

祖冲之は、如何に円周率 $\pi=355/113$ を得たか？*

How did Zu Chongzhi find his value $\pi=355/113$?

曲安京 (著)

西北大学数学系, 西安, 710069, 中国

城地 茂 (訳)

国立高雄第一科技大学応用日語系, 高雄, 811, 台湾

摘要: 中国古代、暦法家は、紀元 5 世紀初め、閏周法 (置閏法) の計算を簡略化する方法を発明した。構造的な定理を通じて、この計算法を分析し、置閏法が格好の近似法であることを論証した。実際、この計算の意義はある種の連分数の展開と等価である。反復的にこの計算法を使うことによって、非常に容易に近似分数が得られる。

そのため、中国の数学・暦法史上に近似分数が多くみられるのは決して偶然ではない。閏周法の計算が生まれた時期は、ちょうど、祖冲之が活躍した時代である。

具体的な検算を通じ、祖冲之が著名な円周率 $\pi=355/113$ を導き出したのは、この計算を利用した物と断定できる。

キーワード: 円周率, 祖冲之, 円周, 調日法, 連分数

紀元 2000 年は、中国古代の傑出した科学者、祖冲之の没後 1500 周年である。祖冲之 (429-500 年) 一生のうち数学、天文、暦法および技術などの方面で大きな業績を残している。しかし、残念ながら、彼の業績は『大明暦』がほぼ完璧に保存されているだけで、その他は大部分散逸してしまっている。

数学者として祖冲之は、『綴術』という専門書を著した。唐代初期には、国子監の算学館の教材の一つにもなり、李淳風等の奉敕編集した『算経十書』の中にも刊行されている。『綴術』の内容が非常に深かったため、学習するものは少なく、そのため北宋元豊七年 (1084 年)、秘書省が『算経十書』を復刻したときには、既に散逸していた。

祖冲之の数学上の貢献で、もっとも評価されるのは円周率の計算である。『隋書』の記録には、彼が得た円周率の結果が残されている。しかし、残念ながら、その方法は全く伝わっていない。『隋書』の記録で特に注目されるのは、所謂、密率 $\pi=355/113$ である。この密率について、華羅庚は、連分数の展開によるものか、それに相当する計算だと述べている¹。

我々は、連分数展開を利用して、漸近分数列が得られる事を知っている。中国古代数学・暦法史上、

* 陕西省教教育委員会専門事項基金 (99JK095) 援助項目。

著者: 曲安京, 1962 年生まれ。西北大学数学系教授, 大学院博士課程指導教官。E-mail: qaj@sein.sxgb.com.cn

訳者: 城地茂, 1959 年生まれ。国立高雄第一科技大学応用日語系副教授、大学院修士課程指導教官。E-mail: jochi@ccms.nkfust.edu.tw

祖冲之の密率 $\pi=355/113$ 以外に、多くの、所謂、漸近分数が存在している。したがって、研究者は自然にこの種の問題に出会うことになる。連分数展開と類似の算法を中国古代の数学者は発明し、使用していたのだろうか？

この問題には、呂子方が、1950年代に、漢代暦法と五星会合周期常数の研究を通じて、連分数を使用しているという意見を提出しているⁱⁱ。1980年代、李繼閔は更に一步進めて、漢暦の中に、所謂「通其率」という一種の連分数に似た算法を行っていると指摘したⁱⁱⁱ。しかし、筆者は漢代の暦法中の全ての五星会合周期常数を研究し、これらの数値が得られることを示した。すなわち、連分数の計算は全く必要ないということである^{iv-v}。

本稿の目的は、構造的な定理を通じて、中国古代の暦法家が、新しい閏周期を求めるために、一種の算法を発明したことを論じ、その結果より、南北朝の劉宋時代にすでに連分数に相当する計算が行われていたことを実証することにある。

具体的な演算より、祖冲之が当時この方法を利用し、密率 $\pi=355/113$ を導いたと考えられる。

1. 祖冲之の円周率について

円周率は、円周の長さと直径の比率である。これは、常数であり、無理数である。したがって、現在、コンピュータによって10億桁まで計算しても、正確な数値は得られない。

円周率は、古来、数学史家は、ある民族の古典数学文明の発達とみなしてきた。中国古代では、早期から「周三径一」という円周率を用いてきた。つまり、円周率を3としてきたのである。大体、漢代のころ、人々は円周率が3ではないことに気づいた。そして、様々な数値を導いた。三国時代になると、数学者劉徽が『九章算術』を注釈したときに、「割円術」を発明し、中国数学者が円周率を計算する新時代を迎えた。

通常、円周率の近似値は、十進小数や有理数の二種類の形式で表わされる。劉徽が『九章算術』に注釈したとき、我々はこの二種類の近似値を発見したことに気づくだろう。それらは、3.1416と157/50である。この結果は、当時としては相当正確である。南北朝劉宋になると、祖冲之の努力によって、円周率の精度は大きく飛躍した。『隋書』『律曆志』には、下記のようにある。

古之九数，円周率三，円径率一，其術疏舛。自劉歆，張衡，劉徽，王蕃，皮延宗之徒各設新率，未臻折衷。宋末，南徐州從事史祖冲之更開密法，以円直径一億為一丈，円周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽。正数在盈朒二限之間。密率：円径一百一十三，円周三百五十五。約率：円径七，円周二十二。^{vi}

昔の数学では、円周率は3であった。これは粗雑であったので、劉歆，張衡，劉徽，王蕃，皮延宗たちが各新率を出したが、あまり正確ではなかった。（劉）宋末、南徐州・從事史の祖冲之は、更に精密に、円の直径1億を1丈として、計算した。円周率は、3.1415926と3.1415927の間である。密率を113/355、約率を7/22とした。

このように、祖冲之は、割円術によって、円周率の数値を 3.1415916 と 3.1415927 の間とした。これは、祖冲之の円周率の精度を小数点以下 7 桁にしたことになる。また、祖冲之は、二つの円周率の有理数近似値を得て、約率と密率としている。つまり、 $22/7$ と $355/113$ である。この二つの分数も相当すばらしい成果であるが、特に、後者は「祖率」と言われている。その重要性は、祖冲之の盈朒二数により更に注目されている。

祖冲之の約率と密率がなぜ重視されているのだろうか？

現在、我々は円周率を連分数展開したとき、円周率 π の漸近分数は、それぞれ：

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \dots$$

としている。

祖冲之の約率と密率はいずれも円周率 π の漸近分数になっている。更に分析すると、

分母が 16604 より小さい有理数のうち、「祖率」 $355 / 113$ は最も円周率 π に近い分数である。

祖率 $\pi = 355 / 113$ は、西方では、A. Anthoniszoon, (1527-1607) というオランダ数学者が求めたものである。彼によれば、1585 年、アルキメデスの割円術により、

$$\frac{333}{106} < \pi < \frac{377}{120}$$

を得て、この二つの分数から、円周率： $\pi = \frac{333+377}{106+120} = \frac{355}{113}$ を得ている^{vii}。

祖冲之がどのようにして円周率を得たのかは、史料には詳しく記されていない。しかし、研究によれば、基本的に、祖冲之は、大数（盈数）と小数（朒数）を劉徽の割円術を応用して得たと考えられている。直径 1 丈の円の場合、内接 24576 角計形するときこの数値が得られる。

大小二数から、祖冲之の約率と密率を如何にして得たかは明らかではない。近代数学史家はさまざまな仮説を立てているが定論はない。

2. 中国古代暦法で置閏常数を選択する計算

置閏法は、早期の暦法の中、よく用いられる常数である。それは、回帰年の常数 T と朔望月の常数 B の最小公倍数の関係である。仮に一对の正の整数 (p, q) を

$$p \text{ 朔望月} = q \text{ 回帰年}$$

とすると、通常 1 年は 12 月なので q 回帰年ではちょうど、 $p - 12q$ の閏月になる。我々は、整数 (p, q) がこの回帰年と朔望月常数の周期になることが分かる。

早期の中国古代暦法は、みな 19 年 7 閏としている。すなわち、19 回帰年は、235 朔望月に等しくなっている。紀元 4 世紀末の南北朝時代、暦法家はすでにこの周期に問題があることに気づいていた。結果として、閏を多く置きすぎていた。そこで、412 年、北凉の趙岐は、その『元始暦』で新しい周期とした。463 年、祖冲之は、その『大明暦』で、また新たな周期を使った。唐の傅仁均の『庚午元暦』(618 年) 以前の合計 16 の暦法では、10 種類の異なった周期を用いている。面白いことに、これらの周期は全て下記の計算式で表わすことができる。

$$\frac{p}{q} = \frac{136 + 235m}{11 + 19m}$$

この中の 136/11 は、古い 11 年 4 閏制の周期である。もし、我々が回帰年 T と朔望月 B の比 T/B を連分数展開すると、136/11 と 235/19 ちょうど二つの隣の漸近分数になっていることが分かる。

表 1. 中国古代暦法の周期

序	m	p	q	$p - 12q$	採用した暦法 (西暦)
0		235	19	7	太初暦 (-104) ; 四分暦 (85) ; 乾象暦 (206) ; 黄初暦 (220) ; 景初暦 (237) ; 永和暦 (352) ; 太始暦 (365) ; 三紀暦 (384) ; 元嘉暦 (412)
1	20	4836	391	144	大明暦 (463) ; 天和暦 (566)
2	21	5071	410	151	大業暦 (608)
3	22	5306	429	158	開皇暦 (584)
4	23	5541	448	165	大象暦 (579)
5	26	6246	505	186	正光暦 (518) ; 九宮暦 (547)
6	29	6951	562	207	興和暦 (540)
7	31	7421	600	221	元始暦 (412)
8	32	7656	619	228	大同暦 (544) ; 武平暦 (576) ; 孟賓暦 (576)
9	34	8126	657	242	甲寅元暦 (576)
10	35	8361	676	249	天保暦 (550) ; 皇極暦 (604) ; 戊寅元暦 (618)

閏周制は、唐初期にはすでに廃止されていたが、開元年間に現れた太乙数術的暦法に依然として現れている。当時の太乙暦法家は、依然としてその暦法に適切な閏周を見いだすことを試みていた。これと僧・一行の『大衍暦』と同時代の暦法の中で、作者王希明は、『大衍暦』の常数を参考にしてその基本常数を定めている。『開元太乙暦』の基本常数の分析を通じて、我々は、古人が如何にその暦法の中で、閏周を選択したかを理解できる^{viii}。

『大衍暦』より、既知の回帰年常数 $T = 1110343/3040$, 朔望月常数 $B = 89773/3040$, を

$$\frac{T}{B} = \frac{1110343}{89773} = \frac{136 + 235x}{11 + 19x}$$

として、解くと、 $x = 33.7$ になるので、 $m = 34$ 、とする。こうすると、『開元太乙曆』の周期は、

$$\frac{p}{q} = \frac{136 + 235 \times 34}{11 + 19 \times 34} = \frac{8126}{657}$$

として得られる。

この計算によれば、もし祖冲之の回帰年の観測値が $T = 365.2430$ 日、朔望月の観測値が $B = 29.5306$ 日、であれば、

$$\frac{T}{B} = \frac{365.2430}{29.5306} = \frac{136 + 235x}{11 + 19x}$$

となり、これを解いて、 $x = 20.42$ が得られるので、 $m = 20$ とする。そこで、直ちに祖冲之『大明曆』の閏周期

$$\frac{p}{q} = \frac{136 + 235 \times 20}{11 + 19 \times 20} = \frac{4836}{391}$$

が得られる。

3. 閏周計算の数学的意義

下記に述べた閏周算法をまとめてみよう。 θ を十分近い正の実数として、2つの負ではない有理数：

$\frac{a_1}{b_1}$ と $\frac{a_2}{b_2}$ を選び、 x が $\frac{a_1}{b_1}$ と $\frac{a_2}{b_2}$ の間にあり、且つ、

$$|a_1 b_2 - b_1 a_2| = 1$$

とする。

もし、 $\frac{a_2}{b_2}$ が $\frac{a_1}{b_1}$ に比べて実数 θ に更に近接していれば、

$$\theta = \frac{a_1 + a_2 x}{b_1 + b_2 x}$$

となる。そこで、解くと、 $x = \frac{a_1 - b_1 \theta}{b_2 \theta - a_2}$ が得られる。

$x \approx m$, m 表示実数 x の近似整数で表示し、 m を上記の式に戻すと、実数 θ の近似分数が得られる。

$$\theta \approx \frac{p}{q} = \frac{a_1 + a_2 m}{b_1 + b_2 m}$$

この数値は、果たして正確なのだろうか？下記の定理がこの問題に満足の答を与えている。

定理：任意の正の実数 x 、及び負ではない整数 a_1, a_2, b_1, b_2 に対して、もし $|a_1 b_2 - b_1 a_2| = 1$ 、であれば、定義関数

$$f(m) = \frac{a_1 + a_2 m}{b_1 + b_2 m}$$

及び $m=[x]$, m は x の整数部分, 則ち、

- (1) もし $f(m)$ が存在すれば、 $f(m)$ は $f(x)$ の漸近分数。
- (2) もし $1/2 < x - m < 1$ なら、 $f(m+1)$ は $f(x)$ の漸近分数。¹

もし、現代数論の結果を利用すれば、比較的容易に上述の定理を証明できるので、証明の過程はここでは省略する¹⁾。

この定理でこのような問題を説明できる。つまり、反復して閏周計算を利用すれば、十分近似した実数の漸近分数列が得られる。したがって、この事実は、すでになぜ中国古代数学家と暦法家があの様に多くの漸近分数を算出できたかを説明している。

4. 祖冲之の円周率

さて、我々は、祖冲之が如何に円周率 $\pi = \frac{355}{113}$ を得たかを見て行こう。

まず、仮に $3 < \pi < 3.5$, とすると、 $\pi = 3.14$, とすれば、 3 は、 $\pi = 3.14$ により近いので、 $\pi = \frac{7+3x}{2+x}$, となる。これを解けば、 $x = \frac{2\pi-7}{3-\pi} = 5.1$ が得られる。

そこで、 $m=5$ とすれば、

$$\pi = \frac{7+3 \times 5}{2+1 \times 5} = \frac{22}{7}$$

となる。これが、祖冲之の約率である。

次に、既知の $3 < \pi < \frac{22}{7}$ で、 $\pi = 3.1416$ とすれば、 $\frac{22}{7}$ の方が $\pi = 3.1416$ に近いので、

$\pi = \frac{3+22x}{1+7x}$ となり、これを解けば、 $x = \frac{\pi-3}{22-7\pi} = 16.1$ が得られる。

そこで、 $m=16$ とすれば、

$$\pi = \frac{3+22 \times 16}{1+7 \times 16} = \frac{355}{113}$$

が得られる。これが祖冲之の密率である。

上述の演算から、閏周期の計算により、祖冲之の密率が得られることが分かる。我々が必要なものは、二つだけである。

一つは、 $\pi = 3.1416$ である。この数値は、劉徽が割円術ですでに得られている。

¹ 筆者は、構造的なこの定理は、Hardy の『*An Introduction to the Theory of Numbers*』第 10 章 p.10 の定理 172 (参考文献[9], p.140 参照) と考えている。Hardy の定理 172 とは、

$$x = \frac{P\zeta + R}{Q\zeta + S}$$

とする。ここで $\zeta > 1$, P, Q, R, S は整数で、且つ

$$Q > S > 0, PS - QR = \pm 1,$$

を満足させると、 R/S と P/Q は x の 2 つの隣り合った漸近分数になる。

二つめは、 $3 < \pi < \frac{22}{7}$ という事である。この結果より、第一手順の簡単な計算から、祖冲之もすでに得ていた。したがって、祖冲之が密率を得るのは難しいことではなかった。

5. 調日法と隣接する漸近分数

中国古代の数理天文学では、通常分数の形式で暦法の中で用いる天文学常数を選択する。これらの天文学常数は、基本的にみな無理数である。そこで、暦法家たちは、いろいろな算法を考案し、適当な有理数を選んでこれら常数に近づけようとした。この方法は、数学上では、「実数の有理近似」というものである。

実数の有理近似算法は色々あるが、その中で、最も基本的なものは、連分数展開で近似実数の漸近分数を求めるものである。以上の検討から、中国古代の数理天文学で閏周算法をきめるのは、実際連分数展開算法と等価の算法である。

新しい閏周期を求める努力は、5世紀初から始まった。この時、何承天は、『元嘉暦』（443年）で、時適当な朔望月常数をきめるため、所謂「調日法」を発明した。日法とは、通常は暦法の各常数の公分母を指すが、ときには暦取朔望月常数の分母を指す。調日法とは、特別な自然数を日法とする過程で、暦法に応じて朔望月常数を確定するものである。

宋代の暦法家、周琮の記述によれば、調日法とは、暦取朔望月常数を選択する算法であり、南北朝劉宋の暦法家、何承天が創設したものである。簡単に言えば、調日法は、分数の加成性質を使った実数の有理近似算法である。

その手順は大体下記ようになる。

θ を求める近似の実数とする。まず、二つの分数 $\frac{q_1}{p_1} (> \theta)$ と $\frac{q_2}{p_2} (< \theta)$ を選び、これらを強率と弱率とする。分数の加成法則により、我々は、任意の自然数 m と n に対して、必ず

$$\frac{q_1}{p_1} > \frac{q_1 m + q_2 n}{p_1 m + p_2 n} > \frac{q_2}{p_2}$$

があることが分かる。

ここで、 m と n を強数と弱数とする。適当な強数 m と弱数 n より、近似実数 θ の近似分数

$$\frac{q}{p} = \frac{q_1 m + q_2 n}{p_1 m + p_2 n}$$

所謂、調日法とは、強数 m と弱数 n を選択する算法である。それは、元代の『授時暦』（1280AD）以前の暦法家が、選択その暦法の中で朔望月常数を選択するときに用いたことに議論の余地はないだろう。この算法は、広く暦法中のその他の天文学常数をきめるときにも用いられたことも想像に難くない。

調日法は、相当、閏周算法と関係がある。したがって、調日法と閏周算法はほとんど同時に出現しているのも意外なことではない。中国古代の数学者は、反復してこの算法を利用し、いくつかの暦法での常数を求めた。これも理にかなったことである。

この推論は、中国古代数理天文学中になぜ絶え間なく漸近分数常数が現れたのかを説明できる。特に、閏周算法や調日法を利用するために、みな、まず、所謂、「強率」と「弱率」が必要だった。而この二つの数値は、またほとんどが近似実数の隣接する漸近分数だった。たとえば、何承天が調日法算法の中で確定した「強率」(26/49)と「弱率」(9/17)は、朔望月常数の二つの隣接した漸近分数である。

以上の説明から、中国古代の数学者は、これら強率や弱率の数値をきめるとき、目的があり、意識的に、当然決まった方法がある。このような方法で、彼らがこれらの漸近分数が得られることを保証できた。

宋代の著名な暦算家、周琮は、『明天曆議』(1064)で、以前の暦法家が近点月常数をきめるとき、

旧曆課転分，以九分之五為強率，一百一分之五十六為弱率，乃于強弱之際而求秒焉。^{*}

昔の暦は、5/9を「強率」、「56/101」を「弱率」として、この間で秒数を求めた。

上記の文献より『明天曆』の前に、近点月常数の端数は5/9日より小さく、56/101日より大きいことを発見していたことが分かる。またこの二つ分数を強率、弱率として、何承天がつくった調日法算法によって暦法でつかう近点月常数を計算した。中国古代暦法では、基本的に近点月値を27.5545日としていた。したがって、0.5545を連分数展開した時、容易にこの二つが隣接した漸近分数でることに気づくのである！

表 2. 中国古代数理天文学中の隣接する漸近分数

常数	名称	強率	弱率
朔望月余数	朔余/日法	26/49	9/17
近点月余数	転余/日法	5/9	56/101
平気余数	除法/乘法	487/32	1324/87
閏周	章月/章歳	235/19	136/11
交食周期	交率/交数	242/223	777/716

それでは、この二つの数値はどのように得られたのだろうか？前に述べた閏周算法によれば、暦法家の取る近点月 = 27.5545日とすれば、簡単に $1/2 < 0.5545 < 2/3$ と分かる。1/2は、の方が0.5545に近いので、 $0.5545 = \frac{2+x}{3+2x}$ とし、これを解くと、 $x=3.09$ が得られる。 $m=3$ として、

$$\frac{2+3}{3+2 \times 3} = \frac{5}{9}$$

になる。これは、周琮が言う近点月常数の強率である。

また、 $1/2 < 0.5545 < 5/9$, なので、 $5/9$ の方が 0.5545 に近い。そこで、 $0.5545 = \frac{1+5x}{2+9x}$,
 として、これを解くと $x=11.47$ となり、 $m=11$ とすると、

$$\frac{1+5 \times 11}{2+9 \times 11} = \frac{56}{101}$$

になる。これは、周琮が言う近点月常数の弱率である。

中国古代暦法では、回帰年の長さを 24 等分したとき、その数を「平気」の長さという。唐宋代のいくつかの暦法で、暦法家はみな「歩日躔」章で述べている。「平気」を採用したときに、回帰年を 24 段に分けて、それから段ごとに二次の内挿法で、簡単な分数で近似的に「平気」の長さとした。この分数の分子と分母を「除法」と「乗法」とした。唐宋代に、この数値を示した暦法は、合計 11 になる。そのうち、ほとんどの暦法が、 $1811/119$ か $1324/87$ を「平気」の長さの近似分数として採用している。連分数で、「平気」常数を展開すれば、この二つの分数は、ちょうど隣接する漸近分数になることが分かる。

早期の中国古代暦法で、交食周期を使って日月食を予想した。唐代以后、直接交点月を計算し、交食周期は、この種の計算には直接は用いられなかった。ただし、合・朔の時刻に月の黄白道交点からの距離・時間計算するとき、多くの暦法では、交食周期を出している。交食周期とは、以下のような関係である：假定ある一組の整数 p, q, l , を

$$p \text{ 交点月} = q \text{ 朔望月} = l \text{ 交点年}$$

となるものである。

我々は、それらが、交食周期であることに気づくだろう。歴史上比較的有名な交食周期、たとえば、サロス (Saros) 周期：

$$p: q: l = 242:223:19$$

は、宋代の『統天暦』(1199 年) 中で楊忠輔が採用したものである。もうひとつ、有名なニューカム (Newcomb) の周期：

$$p: q: l = 777:716:61$$

は、かつて、李淳風が、『麟德暦』(664 年) で採用している。

唐宋代の暦法に現れる交食周期で、交数 p と交率 l とする。しかし、暦法には、交点年の常数がない。交食周期は、 $q = p - l$, という関係を満足させている。

また、暦法で通常、交点月常数 J と朔望月常数 B , は必ず記載されている。したがって、我々は、 B/J の考察から、 p/q の由来考察できる。

我々は唐宋代の暦法で、朔望月と交点月常数の比 B/J を決定するとき、連分数展開をして、所謂、サロス周期とニューカム周期を発見する。ちょうど、その二つは隣接する漸近分数である。

中国古代の暦法家は、閏周期を決定する算法を発明したのは、実はある種の簡単で有効な実数の有理近似計算である。閏周算法では、簡単に近似実数の漸近分数列を計算することができる。これが、中国古代数学と暦法で大量に近似分数が現れる原因である。

ある種の意義においては、中国古代的閏周算法と連分数算法は等価である。この方法は、だいたい、所謂、何承天の調日法算法と同時期に生まれた。つまり、西暦5世紀初の成果である。

閏周算は、その他のいくつかの暦法常数を選択するときに用いられてきた。たとえば、平気常数、交食周期などである。これらは、議論の余地がない。祖冲之がこれを用いて、円周率の約率と密率を決定したのは、明らかだろう。

参考文献

-
- i 華羅庚. 「從祖冲之的円周率談起」『華羅庚科普著作選集』, 上海: 上海教育出版社, 1984, 47-80.
 - ii 呂子方. 「『三統曆』曆意及其数源」『中国科学技術史論文集』, 成都: 四川人民出版社, 1983.
 - iii 李繼閔. 「“通其率” 积」『中国数学史論文集(一)』, 濟南: 山東教育出版社, 1985.
 - iv 曲安京. 「東漢到劉宋時期曆法五星会合周期数源」『天文学報』, 1992, 33(1): 109-112.
 - v 曲安京. 「漢曆連分数算法說質疑」『数学史研究文集(六)』, 呼和浩特: 内蒙古大学出版社, 1998, 13-21.
 - vi 中華書局(編). 『歷代天文律曆等志汇编(六)』, 北京: 中華書局, 1976, 1859.
 - vii Petr Beckmann. *A History of Pi*. New York: St. Martin's Press, 1971.
 - viii 曲安京. 「唐代太乙術数中の曆法探微」『周秦漢唐研究(一)』, 西安: 三秦出版社, 1997, 381-400.
 - ix Hardy, G. H. and Wright, E. M. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford: Oxford University Press, 1979, 140.
 - x [宋]周琮. 『明天曆議』『歷代天文律曆等志汇编(八)』, 北京: 中華書局, 1976, 2634.