

【課程博士用】

学 位 審 査 報 告 書

(ふ り が な) 氏 名	みやべ けんし 宮 部 賢 志
学位 (専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 号
学位授与の日付	平成 年 月 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理学研究科 数学・数理解析 専攻
(学位論文題目) An extension of van Lambalgen's Theorem to infinitely many relative 1-random reals (独立性定理における無限個の互いに1ランダムな列への拡張)	
論 文 調 査 委 員	(主査) 長谷川 真人 教授 向井 茂 教授 照井 一成 准教授

理 学 研 究 科

(続紙 1)

京都大学	博士（理 学）	氏名	宮部 賢志
論文題目	An extension of van Lambalgen's Theorem to infinitely many relative 1-random reals （独立性定理における無限個の互いに 1 ランダムな列への拡張）		
(論文内容の要旨)			
Martin-Löf ランダムネスは、計算可能性の観点から、ランダムな 2 進無限列の定義を与えるものである。Martin-Löf ランダムな列は、ランダムな列として自然な性質を多く持っている。その中でも、概念的にも技術的にも重要なのが、1987 年に van Lambalgen が発見した独立性定理である。この定理は、2 進無限列について、「その列が Martin-Löf ランダムであること」と、「その偶数番目の要素からなる列が Martin-Löf ランダムであり、奇数番目の要素からなる列が偶数番目の要素の列に対し相対的に Martin-Löf ランダムであること」という二つの条件が同値であることを主張する。これは、ランダムな列の一部が他の部分の情報を持つことはないという直感にも合致するものである。この定理は、一般に有限個の列への分割に拡張できるが、一方、無限個の列への分割については一方向しか成立しないことが知られている。 本論文の前半では、独立性定理の無限個の分割への拡張が、その最初の有限個の取り替えを許すようにすることで成立することを示した。Martin-Löf ランダムネスは、テスト、マシン、およびマルチンゲールを用いた同値な定義が知られている。もともとの独立性定理はテストに基づく定義を用いて証明されたが、この拡張の証明では、マルチンゲールの、任意の実数について（いわば非離散的な）解析を行うことができるという利点に着目し、マルチンゲールによる定義を利用した。証明のために、まず、マルチンゲールの定義域を、従来の 2 進有限文字列だけでなく、部分文字列を許すように拡張した。また、部分マルチンゲールに関して列の計算可能な入れ替えが可能であることを示した。さらに、saving property と呼ばれる性質が、部分マルチンゲールでは強い意味で成立することを示した。 本論文の後半では、Ω オペレーターの値域の計算可能性について調べた。Ω オペレーターは与えられたチューリングマシンごとに定義され、入力列に対し、その列から相対的に Martin-Löf ランダムかつ左計算可枚挙（その実数より小さい有理数が計算可枚挙）である列を与えるものである。入力列が停止集合、すなわち空集合の 1 回ジャンプであるならば、出力された列の計算可能性が高い（high と呼ばれるクラスに属する）のに対し、圧縮能力は低い（Ω に対し low）ことが知られていた。入力列の計算可能性が高くなるにしたがって出力例の圧縮能力が低くなることは容易にわかるが、本論文では、出力列の計算可能性に関して、入力列が空集合の n 回ジャンプであるときに、出力列が high_n と呼ばれるクラスに属することを示した。さらに、無限個の分割に拡張された独立性定理を使って、すべての n に対して Ω オペレーターの出力列が high_n に属するようなチューリングマシンが存在するような入力列の存在を示した。			

(論文審査の結果の要旨)

本論文の研究は、アルゴリズム的なランダムネスについての基礎的な貢献である。2進無限列（あるいは実数）のランダムネスに関しては、二十世紀前半には確率論的な立場からの考察がなされたが、後に計算論の立場から計算可能性に基づく厳密な定式化が行われ、1960年代の Martin-Löf によるランダムネスの特徴付けをもって、今日見られるような現代的なランダムネスの研究が開始された。本論文は、その Martin-Löf ランダムネスの持つ重要な性質に関する、新しい知見を与えるものである。

本論文の主題は、van Lambalgen の独立性定理の拡張である。独立性定理は、相対的なランダムネスの研究において重要な役割を果たしてきた。もともとの独立性定理は有限個の列への分割に関するものであるが、一方、最近では、無限個の実数の相対的なランダムネスに関する関心が高まってきており、そのために独立性定理の無限個の列への分割への拡張を考える意義は大きい。ただし、無限個の分割への単純な拡張は成立しないことが知られており、本論文では、最初の有限個の取り替えを許すという自然な条件を付加した場合に、独立性定理が成立することを示した。

この結果の証明には、マルチンゲールによる Martin-Löf ランダムネスの特徴付けが本質的に用いられている。また、証明の中で、マルチンゲールの概念の拡張、および拡張されたマルチンゲールの持つ性質の証明など、いくつかの新しいアイデアと考察が導入されている。

さらに、論文の後半では、この拡張された独立性定理を、チューリングマシンの Ω オペレーターが出力する、入力する列に対して相対的に Martin-Löf ランダムな列の計算可能性の高さを調べることに応用している。

このように、本論文の成果は、極めて自然であると同時に新しい内容を多く持つものであり、この分野の今後の発展に大きく寄与することが期待される、意義深いものである。よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、平成22年1月19日論文内容とそれに関連した事項について口頭試問を行った。その結果合格と認めた。