。

(ii) 次式を満足する $P \in \mathbb{S}_{++}^n$ が存在する。

$$\begin{bmatrix} A^T P A - P & A^T P B + C^T \\ B^T P A + C & B^T P B + D + D^T - 2\gamma \end{bmatrix} \prec 0 \quad (33)$$

(iii) 次式を満足する $X \in \mathbb{S}_{++}^n$ が存在する。

$$\begin{bmatrix} AXA^T - X & AXC^T + B \\ CXA^T + B^T & CXC^T + D + D^T - 2\gamma \end{bmatrix} \prec 0 \quad (34)$$

この定理の証明は付録 1. に記した。

(注意 4) 離散時間システムに限らず、LMI に基づく非負システムの解析に関する研究のほとんどは対象を内部非負システムに限定している [4, 8, 10, 11, 19]。その理由は、解析や設計に関する新たな LMI 条件を導くうえで、

内部非負システムの性質を容易に活用できるからである。一方、定理 4 に示した結果は外部非負システムを対象にしたものであり、筆者らの知る限りこの結果は新しいものである。付録に記すように、定理 4 の証明においては文献 [20–23] にならない LMI の双対性に基づいて議論を進め、証明の最終段階においてシステムの外部非負性をうまく利用することで証明を完成させている。証明の詳細は付録 1. を参照されたい。なお、付録に記した補題 4 より、SISO かつ安定な外部非負システム G に関しては $G(1) = \|G\|_{\infty, \infty} = \|G\|_\infty$ が成立することがわかる。すなわち l_∞ 誘導ノルム $\|G\|_{\infty, \infty}$ と H_∞ ノルム $\|G\|_\infty$ は一致する。したがって定理 4 の結果は (i) の条件を“行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が Schur 安定でありかつ $\|G\|_\infty = G(1) < \gamma$ が成立する”と書き換えても正しいことがわかる。すなわち、LMI 表現 (33) と (34) は、SISO の外部非負システム G の H_∞ ノルムを特徴づけるものにもなっている。逆に再び $G(1) = \|G\|_{\infty, \infty} = \|G\|_\infty$ なる結果が成立することより、SISO の外部非負システム G の l_∞ 誘導ノルムは、標準的な有界実補題 [17] に基づく LMI によっても特徴づけられることもただちにわかる。

以上で示した定理 2、定理 4 および (16) 式より、(1) 式で表されるシステム G の H_2 ノルムに関してつぎの定理が成立することがわかる。この定理は、システム G の H_2 ノルムを特徴づける新たな LMI 表現を与えるものである。

【定理 5】 (1) 式で表されるシステム G を考える。与えられた $\gamma > 0$ に対して、つぎの条件は等価である。

(i) 行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が Schur 安定でありかつ $\|G\|_2 < \gamma$ が成立する。

(ii) 次式を満足する $P \in \mathbb{S}_{++}^{n^2}$ が存在する。

$$\begin{bmatrix} A_{sq}^T P A_{sq} - P & A_{sq}^T P B_{sq} + C_{sq}^T \\ B_{sq}^T P A_{sq} + C_{sq} & B_{sq}^T P B_{sq} + D_{sq} + D_{sq}^T - 2\gamma^2 \end{bmatrix} \prec 0 \quad (35)$$

(iii) 次式を満足する $X \in \mathbb{S}_{++}^{n^2}$ が存在する。

$$\begin{bmatrix} A_{sq} X A_{sq}^T - X & A_{sq} X C_{sq}^T + B_{sq} \\ C_{sq} X A_{sq}^T + B_{sq}^T & C_{sq} X C_{sq}^T + D_{sq} + D_{sq}^T - 2\gamma^2 \end{bmatrix} \prec 0 \quad (36)$$

ここで $A_{sq} \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$, $B_{sq} \in \mathbb{R}^{n^2 \times 1}$, $C_{sq} \in \mathbb{R}^{1 \times n^2}$ および $D_{sq} \in \mathbb{R}$ は (16) 式で定義される。

7. 数値例

(1) 式で表されるシステム G の係数行列が次式で与えられる場合を考える。

$$A = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.1 & -0.8 \\ 0.7 & 0.5 & -0.9 \\ -0.3 & 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.2 \\ -0.5 & -0.5 \\ 0.7 & -0.3 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & -0.2 \\ 0.6 & -0.4 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.2 \\ 0.5 & -0.2 \end{bmatrix}$$

上式において行列 A のスペクトル半径は 0.8254 であり行列 A は確かに Schur 安定である。このシステムの H_2 ノルムを定理 2 の (18) 式、標準的な可制御性グラミアン

に基づく方法, 定理 3 の (29) 式, および定理 5 の LMI 表現 (35) 式に基づいて求めたところ, いずれも 1.5100 という結果を得た. なお, (35) 式の LMI を用いる場合には, この LMI 制約のもとで γ^2 を最小化する SDP を解いた. すべての結果が一致しており, この数値計算結果は本論文で導いた諸結果の正当性を裏付けるものになっている.

8. おわりに

本論文では, 外部非負システムへの変換に基づいた離散時間線形時不変システムの H_2 解析について検討を行った. 主結果として, 一般の (すなわち非負とは限らない) MIMO システムの H_2 ノルムを解析する問題を SISO 外部非負システムの l_∞ 誘導ノルムを解析する問題に帰着できることを示し, さらに l_∞ 誘導ノルムの解析を通して離散時間線形時不変システムの H_2 ノルムを特徴づけるさまざまな条件を導いた. このような外部非負システムを介した解析により, よく知られた可制御性グラミアン, 可観測性グラミアン, クロスグラミアンに基づく H_2 ノルムの表現が Lyapunov 方程式や Sylvester 方程式を介さずとも導かれること, また H_2 ノルムを特徴づける新たな LMI 表現が得られることを明らかにした.

なお, 本論文で提案した外部非負システムへの変換手法では, 変換によって得られる外部非負システムの次数がもとのシステムの 2 乗と高く, この点は理論解析を行ううえでも数値計算を行ううえでも好ましくない. したがってより次数の低い外部非負システムを構成する手法を検討することは今後の重要な課題である.

謝 辞

本研究は公益財団法人豊田理化学研究所特定課題研究「制御工学研究者と応用数学研究者の連携による革新的な制御理論構築」の助成のもとで行われた. 記して深く謝意を表す.

参 考 文 献

- [1] L. Farina and S. Rinaldi: *Positive Linear Systems: Theory and Applications*, John Wiley and Sons (2000)
- [2] T. Kaczorek: *Positive 1D and 2D Systems*, Springer (2001)
- [3] A. Rantzer: Scalable control of positive systems; *European Journal of Control*, Vol. 24, No. 1, pp. 72–80 (2015)
- [4] A. Rantzer: On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma for positive systems; *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 61, No. 5, pp. 1346–1349 (2016)
- [5] L. Gurvits, R. Shorten and O. Mason: On the stability of switched positive linear systems; *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 52, No. 6, pp. 1099–1103 (2007)
- [6] O. Mason and R. Shorten: On linear copositive Lyapunov function and the stability of switched positive linear systems; *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 52, No. 7, pp. 1346–1349 (2007)
- [7] R. Shorten, O. Mason and C. King: An alternative proof of the Barker, Berman, Plemmons (BBP) result on diagonal stability and extensions; *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 430, pp. 34–40 (2009)
- [8] T. Tanaka and C. Langbort: The bounded real lemma for internally positive systems and H_∞ structured static state feedback; *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 56, No. 9, pp. 2218–2223 (2011)
- [9] F. Blanchini, P. Colaneri and M. E. Valcher: Copositive Lyapunov functions for the stabilization of positive switched systems; *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 57, No. 12, pp. 3038–3050 (2012)
- [10] C. Briat: Robust stability and stabilization of uncertain linear positive systems via integral linear constraints: L_1 -gain and L_∞ -gain characterization; *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 23, No. 17, pp. 1932–1954 (2013)
- [11] Y. Ebihara, D. Peaucelle and D. Arzelier: Analysis and synthesis of interconnected positive systems; *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 62, No. 2, pp. 652–667 (2017)
- [12] K. Zhou and J. C. Doyle: *Essentials of Robust Control*, Prentice Hall (1998)
- [13] S. Gugercin, A. C. Antoulas and C. Beattie: H_2 model reduction for large-scale linear dynamical systems; *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol. 30, No. 2, pp. 609–638 (2008)
- [14] R. A. Horn and C. A. Johnson: *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press (1991)
- [15] R. E. Skelton, T. Iwasaki and K. Grigoriadis: *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design*, Taylor & Francis (1997)
- [16] 岩崎: LMI と制御, 昭晃堂 (1997)
- [17] 蛭原: LMI によるシステム制御, 森北出版 (2012)
- [18] S. P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan: *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM (1994)
- [19] Y. Ebihara, D. Peaucelle and D. Arzelier: LMI approach to linear positive system analysis and synthesis; *Systems and Control Letters*, Vol. 63, No. 1, pp. 50–56 (2014)
- [20] A. Rantzer: On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma; *Systems and Control Letters*, Vol. 28, No. 1, pp. 7–10 (1996)
- [21] C. W. Scherer: Relaxations for robust linear matrix inequality problems with verifications for exactness; *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol. 27, No. 2, pp. 365–395 (2005)
- [22] I. Masubuchi and C. W. Scherer: A recursive algorithm of exactness verification of relaxations for robust SDPs; *Systems and Control Letters*, Vol. 58,

- No. 8, pp. 592–601 (2009)
- [23] Y. Ebihara, Y. Onishi and T. Hagiwara: Robust performance analysis of uncertain LTI systems: Dual LMI approach and verifications for exactness; *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 54, No. 5, pp. 938–951 (2009)
- [24] V. Balakrishnan and L. Vandenberghe: Semidefinite programming duality and linear time-invariant systems; *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 48, No. 1, pp. 30–41 (2003)
- [25] C. W. Scherer: LMI relaxations in robust control; *European Journal of Control*, Vol. 12, No. 1, pp. 3–29 (2006)

付 録

付録 1. 定理 4 の証明

証明にはつぎの補題を用いる。

【補題 4】 (1) で表されるシステム G が SISO かつ安定かつ外部非負であるとする。このとき $C(I-A)^{-1}B + D = G(1) \geq |G(e^{j\theta})|$ ($\forall \theta \in [0, 2\pi)$) が成立する。さらに $C(I-A)^{-1}B \geq 0$ が成立する。

(補題 4 の証明) 与えられた $\theta \in [0, 2\pi)$ を用いて、システム G に非負入力 $w(k) = 1 + \sin(\theta k + \delta)$ を加えることを考える。ただし $\delta \in [0, 2\pi)$ である。このとき、システム G は安定であるから、任意の $\varepsilon > 0$ に対して整数 $K_\varepsilon > 0$ が存在して、 $\forall k \geq K_\varepsilon$ に対して次式が成立する。

$$|z(k) - (G(1) + |G(e^{j\theta})|\sin(\theta k + \delta + \phi_\theta))| < \varepsilon \quad (\forall \delta \in [0, 2\pi))$$

ただし $\phi_\theta = \arg(G(e^{j\theta}))$ である。したがって、とくに $\sin(\theta K_\varepsilon + \delta + \phi_\theta) = -1$ が成立するように $\delta \in [0, 2\pi)$ を選ぶことで次式を得る。

$$|z(K_\varepsilon) - (G(1) - |G(e^{j\theta})|)| < \varepsilon$$

ここで仮定よりシステム G は外部非負であるから $z(K_\varepsilon) \geq 0$ が成立する。よって上式より $G(1) - |G(e^{j\theta})| + \varepsilon > 0$ を得る。 $\varepsilon > 0$ は任意であったから $G(1) \geq |G(e^{j\theta})|$ である。さらに上記の結果はおおのこの $\theta \in [0, 2\pi)$ について成立するから $G(1) \geq |G(e^{j\theta})|$ ($\forall \theta \in [0, 2\pi)$) が成立する。

以上で示した性質は、システム G において直達項 D を 0 にすることで得られる安定な外部非負システム G_0 に対しても明らかに成立する。すなわち $G_0(1) \geq |G_0(e^{j\theta})|$ ($\forall \theta \in [0, 2\pi)$) である。したがって、とくに $G_0(1) = C(I-A)^{-1}B \geq 0$ が成立する。□

この補題をもとに、以下では定理 4 の証明を与える。なお、条件 (ii) と (iii) の等価性は初等的な合同変換により簡単に証明できる。したがって以下では条件 (i) と (ii) の等価性を証明する。

(定理 4 の証明)

(i) $\Leftarrow$ (ii): 条件 (ii) が成立すると仮定する。このとき

(33) 式で表される LMI が成立するから $P \in \mathbb{S}_{++}^n$ に関する (離散型) Lyapunov 不等式 $A^T P A - P \prec 0$ が成立し、したがって行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は明らかに Schur 安定である。さらに (33) 式は等価的につぎのように書ける。

$$\begin{bmatrix} 0 & C^T \\ C & D + D^T - 2\gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} \prec 0 \quad (\text{A1})$$

上式の左から $[B^T(I-A)^{-T} \ 1]$ を、右からその転置をかけると

$$\begin{aligned} & C(I-A)^{-1}B + B^T(I-A)^{-T}C^T + D + D^T - 2\gamma \\ & + \begin{bmatrix} (I-A)^{-1}B \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I-A)^{-1}B \\ 1 \end{bmatrix} \\ & = 2G(1) - 2\gamma \\ & + \begin{bmatrix} (I-A)^{-1}B \\ (I-A)^{-1}B \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I-A)^{-1}B \\ (I-A)^{-1}B \end{bmatrix} \\ & = 2G(1) - 2\gamma < 0 \end{aligned}$$

が成立することがわかる。これより明らかに $G(1) < \gamma$ が成立する。

(i) $\Rightarrow$ (ii): 以下では、(i) $\Rightarrow$ (ii) が成立することを直接証明するのではなく、(i) $\Rightarrow$ (ii)' が成立することを証明する。ただし条件 (ii)' は次のように表される。

(ii)' (33) 式を満足する $P \in \mathbb{S}^n$ が存在する。

いったん (i) $\Rightarrow$ (ii)' が成立することが示されれば、行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が Schur 安定であることと $A^T P A - P \prec 0$ が成立することから $P \in \mathbb{S}_{++}^n$ を得る。すなわち、(i) $\Rightarrow$ (ii) であると結論づけることができる。

(i) $\Rightarrow$ (ii)' が成立することを背理法により証明するために、条件 (ii)' が成立しないと仮定する。このとき、LMI の双対性 [18, 24, 25] より、次式を満足する $H \in \mathbb{S}_+^{n+1} \setminus \{0\}$ が存在する。

$$\text{trace} \left(\begin{bmatrix} A^T P A - P & A^T P B + C^T \\ B^T P A + C & B^T P B + D + D^T - 2\gamma \end{bmatrix} H \right) \geq 0 \quad (\text{A2})$$

$\forall P \in \mathbb{S}^n$

上式中の Lagrange 乗数 H を

$$H =: \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12}^T & H_{22} \end{bmatrix}, \quad H_{11} \in \mathbb{S}_+^n, \quad H_{22} \in \mathbb{R}_+$$

のように分割すると、(A2) 式は等価的につぎのように書ける。

$$\text{trace}(P([A \ B]H[A \ B]^T - H_{11})) \geq 0 \quad \forall P \in \mathbb{S}^n \quad (\text{A3})$$

$$CH_{12} + (D - \gamma)H_{22} \geq 0$$

上式が成立するための必要十分条件は次式で表される。

$$\begin{aligned} & [A \ B]H[A \ B]^T - H_{11} = 0 \\ & CH_{12} + (D - \gamma)H_{22} \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

ここで $H_{11} = 0$ であると仮定すると、 $H \in \mathbb{S}_+^{n+1} \setminus \{0\}$ より $H_{12} = 0$ かつ $H_{22} > 0$ を得る。したがって上式より $D \geq \gamma$ を得る。これは補題 4 の後半の主張より $G(1) =$

$C(I-A)^{-1}B+D \geq \gamma$ が成立することを意味しており (i) に矛盾する。

したがって以下では $H_{11} \neq 0$ の場合のみを考える。このとき、 $H_{22}=0$ であると仮定すると (A4) 式より次式を得る。

$$AH_{11}A^T - H_{11} = 0, H_{11} \in \mathbb{S}_+^n \setminus \{0\}$$

これは行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が Schur 安定であるという (i) の条件に明らかに矛盾する。以上より結局 $H_{11} \neq 0$ かつ $H_{22} \neq 0$ が成立する場合を考えれば十分である。さらに (A4) 式の線形性より $H_{22}=1$ として一般性を失わない。

以上の準備的な考察をもとに、Lagrange 乗数 H のフルランク分解をつぎのように表す。

$$H =: \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}^T, H_1 \in \mathbb{R}^{n \times r_H}, H_2 \in \mathbb{R}^{1 \times r_H} \quad (\text{A5})$$

このフルランク分解を用いると、(A4) 式の最初の等式を等価的につぎのように書き直すことができる。

$$(AH_1 + BH_2)(AH_1 + BH_2)^T = H_1 H_1^T$$

この等式が成立するための必要十分条件は、次式を満足する直交行列 $\Omega \in \mathbb{R}^{r_H \times r_H}$ が存在することである [17]。

$$AH_1 + BH_2 = H_1 \Omega$$

ここで Ω は直交行列であるので、そのスペクトル分解はつぎのように表される。

$$\Omega = UAU^*$$

$$\Lambda = \text{diag}(e^{j\theta_1}, \dots, e^{j\theta_{r_H}}), \theta_i \in [0, 2\pi) \quad (i=1, \dots, r_H)$$

ただし $U \in \mathbb{C}^{r_H \times r_H}$ はユニタリ行列である。このユニタリ行列を用いて

$$\bar{H}_1 := H_1 U = [f_1, \dots, f_{r_H}], f_i \in \mathbb{C}^n$$

$$\bar{H}_2 := H_2 U = [g_1, \dots, g_{r_H}], g_i \in \mathbb{C}$$

と定義すると、 $AH_1 + BH_2 = H_1 \Omega$ なる等式より次式を得る。

$$A\bar{H}_1 + B\bar{H}_2 = \bar{H}_1 \Lambda$$

$$\Rightarrow Af_i + Bg_i = e^{j\theta_i} f_i \quad (i=1, \dots, r_H)$$

$$\Rightarrow f_i = (e^{j\theta_i} I - A)^{-1} Bg_i \quad (i=1, \dots, r_H) \quad (\text{A6})$$

ここで上式のように $e^{j\theta_i} \notin \sigma(A)$ ($i=1, \dots, r_H$) が成立する場合のみを考えれば十分である。なぜならもし $e^{j\theta_i} \in \sigma(A)$ であれば、行列 A は Schur 安定でなく (i) の条件に矛盾するからである。一方、 $CH_{12} + (D - \gamma) \geq 0$ より次式が導かれる。

$$C[f_1, \dots, f_{r_H}][g_1, \dots, g_{r_H}]^* + D \geq \gamma$$

上式と (A6) 式および $H_{22} = [g_1, \dots, g_{r_H}][g_1, \dots, g_{r_H}]^* = 1$ より次式が成立することがわかる。

$$\sum_{i=1}^{r_H} (C(e^{j\theta_i} I - A)^{-1} B + D) g_i g_i^* \geq \gamma, \quad \sum_{i=1}^{r_H} g_i g_i^* = 1$$

上式は等価的につぎのように書ける。

$$\sum_{i=1}^{r_H} G(e^{j\theta_i}) g_i g_i^* \geq \gamma, \quad \sum_{i=1}^{r_H} g_i g_i^* = 1$$

これは明らかに次式が成立することを示している。

$$\sum_{i=1}^{r_H} |G(e^{j\theta_i})| g_i g_i^* \geq \gamma, \quad \sum_{i=1}^{r_H} g_i g_i^* = 1$$

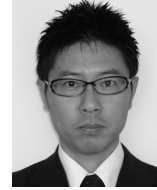
ここで補題 4 より $G(1) \geq |G(e^{j\theta_i})|$ ($i=1, \dots, r_H$) が成立するため、上式より次式を得る。

$$\sum_{i=1}^{r_H} G(1) g_i g_i^* \geq \gamma, \quad \sum_{i=1}^{r_H} g_i g_i^* = 1$$

上式は $G(1) \geq \gamma$ が成立することを示しており、これは (i) の条件に矛盾する。以上で証明が完了した。 $\square$

著者略歴

えび はら よし お
蛸 原 義 雄 (正会員)



2002 年 3 月京都大学大学院工学研究科電気工学専攻博士後期課程修了。同年 4 月京都大学大学院工学研究科助手、2010 年同研究科准教授となり現在に至る。数値最適化手法を用いた制御系の解析、設計に関する研究に従事。京都大学博士 (工学)。計測自動制御学会、日本鉄鋼協会、IEEE などの会員。

せ べ のほろ
瀬 部 昇 (正会員)



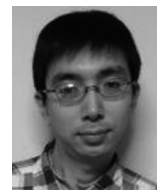
1989 年 3 月東京大学大学院工学系研究科計数工学専攻修士課程修了。東京大学工学部助手、同大学講師、九州工業大学情報工学部助教授を経て、2009 年同大学大学院情報工学研究科教授となり現在に至る。ロボ制御に関する研究に従事。博士 (工学)。計測自動制御学会、IEEE などの会員。

ます ぶら いずみ
増 淵 泉 (正会員)



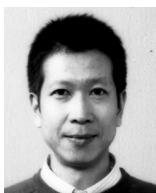
1996 年大阪大学大学院基礎工学研究科博士後期課程修了。広島大学准教授、神戸大学准教授などを経て、2016 年神戸大学大学院システム情報学研究科教授となり現在に至る。システム制御理論に関する研究に従事。博士 (工学)。計測自動制御学会、日本応用数理学会、IEEE などの会員。

わき はや と
脇 隼 人



2007 年 3 月東京工業大学大学院情報理工学研究科数理・計算科学専攻博士課程修了。2012 年九州大学マス・フォア・インダストリ研究所准教授となり現在に至る。最適化理論とその応用に関する研究に従事。博士 (理学)。日本オペレーションズ・リサーチ学会などの会員。

菅 野 政 明



2003 年英国ケンブリッジ大学 PhD 課程修了。同年ケンブリッジ大学工学部研究助手、2005 年科学技術振興機構、CREST 研究員、2009 年新潟大学工学部准教授となり現在に至る。ロバスト制御理論、計算機代数システムの制御系解析・設計への応用、達成可能性に関する研究に従事。PhD、計測自動制御学会、日本機械学会、日本数式処理学会の会員。

椿 野 大 輔 (正会員)



2011 年 3 月東京大学大学院情報理工学系研究科博士課程修了。北海道大学大学院情報科学研究科助教を経て、2015 年名古屋大学大学院工学研究科講師となり現在に至る。階層化最適制御、無限次元システム制御に関する研究に従事。博士（情報理工学）、計測自動制御学会、IEEE などの会員。