

改良された Vortex in Cell 法による 平行平板間乱流の直接数値シミュレーション

名古屋大学 エコトピア科学研究所 内山知実 (Tomomi Uchiyama)
EcoTopia Science Institute, Nagoya University
ソフトウェアクレイドル 吉井佑太郎 (Yutaro Yoshii)
Software Cradle Co., Ltd.
日立ソリューションズ 濱田廣貴 (Hirotaka Hamada)
Hitachi Solutions, Ltd.

Abstract

既報で改良した Vortex in Cell 法による平行平板間乱流の直接数値シミュレーションを実行した。その結果、流れの統計量が既存の DNS データと良く一致し、壁面近傍に現れるストリーク構造と縦渦構造が良好に解像されることを確認した。さらに、スパン軸周りに一定の角速度で回転する平行平板の間隙を流れる発達した乱流の DNS に適用し、統計量や壁面近傍のストリーク構造に及ぼす回転の影響が適切に解析されることも示した。以上より、著者らの VIC 法による平行平板間乱流の DNS の妥当性を示すことができた。

1. 緒言

Vortex in Cell 法 (略して VIC 法) ⁽¹⁾ は、非圧縮性流れの数値解法であり、渦度方程式の解析を通して流れの時間発展を計算する渦法に分類される。その最大の特徴は、渦度場を渦要素で離散化し、個々の渦要素の移流を追跡して移流項を計算することである。この移流項の Lagrange 計算により、数値拡散が抑制され、数値安定性が確保される。このため、乱流の直接数値シミュレーション (DNS) への VIC 法の適用に大きな期待が寄せられ、大規模な渦の移流が支配的な自由せん断流が解析されている ^{(2)~(4)}。しかし、固体壁に沿う乱流については解析例が見当たらないのが現状である。壁乱流は、つねに壁の影響を受け、壁面近傍で乱れの生成や消散などが活発に生起するため、従来の自由せん断流に対する解析方法がそのまま適用できるとは限らない。壁乱流は、乱流摩擦、騒音および熱伝達などと密接に関連する工学的に重要な流れであることから、VIC 法による DNS の方法を確立することは極めて意義深い。

一方、著者らは既報 ⁽⁵⁾ において、VIC 法の解析精度の向上と計算の高速化の方法を提案した。すなわち、離散化式の整合性を確保し、かつ解の不自然な振動を防止するために、スタッガード格子による離散化法を示した。また、ソレノイダルな渦度場を求めるために、渦度の修正方法も提案した。さらに、計算を高速化するために、渦要素の移流に対する単段階計算法も示した。これらの方法を立方体キャビティ内流れの解析に適用し、妥当性と有用性も確認した。提案した方法を用いれば、VIC 法による DNS の精度が格段に向上し、かつ壁乱流も精密に解析されるものと大いに期待できる。

本研究では、壁乱流の代表例であり、DNS による豊富な解析データ ^{(6)~(8)} が発表されている平行平板間乱流を対象として、改良された VIC 法を用いた DNS を実行した。ただし、壁面摩擦速度と流路半幅で定義される Reynolds 数は 180 とした。その結果、流れの統計量が既存の DNS データと良く一致すること、さらに壁面近傍に現れるストリークなどの組織的構造が良好に解像されることを確認した。さらに、回転場におかれた平行平板間乱流を対象とした DNS も実行した。その結果、流れに及ぼす流路の回転の影響が適切に解析されることを確認でき、回転流路内乱流に対する DNS の妥当性も示すことができた。

2. Vortex in Cell (VIC) 法

2.1 渦度方程式と速度の直交分解

非圧縮性流れを解析の対象とすれば、渦度方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\omega \mathbf{u}) = \nabla \cdot (\mathbf{u} \omega) + \nu \nabla^2 \omega \quad (1)$$

ここで、 t は時間、 $\mathbf{u}$ は速度、 ν は動粘度であり、 ω は次式で定義される渦度である。

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u} \quad (2)$$

Helmholtz の定理によれば、速度 $\mathbf{u}$ はベクトルポテンシャル ψ の回転とスカラポテンシャル ϕ の勾配の和として表される。すなわち、

$$\mathbf{u} = \nabla \times \psi + \nabla \phi \quad (3)$$

ψ はスカラ関数の勾配を加えても結果が不変である。この任意性を取り除き、 ψ を一意的に定めるため、 ψ はソレノイダルであるとする。すなわち、

$$\nabla \cdot \psi = 0 \quad (4)$$

式 (3) の回転をとったのち式 (4) を代入すれば、 ψ に関するベクトル Poisson 方程式を得る。

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad (5)$$

一方、式 (3) を連続の式に代入し、恒等式 $\nabla \cdot (\nabla \times \psi) = 0$ を用いて変形すれば、 ϕ に関する Laplace 方程式を得る。

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (6)$$

2.2 計算アルゴリズム

式 (5) と (6) を与えられた境界条件のもとで解き、得られた ψ と ϕ を式 (3) に代入すれば、速度 $\mathbf{u}$ が計算される。この際、式 (5) の渦度 ω は式 (1) から定められる。VIC 法は、渦度場を渦要素で離散化し、各渦要素の移流を追跡して ω を計算する。

渦要素 p の位置ベクトルを $\mathbf{x}_p (= (x_p, y_p, z_p))$ 、渦度を ω_p とすれば、渦度方程式 [式 (1)] はつぎの Lagrange 形式で記述される⁽¹⁾。

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_p) \quad (7)$$

$$\frac{d\omega_p}{dt} = \nabla \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{x}_p) \omega(\mathbf{x}_p)) + \nu \nabla^2 \omega(\mathbf{x}_p) \quad (8)$$

時刻 $t = n\Delta t$ において渦要素の位置と渦度が既知ならば、 $t = (n+1)\Delta t$ における値は式 (7) と (8) の Lagrange 計算から求められる。VIC 法では、流れ場が計算格子に分割され、 ψ 、 ϕ および ω が格子で定義される。 ω が定義される位置を $\mathbf{x}_g (= (x_g, y_g, z_g))$ とすれば、次式で表される渦度 ω が $\mathbf{x}_g$ に付与される。すなわち、 ω をもつ渦要素が格子に再配置される。

$$\omega = \sum_p^{N_v} \omega_p W\left(\frac{x_g - x_p}{\Delta x}\right) W\left(\frac{y_g - y_p}{\Delta y}\right) W\left(\frac{z_g - z_p}{\Delta z}\right) \quad (9)$$

ここで, N_v は渦要素の個数, Δx , Δy および Δz は格子幅である. また, W は再配置関数であり, 次式が多用されている⁽¹⁾.

$$W(\varepsilon) = \begin{cases} 1 - 2.5\varepsilon^2 + 1.5|\varepsilon|^3 & |\varepsilon| < 1 \\ 0.5(2 - |\varepsilon|)^2(1 - |\varepsilon|) & 1 \leq |\varepsilon| \leq 2 \\ 0 & |\varepsilon| > 2 \end{cases} \quad (10)$$

以上より, 時刻 $t=n\Delta t$ における流れ場が既知ならば, $t=(n+1)\Delta t$ の流れが以下の手順で計算される.

1. 格子で定義された渦要素の強度の変化, すなわち渦度 ω_p ($=(\omega_{px}, \omega_{py}, \omega_{pz})$) を式 (8) から求める.
2. 渦要素の移流, すなわち位置 x_p を式 (7) から求める.
3. 格子に渦要素を再配置する. すなわち, 格子における渦度 ω ($=(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$) を式 (9) から求める.
4. ベクトルポテンシャル ψ を式 (5) から求める.
5. スカラポテンシャル ϕ を式 (6) から求める.
6. 速度 u を式 (3) から求める.

3. VIC 法の改良

3.1 スタッガード格子を用いた離散化

非圧縮性流れの MAC 系解法では, 圧力勾配に関する式と連続の式から導かれる, 圧力に関する Poisson 方程式が解かれる. この際, すべての離散化式の整合性を確保し, かつ解の不自然な振動を防止するため, スタッガード格子が用いられる. VIC 法では, 上述のように, ψ に関する Poisson 方程式と ϕ に関する Laplace 方程式が導かれる. したがって, スタッガード格子による離散化は不可欠であると考えられる. しかし, 従来の研究では格子に関する言及はなく, レギュラー格子が用いられているようである.

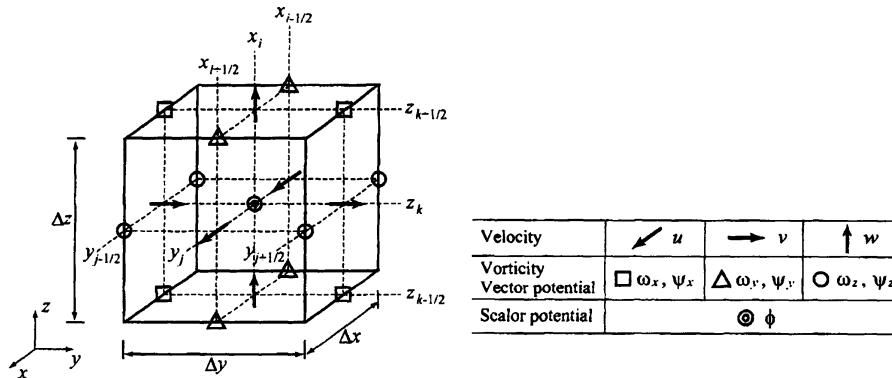


Fig.1 Staggered grid

既報⁽⁵⁾では, 図1に示すようなスタッガード格子による計算法を提案した. 格子の中央にスカラーポテンシャル ϕ , 側面に速度 u , 縁に渦度 ω とベクトルポテンシャル ψ を配置する. これにより, すべての離散化式の整合性が確保される⁽⁵⁾.

3.2 渦度の修正

VIC 法は、渦度場を渦要素で離散化し、式 (9) で表されるように、各渦要素による渦度分布の重ね合わせで表現する。このため、式 (9) から得られる渦度場を ω_r とすれば、 ω_r はソレノイダル条件を必ずしも満たさない⁽¹⁾。ソレノイダル条件を満たす渦度を $\omega_s (= \nabla \times \mathbf{u})$ とすれば、 ω_r は次式⁽³⁾ で表される。

$$\omega_r = \nabla F + \omega_s \quad (11)$$

ここで、 F はスカラー関数であり、式 (11) は ω_r の Helmholtz 分解に相当する。

式 (11) の発散をとれば、つぎの Poisson 方程式を得る。

$$\nabla^2 F = \nabla \cdot \omega_r \quad (12)$$

式 (12) を F について解き、式 (11) に代入すれば、ソレノイダル条件を満たす渦度 ω_s が再計算される⁽³⁾。この渦度の修正は、Poisson 方程式を解く必要があり、計算時間の増加をもたらす。そこで、既報⁽⁵⁾ では、より簡単化された修正方法を提案した。

修正以前の渦度 ω_r は、それに対応するベクトルポテンシャル ψ_r と式 (3) で結ばれているから、その発散をとったのち式 (12) を代入すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \nabla^2 (\nabla \cdot \psi_r) &= -\nabla \cdot \omega_r \\ &= -\nabla^2 F \end{aligned} \quad (13)$$

よって、渦度がソレノイダルでない場合には、 ψ に関するソレノイダル条件の仮定に反して、次式が成り立つ。

$$\nabla \cdot \psi_r = -F \quad (14)$$

渦度 ω_r を用いて式 (5) から ψ_r を求め、式 (6) から ϕ_r を定めた場合、式 (3) から得られる速度 $\mathbf{u}_r$ の回転は、式 (5) と (14) を順次代入すれば、次式のように表される。

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{u}_r &= \nabla \times (\nabla \phi_r + \nabla \times \psi_r) \\ &= \nabla (\nabla \cdot \psi_r) - \nabla^2 \psi_r \\ &= -\nabla F + \omega_r \\ &= \omega_s \end{aligned} \quad (15)$$

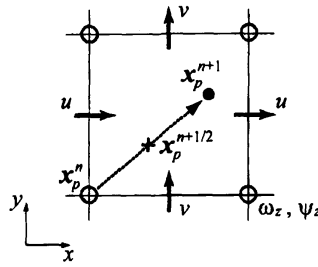
式 (15) は、渦度 ω_r をもとに求められた速度 $\mathbf{u}_r$ の回転をとれば、ソレノイダルな渦度 ω_s が計算されることを示している。この渦度の再計算すなわち渦度修正を式 (3) の計算直後に実行すれば、Poisson 方程式 [式 (12)] を解くことなく、渦度の離散化誤差を完全に除去でき、流れの時間発展を精密に計算できる。ただし、式 (15) における変形が離散化式でも厳密に成り立つためには、離散化の整合性を確保できるスタッガード格子の使用が不可欠である。

3.3 渦要素の移流の単段階計算

時刻 $t=n\Delta t$ において格子に配置された渦要素 p (位置ベクトル $\mathbf{x}_p^n$) は、 $t=(n+1)\Delta t$ において渦度が ω_p^{n+1} に変化する。式 (8) に二次精度の Adams-Bashforth 法を用いれば、 ω_p^{n+1} は次式で計算される。

$$\omega_p^{n+1} = \omega_p^n + \frac{1}{2}\Delta t \left(3 \left. \frac{d\omega_p}{dt} \right|_{(\mathbf{x}_p^n, \omega_p^n)} - \left. \frac{d\omega_p}{dt} \right|_{(\mathbf{x}_p^{n-1}, \omega_p^{n-1})} \right) \quad (16)$$

ただし、空間の離散化には二次精度中心差分を適用する。

Fig.2 Convection of vortex element p

一方、渦要素 p は $\mathbf{x}_p^{n+1}$ に移流する。図2は、 x - y 平面に投影された移流を示す。移流計算すなわち式(7)の時間積分には一般に Runge-Kutta 法が用いられ、任意の位置における速度の空間補間を伴う多段階計算が必要とされる。既報⁽⁵⁾では、格子に配置された渦要素の移流計算であることに着目し、格子における速度勾配を利用する単段階計算法を提案した。

時間に関して二次精度をもつ修正 Euler 法によれば、 $\mathbf{x}_p^{n+1}$ は次式で与えられる。

$$\mathbf{x}_p^{n+1} = \mathbf{x}_p^n + \mathbf{u}(\mathbf{x}_p^{n+1/2}) \Delta t \quad (17)$$

ここで、 $\mathbf{x}_p^{n+1/2}$ は $\mathbf{x}_p^n$ と $\mathbf{x}_p^{n+1}$ の中点を表す(図2参照)。速度を $\mathbf{x}_p^n$ の周りで Taylor 展開して二次以上の項を無視すれば、 $\mathbf{u}(\mathbf{x}_p^{n+1/2})$ は次式で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}_p^{n+1/2}) &= \mathbf{u}(\mathbf{x}_p^n + \Delta \mathbf{x}_p/2) \\ &= \mathbf{u}(\mathbf{x}_p^n) + \nabla \mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{x}_p/2 \end{aligned} \quad (18)$$

ただし、 $\Delta \mathbf{x}_p = \mathbf{x}_p^{n+1} - \mathbf{x}_p^n$ である。

式(18)を式(17)に代入し、 $\mathbf{x}_p^{n+1}$ について解けば次式が得られる。

$$\mathbf{x}_p^{n+1} = \mathbf{x}_p^n + [\mathbf{I} - (\Delta t/2) \nabla \mathbf{u}]^{-1} \mathbf{u}(\mathbf{x}_p^n) \Delta t \quad (19)$$

ここで、 $\mathbf{I}$ は単位行列である。

式(19)は時間に関して二次精度をもちながら、一次精度の時間積分に 3×3 の正方行列を付加しただけの単段階計算法であり、式(17)と比較して、速度の補間計算が不要である。しかも、速度勾配 $\nabla \mathbf{u}$ は渦要素が配置される位置すなわち ω が定義される位置における値であるから、中心差分で精度良く求められる。

4. 平行平板間乱流の DNS

4.1 解析条件

無限に大きい平行平板の間隙を流れる、十分に発達した乱流を解析する。計算領域と座標系を図3に示す。平板間距離 L_y を 2δ 、主流方向長さ L_x を 12.8δ 、スパン方向長さ L_z を 6.4δ とする。主流方向を x 、壁垂直方向を y 、スパン方向を z とし、それぞれの方向の速度を u 、 v 、 w とする。計算領域を $256 \times 512 \times 256$ の等間隔格子に分割する。計算条件を表1にまとめて示す。

上付き添え字 $+$ は壁変数による無次元値、すなわち $y^+ = y u_\tau / \nu$ 、 $t^+ = t u_\tau^2 / \nu$ を表す。ここで、 u_τ は壁面摩擦速度であり、壁面せん断応力 τ_w と密度 ρ を用いて、 $u_\tau = (\tau_w / \rho)^{1/2}$ で定義される。また、上付き添え字 $-$ は x - y 平面と時間に関するアンサンブル平均を表す。

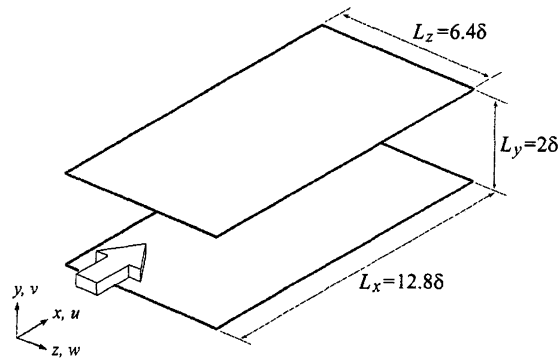


Fig.3 Computational domain and coordinate system

Table 1 Computational conditions for turbulent channel flow

	Streamwise (x)	Wall-normal (y)	Spanwise (z)
Domain length L	12.8δ	2δ	6.4δ
L^+	2304	360	1152
Grid number N	256	512	256
Grid size $\Delta x^+, \Delta y^+, \Delta z^+$	9	0.703	4.5
Time increment Δt^+	0.018		
Reynolds number Re_τ	180		

x および z 方向に周期境界条件を課し，平板壁面上で滑りなし条件を与える．壁面上では，法線方向に流れはなく，かつ $\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0$ であるから， $\boldsymbol{\psi}$ の接線成分は零であり，法線成分の法線方向微分も零である．また， $\boldsymbol{\omega}$ の境界条件は速度の回転により与えられる．以上の壁面境界条件をまとめると次式となる．

$$\boldsymbol{u} = 0 \quad (20)$$

$$\psi_x = 0, \quad \psi_z = 0, \quad \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = 0 \quad (21)$$

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (22)$$

ここで， ω_x と ω_z の計算には，壁面で滑りなし条件を実現するために壁面外側に置いた格子の速度を用いる，二次精度中心差分を適用する．

Poisson 方程式 [式 (5)] の解析に際し，周期 (x および z) 方向に高速 Fourier 変換 (FFT) による方法を用いる．主流を維持するため，一定の断面平均速度 u_m を与える．この場合，スカラーポテンシャルは $\phi = u_m x$ であるから，速度 $\boldsymbol{u}$ は式 (3) を単純化した次式で求められる．

$$\boldsymbol{u} = \nabla \times \boldsymbol{\psi} + u_m \quad (23)$$

Kim ら⁽⁶⁾ の DNS を参考にして $u_m^+ = 15.63$ とした．壁面摩擦速度 u_τ と δ に基づく Reynolds 数 $Re_\tau (= u_\tau \delta / \nu)$ は，Kim らと同様，180 であった．

初期条件として，平均速度には Abe ら⁽⁸⁾ の $Re_\tau = 180$ に対する DNS の結果を用い，乱流強度は DNS⁽⁸⁾ の 3 倍の値を乱数で与える．時間刻み幅 $\Delta t^+ (= \Delta t u_\tau^2 / \nu)$ は 0.018 とする．

4.2 解析結果

平均速度 $\bar{u}^+$ ($=\bar{u}/u_\tau$) の分布を図4に示す。本解析結果は、Abeら⁽⁸⁾の差分法によるDNSと比較すると、対数領域でやや低いが見、流路断面の全域にわたり良好に一致している。なお、AbeらのDNSでは、本論文と同じ大きさの計算領域 ($12.8\delta \times 2\delta \times 6.4\delta$) が $256 \times 128 \times 256$ の不等間隔格子に分割されている。壁垂直方向の格子幅 Δ_y^+ ($=\Delta y u_\tau / \nu$) は、 $0.2 \leq \Delta_y^+ \leq 5.9$ である。

乱流強度は、図5に示すように、差分法によるDNS⁽⁸⁾とほぼ一致する分布が得られている。

渦度変動 ω'^+ ($=\omega' \nu / u_\tau^2$) を求め、そのrms値を壁座標 y^+ に対して示すと図6のようになる。ただし、Abeら⁽⁸⁾の表示法と同様、壁垂直 (y) 方向成分は y^+ で除した値で示してある。本解析結果はAbeらの結果とほぼ一致しており、渦度の変動も良好に解析されていることが判る。

Reynoldsせん断応力 $-\overline{u'^+v'^+}$ の分布を図7に示す。差分法によるDNS⁽⁸⁾と良く一致している。図7には全せん断応力 τ_{total}^+ の分布も併記してある。 τ_{total}^+ が壁面間で直線的に変化しており、流れが統計的に定常な状態にあることを示している。

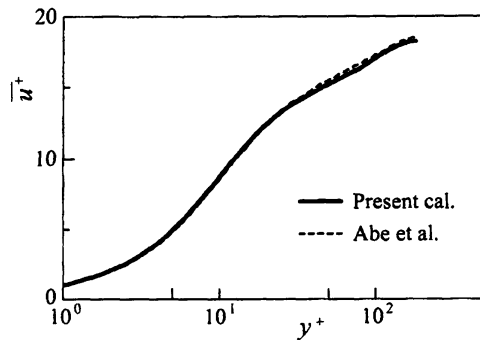


Fig.4 Mean velocity distribution

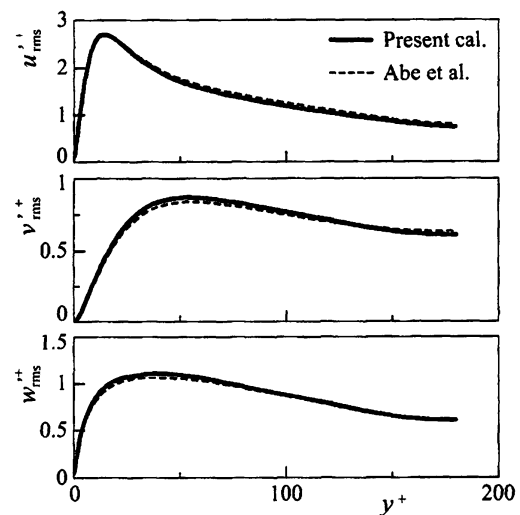


Fig.5 Rms of velocity fluctuation

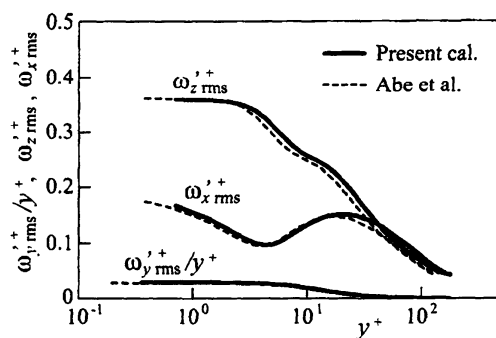


Fig.6 Rms of vorticity fluctuation

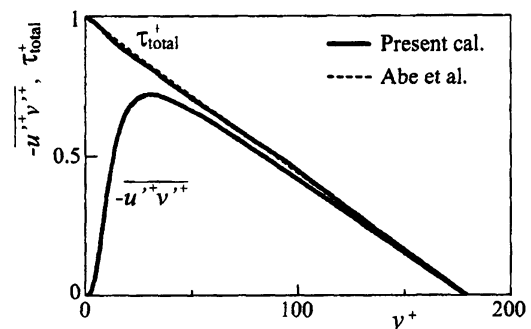


Fig.7 Reynolds shear stress and total shear stress

主流方向およびスパン方向に対する速度変動の二点相関係数 R_{ii} ($i=u, v, w$) の分布を示すと図8および9のようになる。壁面近傍 ($y^+=5.4$) および流路中央部 ($y^+=150$) において、二点相関係数は各方向の計算領域の半分の距離に向かって零に漸近している。したがって、平均流に伴う大規模な渦を捕捉するのに十分に大きな計算領域が確保されていることが判る。

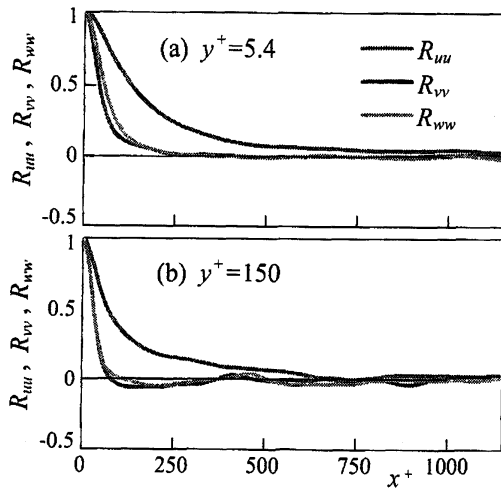


Fig.8 Streamwise two-point correlation coefficient of velocity fluctuation

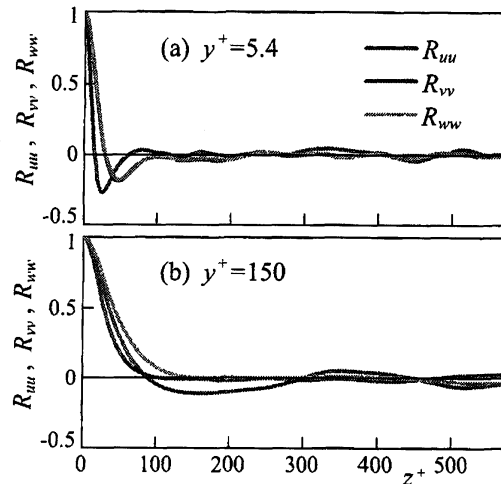


Fig.9 Spanwise two-point correlation coefficient of velocity fluctuation

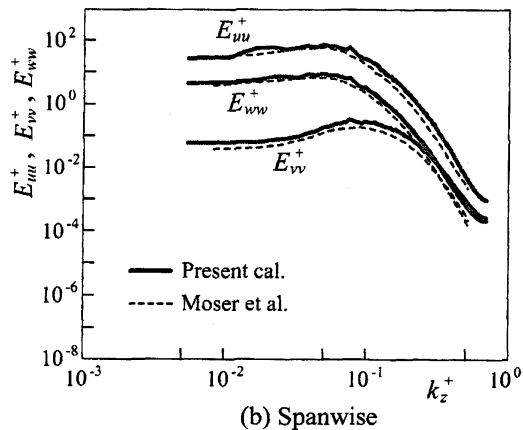
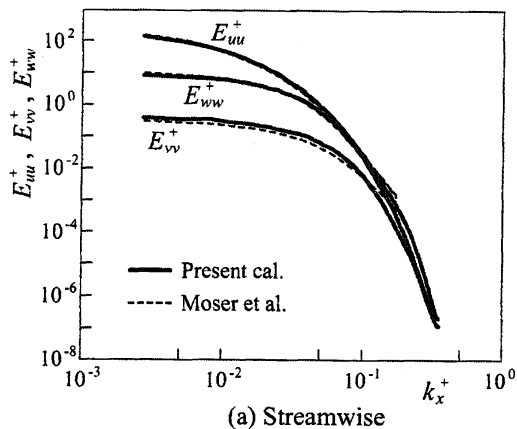


Fig.10 One-dimensional energy spectra of velocity fluctuation

速度変動の一次元エネルギースペクトル E_{ii} ($i=u, v, w$) を求め、 $E_{ii}^+ (=E_{ii}/(u_\tau \nu))$ を主流方向およびスパン方向の波数 k_x^+ および k_z^+ に対して示すと図10のようになる。ただし、 $y^+=5.34$ における結果である。 E_{ii}^+ は高波数の領域で十分に減衰しており、微小な渦も解像できる程度に小さな計算格子が用いられていることを示している。これらの結果は、Moserら⁽⁷⁾の $Re_\tau=180$ に対するDNSとほぼ一致している。本解析結果がやや大きい原因として、壁垂直方向にも等間隔格子を用いているため、壁近傍での格子解像度がやや低いことが考えられる。

平均エントロフィー $\overline{\omega_i'^+ \omega_i'^+}$ の輸送方程式は、次式⁽⁹⁾で表わされる。

$$0 = P^G + P^{GM1} + P^{GM2} + P^T + D^T + D^M + DS \quad (24)$$

ここで、 P^G は勾配生成項、 P^{GM1} は平均勾配生成項 (1)、 P^{GM2} は平均勾配生成項 (2)、 P^T は乱流生成項、 D^T は乱流拡散項、 D^M は粘性拡散項、 DS は消散項であり、それぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} P^G &= -2\overline{\omega_i'^+ u_j'^+} \frac{\partial \overline{\omega_i'^+}}{\partial x_j^+}, \quad P^{GM1} = \overline{\omega_i'^+} \left(\frac{\partial u_j'^+}{\partial x_i^+} + \frac{\partial u_i'^+}{\partial x_j^+} \right) \overline{\omega_j'^+} \\ P^{GM2} &= \overline{\omega_i'^+ \omega_j'^+} \left(\frac{\partial \overline{u_i'^+}}{\partial x_j^+} + \frac{\partial \overline{u_j'^+}}{\partial x_i^+} \right), \quad P^T = \overline{\omega_i'^+ \omega_j'^+} \left(\frac{\partial u_i'^+}{\partial x_j^+} + \frac{\partial u_j'^+}{\partial x_i^+} \right) \\ D^T &= -\frac{\partial}{\partial x_j^+} \left(\overline{\omega_i'^+ \omega_i'^+ u_j'^+} \right), \quad D^M = \frac{\partial^2}{\partial x_j^+ \partial x_j^+} \left(\overline{\omega_i'^+ \omega_i'^+} \right), \quad DS = -2 \left(\frac{\partial \overline{\omega_i'^+}}{\partial x_j^+} \right) \left(\frac{\partial \overline{\omega_i'^+}}{\partial x_j^+} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

$\overline{\omega_i'^+ \omega_i'^+}$ の収支項を図 11 に示す。各項は Abe ら⁽⁸⁾ の DNS の結果とほぼ一致しており、本研究の DNS の妥当性を確認できる。

Reynolds 垂直応力の消散率を把握することは、乱流のモデリングにおいて重要である。図 12 は、消散率 ε_{ii} ($i=u, v, w$) の分布を示す。ここで、たとえば ε_{uu} は次式で計算される。

$$\varepsilon_{uu} = 2 \left(\frac{\partial u'^+}{\partial x_j^+} \right) \left(\frac{\partial u'^+}{\partial x_j^+} \right) \quad (26)$$

壁面近傍における消散率の著しい非等方性が解析され、Abe ら⁽⁸⁾ の結果と良好に一致している。

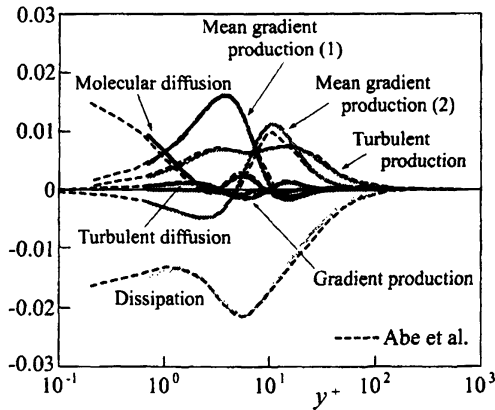


Fig.11 Budget of mean enstrophy $\overline{\omega_i'^+ \omega_i'^+}$

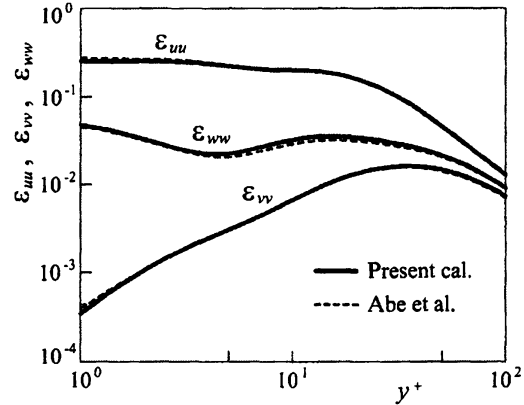


Fig.12 Dissipation rate of Reynolds normal stress

壁面せん断応力 τ_w を計算し、主流方向の変動成分 τ_{wx}^+ ($=\tau'_{wx}/(\rho u_\tau^2)$) の瞬時分布を示すと図 13 のようになる。壁面近傍には高速と低速の流れがスパン (z) 方向に交互に現れるストリーク構造が存在し、その平均間隔は 100 程度であることが知られている。図 13 において、 z 方向の長さは壁面量で 1152 であるが、 τ_{wx}^+ の高い領域と低い領域が z 方向に 11 組程度現れている。したがって、ストリーク構造が適切に解析されていることを確認できる。なお、図 9(a) で示したように、壁近傍 ($y^+=5.4$) において、 z 方向に対する主流方向速度変動の R_{uu} が $z^+=50$ で負の極小値をとる。これは、上述のストリーク構造の捕捉を反映した結果である。

主流方向の速度変動 u'^+ の正負の等値面 ($u'^+=3$, $u'^+=-3$) の瞬時分布を図 14 に示す。流れ方向は左下から右上であり、解析領域の 1/8 に相当する、壁面に接する領域 ($1152 \times 180 \times 576(\nu/u_\tau)^3$) における結果を表示してある。高速 ($u'^+=3$) と低速 ($u'^+=-3$) の流れがスパン方向に交互に

現れるストリーク構造が解像されている．図 14 には，渦構造の抽出に用いられる速度勾配テンソルの第二不変量 Q の等値面 ($Q^+=0.015$) も併記してある．主流方向に軸をもつ縦渦構造が明瞭に可視化されている．このようなストリーク構造と渦構造は既存の知見と一致するものであり，本研究の DNS の妥当性を再確認できる．

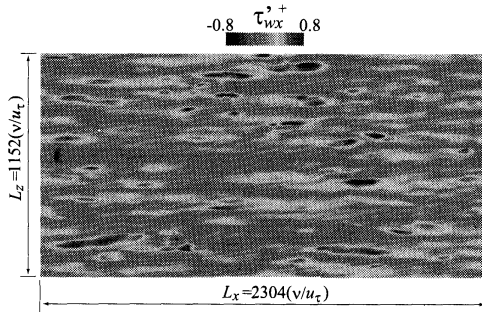


Fig.13 Instantaneous distribution of streamwise wall shear stress fluctuation

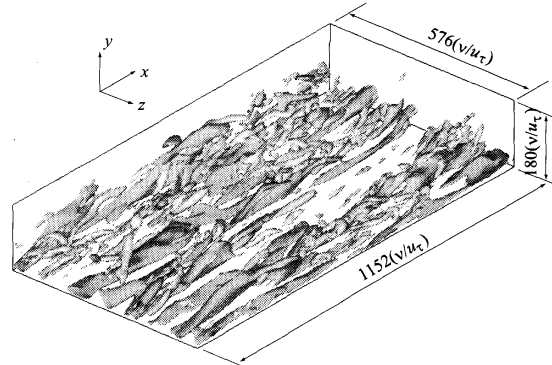


Fig.14 Visualization of high- and low-speed streaks and second invariant of velocity gradient tensor ($u'^+=3$; blue, $u'^+=-3$; yellow, $Q^+=0.015$; light-gray)

5. 回転平行平板間乱流の DNS

5.1 解析条件

一定の角速度 Ω でスパン軸 (z 軸) まわりに回転する，無限に大きい平行平板の間隙を流れる，十分に発達した乱流を解析する．計算領域と座標系は図 3 と同じである．計算領域を $256 \times 512 \times 256$ の等間隔格子に分割する． $y/\delta=0$ および 2 は，それぞれ圧力壁面および負圧壁面である．計算条件を表 2 にまとめて示す．

Table 2 Computational conditions for rotating turbulent channel flow

	Streamwise (x)	Wall-normal (y)	Spanwise (z)
Domain length L	12.8δ	2δ	6.4δ
L^+	2191	342	1096
Grid number N	256	512	256
Grid size $u_\tau h/\nu$	8.56	0.669	4.28
Time increment Δt^+	0.018		
Reynolds number Re_τ	171		
Rotation number Ro_τ	2.1		

x および z 方向に周期境界条件を課し，平板壁面上で滑りなし条件を与える．壁面上での境界条件は 4.1 節で述べた通りである．

前節の静止流路に対する流れを初期条件として，無次元回転数 $Ro_{\tau 0}$ ($=2\Omega\delta/u_{\tau 0}$) を 2 とし，計算した．その結果，圧力壁面と負圧壁面における摩擦速度 $u_{\tau p}$ および $u_{\tau s}$ は， $u_{\tau p}/u_{\tau 0}=1.14$ および $u_{\tau s}/u_{\tau 0}=0.713$ であった．流路回転時の摩擦速度 u_τ は，両壁面に作用する摩擦応力の

平均値に対応させるため、次式で定義する。

$$u_\tau^2 = (u_{\tau p}^2 + u_{\tau s}^2) / 2 \quad (27)$$

本解析では、 $u_\tau/u_{\tau 0}=0.951$ であり、Reynolds 数 $Re_\tau (=u_\tau \delta/\nu)$ は 171, 無次元回転数 $Ro_\tau (=2\Omega\delta/u_\tau)$ は 2.1 である。

時間刻み幅 Δt^+ ($=\Delta t u_\tau^2/\nu$) は 0.018 とした。十分に発達した流れを得るまでに $5100\nu/u_\tau^2$ 時間を要し、その後の $965\nu/u_\tau^2$ 時間において流れの統計量を計算した。

5.2 解析結果

平均速度 $\overline{u}^+$ ($=\overline{u}/u_\tau$) の分布を図 15 に示す。上述の流路静止時 ($Ro_\tau=0$) の分布と比較した場合、速度勾配が圧力壁面 ($y^*=y/\delta=0$) の近傍で増し、負圧壁面 ($y^*=2$) の近傍で減じる。流路中央部における速度勾配は一定であり、無次元回転数 Ro_τ と一致する。

平均速度 $\overline{u}^+$ を壁座標に対して示すと図 16 のようになる。ただし、無次元化には対応する壁面の摩擦速度 $u_{\tau p}$ および $u_{\tau s}$ を用いている。負圧側では、対数領域が消滅しており、その分布が層流に近づいている。圧力側の速度は、対数領域において、流路静止時よりも低い。

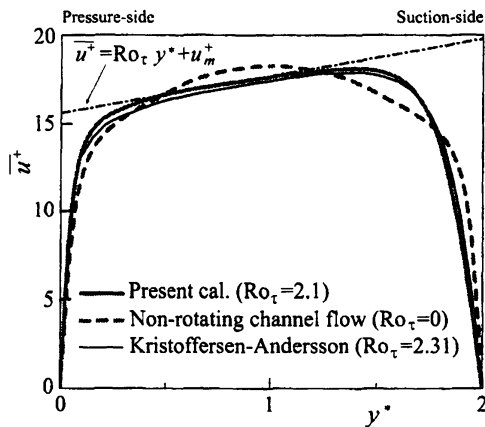


Fig.15 Mean velocity profile in global coordinates

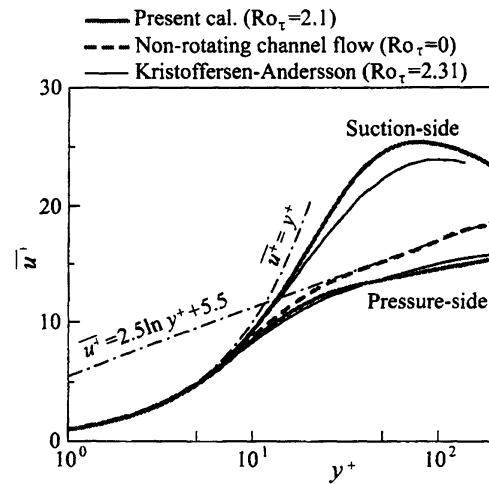


Fig.16 Mean velocity profile in wall coordinates

Reynolds せん断応力 $-\overline{u'^+v'^+}$ の分布を図 17 に示す。回転の影響により圧力側で増大し、負圧側で低下する。

乱流強度の分布を図 18 に示す。流路静止時 ($Ro_\tau=0$) に比べ、乱流強度は圧力側で増し、負圧側で減じている。これは、図 17 に示した Reynolds せん断応力の増減に起因する。

以上の結果は、Kristoffersen-Andersson⁽¹⁰⁾ による $Re_\tau=194$, $Ro_\tau=2.31$ における DNS の結果とほぼ一致しており、回転場におかれた平行平板間乱流の解析に対する著者らの VIC 法の妥当性を確認できる。

図 19 は、主流方向速度変動の二点相関係数 R_{uu} の分布を示す。ただし、圧力壁面および負圧壁面から $\Delta y^+=5.4$ の距離における結果である。図 19(a) は、主流方向に対する分布を示す。回転の影響により、圧力側では R_{uu} がやや低下しており、乱れのスケールが微減していることがわかる。一方、負圧側では R_{uu} の低下が緩やかとなり、図 16 の平均速度分布で見られた、流れが層流に近づいていることを再確認できる。スパン方向に対する R_{uu} の分布を図 19(b) に示す。流路静止時において、 R_{uu} が $z^+=50$ で負の極小値をとるが、これは後述するストリー

ク構造の捕捉を反映した結果である。圧力側では、回転時にも同様の極小値が現れ、 R_{uu} に及ぼす回転の影響は顕著ではない。しかし、負圧側では R_{uu} が負の極小値をとらない。流れが層流に近づき、後述するようにストリークが著しく減じることに対応している。

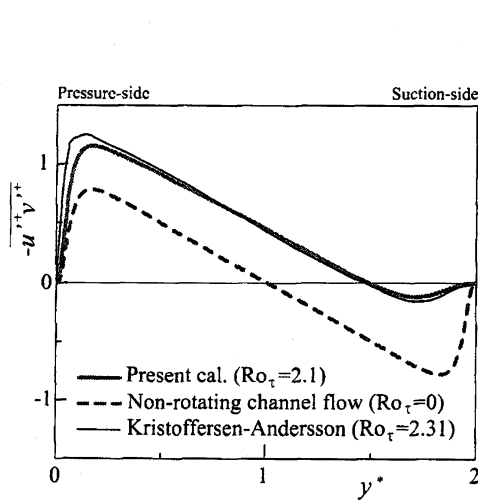


Fig.17 Reynolds shear stress

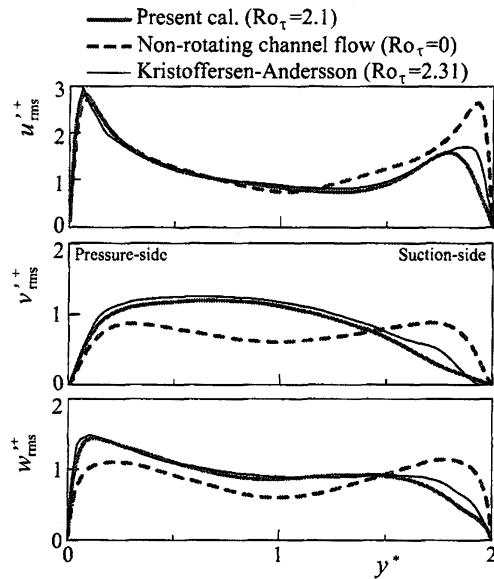
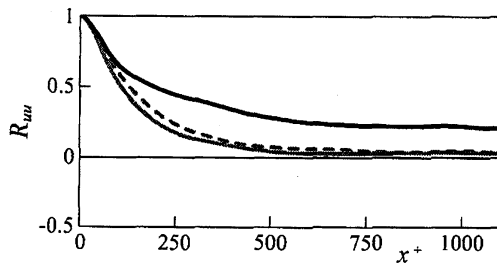
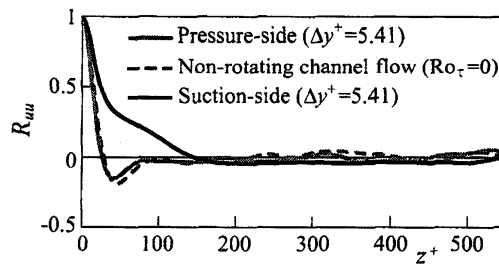


Fig.18 Rms of velocity fluctuation



(a) Streamwise



(b) Spanwise

Fig.19 Two-point correlation of u'

主流方向の速度変動 u'^+ の正負の等値面 ($u'^+=3$, $u'^+=-3$), および速度勾配テンソルの第二不変量 Q の等値面 ($Q^+=0.015$) の瞬時分布を図 20 に示す。ただし、流路中央断面 ($y^*=1$) と壁面の間に現れる等値面を x - z 平面に投影した結果である。図 20(a) は、流路静止時の結果を示す。高速 ($u'^+=3$) と低速 ($u'^+=-3$) の流れがスパン方向に交互に現れるストリーク構造が解像されている。また、 Q の分布から判るように、主流方向に軸をもつ縦渦構造が明瞭に可視化されている。図 20(b) および (c) は、それぞれ負圧側および圧力側の結果である。負圧側では、Reynolds せん断応力の低下により乱流強度が低下しており (図 18 参照)、ストリークが著しく減じている。一方、圧力側では回転の影響はあまり見られない。

図 21 は、図 20 の結果を遠近法表示したものである。負圧面の近傍では、平行平板間乱流で特徴的である、組織的な流れの構造が著しく減少していることを再確認できる。

主流方向と直交する z - y 平面に u'^+ と Q の等値面を投影した結果を図 22 に示す。流路静止時には、図 22(a) に示すように、等値面が壁面の近くに集中しており、流れが壁面近傍で組織的な構造をとっている。しかし、回転時の結果を示す図 22(b) によれば、流路中央部にも局所的に縦渦と低速領域が現れている。

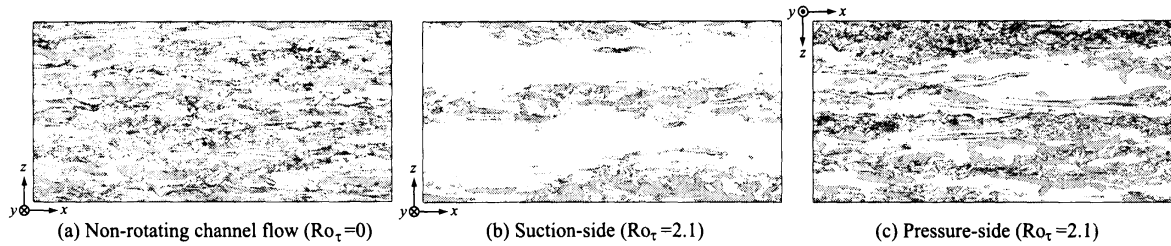


Fig.20 Visualization of high- and low-speed streaks and second invariant of velocity gradient tensor Q ($u'^+=3$; blue, $u'^+=-3$; yellow, $Q^+=0.015$; light-gray)

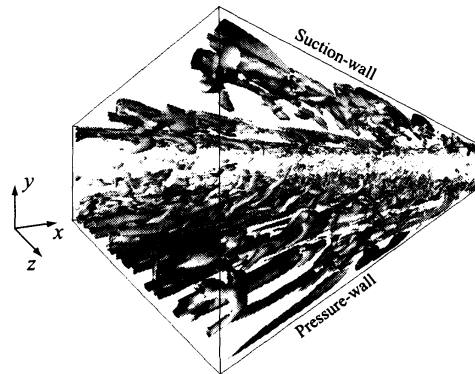


Fig.21 Perspective view of high- and low-speed streaks and second invariant of velocity gradient tensor ($u'^+=3$; blue, $u'^+=-3$; yellow, $Q^+=0.015$; light-gray)

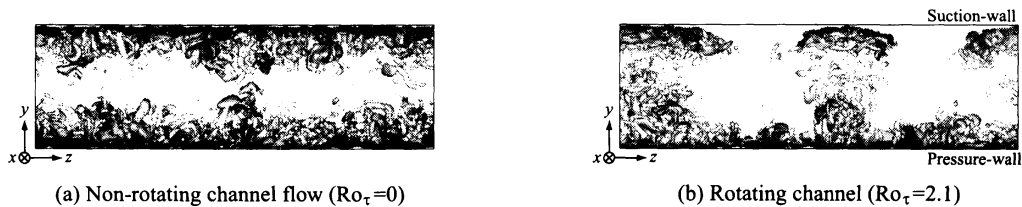
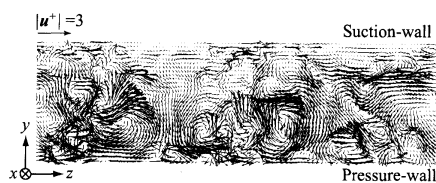


Fig.22 Iso-surfaces of high- and low-speed streaks and second invariant of velocity gradient tensor Q projected onto z - y plane ($u'^+=3$; blue, $u'^+=-3$; yellow, $Q^+=0.015$; light-gray)

図 23 は、主流方向と直交する流路断面 (z - y 平面) における速度分布を示す。ただし、図 22(b) と同時刻における $x^+=0$ ($=12.8\delta$) の断面における結果である。圧力壁面からやや離れた領域に大規模な渦が見られる。

図 23 に示した流路断面において時間平均速度を求めると図 24 になる。ただし、無次元時間 $5.6\delta/u_\tau$ にわたる平均の結果である。二対の渦が観察される。渦中心は、やや圧力側に位置している。これは、Johnston ら⁽¹¹⁾ および児山ら⁽¹²⁾ による実験、三宅・梶島⁽¹³⁾ の LES および Kristoffersen-Andersson⁽¹⁰⁾ の DNS により明らかになっている、Taylor-Görtler 渦型の二次流れに相当する。アスペクト比 $L_z/L_y=\pi$, $Re_\tau=194$, $Ro_\tau=2.31$ に対する Kristoffersen-Andersson⁽¹⁰⁾ の DNS では、二対の渦が求められている。これらの計算条件は本研究とほぼ同じであり、本解析は Taylor-Görtler 渦型の二次流れが適切に解像されているものと判断できる。

Fig.23 Velocity distribution on z - y sectionFig.24 Time-averaged velocity distribution on z - y section

6. 結 論

Vortex in Cell 法による平行平板間乱流の直接数値シミュレーションを実行した。既報で提案した、離散化式の整合性を確保するためのスタッガード格子、ソレノイダルな渦度場を求めるための渦度修正法、および渦要素の移流の計算を高速化する単段階計算法を用いた。

壁面摩擦速度と流路半幅で定義される Reynolds 数が 180 の平行平板間乱流を解析し、流れの統計量が既存の DNS データと良く一致することを示し、壁面近傍に現れるストリーク構造と縦渦構造が良好に解像されることを確認した。さらに、スパン軸周りに一定の角速度で回転する平行平板の間隙を流れる発達した乱流を解析し、統計量や壁面近傍のストリーク構造に及ぼす回転の影響が適切に解析されることも示した。以上より、著者らが改良した VIC 法による平行平板間乱流の DNS の妥当性を示すことができた。

文 献

- (1) Cottet, G.-H. and Koumoutsakos, P. D., Vortex Methods: Theory and Practice, Cambridge University Press, (2000).
- (2) Cottet, G.-H. and Poncet, P., Advances in direct numerical simulations of 3D wall-bounded flows by Vortex-in-Cell methods, *Journal of Computational Physics*, Vol.193(2003), pp.136-158.
- (3) Cocle, R., Winckelmans, G. and Daeninck, G., Combining the vortex-in-cell and parallel fast multipole methods for efficient domain decomposition simulations, *Journal of Computational Physics*, Vol.227(2008), pp.9091-9120.
- (4) Chatelain, P., Curioni, A., Bergdorf, M., Rossinelli, D., Andreoni, W. and Koumoutsakos, P., Billion vortex particle direct numerical simulations of aircraft wakes, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.197(2008), pp.1296-1304.
- (5) 内山知実・吉井佑太郎, 非圧縮性流れ解析に対する Vortex in Cell 法の改良, 日本機械学会論文集 B 編, 77 巻 775 号 B 編, 2011 年, pp.715-724.
- (6) Kim, J., Moin, P. and Moser, R., Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.177(1987), pp.133-166.
- (7) Moser, R. D., Kim, J. and Mansour, N. N., Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau=590$, *Physics of Fluids*, Vol.11(1999), pp.943-945.
- (8) Abe, H., Kawamura, H. and Matsuo, Y., Direct numerical simulation of a fully developed turbulent channel flow with respect to the Reynolds number dependence, *Trans. ASME, Journal of Fluids Engineering*, Vol.123(2001), pp.382-393.
- (9) Abe, H., Antonia, R. A. and Kawamura, H., Correlation between small-scale velocity and scalar fluctuations in a turbulent channel flow, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.627(2009), pp.1-32.

- (10) Kristoffersen, R. and Andersson, H., Direct simulation of low-Reynolds-number turbulent flow in a rotating channel, *J. Fluid Mech.*, Vol.256(1993), pp.163-197.
- (11) Johnston, J. P, Halleen, R. M. and Lezius, D. K., Effects of spanwise rotation on the structure of two-dimensional fully developed turbulent channel flow, *J. Fluid Mech.*, Vol.56(1972), pp.533-557.
- (12) 児山秀晴・ほか4名, 回転場の乱流境界層に及ぼすコリオリ力の効果について (乱れの構造および三次元性について), 日本機械学会論文集B編, 45巻397号, B編(1979), pp.1266-1277.
- (13) 三宅裕・梶島岳夫, 回転流路の乱流の数値解析 (第2報, 乱れの生成におけるコリオリ力の影響), 日本機械学会論文集B編, 52巻474号, B編(1986), pp.765-771.