

等質なサブリーマン接触構造の同型群について

奈良女子大学大学院

北川 友美子 (Yumiko Kitagawa)

Division of Integrated Science, Nara Women's University

1 序

奇数次元多様体 M 上の分布 $E \subset TM$ が余次元 1 で非退化であるとき (M, E) を接触多様体とよぶ. E 上にリーマン計量 G が定義されているものを (E, G) と書いてサブリーマン接触構造とよび, (M, E, G) をサブリーマン接触多様体とよぶ.

サブリーマン接触多様体 (M, E, G) と (M', E', G') が isomorphic であるとは微分同型写像 $\varphi: M \rightarrow M'$ が存在して $\varphi_*E = E'$, $\varphi^*G' = G$ をみたすときをいう. 特に $(M, E, G) = (M', E', G')$ であるときそのような φ を自己同型写像 (automorphism) とよび, $\text{Aut}(M, E, G) := \{\varphi: M \rightarrow M \mid \varphi: \text{automorphism}\}$ を自己同型群という. また, $\text{Aut}(M, E, G)$ が M 上推移的であるとき, サブリーマン接触多様体 (M, E, G) は等質であるという.

ここでは, 等質なサブリーマン接触多様体の分類を問題にする. そのことは, その自己同型群 $\text{Aut}(M, E, G)$ を考察することと密接に関係する. 等質なサブリーマン接触多様体の $\text{Aut}(M, E, G)$ が群としてどれくらい多様性を持つかを調べたい. よく知られているように接触多様体 (M, E) の自己同型群は, 無限次元リー群であるが, サブリーマン接触多様体 (M, E, G) の自己同型群は, 接触構造 E のみでなくその上のリーマン計量 G をも不変にするという強い条件から, 有限次元リー群となると考えられる.

そこで自己同型群 $\text{Aut}(M, E, G)$, あるいはそれに対応するリー環 L をより明示的に決定したい. そのためにそのリー環は接触リー環の部分リー環としてどのようにあらわれてくるかを調べ, 報告する.

(M, E, G) を $2n+1$ 次元のサブリーマン接触多様体とする. 点 $x_0 \in M$ の近傍での局所座標 $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n, z)$ を用いて contact form ω を

$$\omega := dz + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x^i dy^i - y^i dx^i)$$

で表す. M の点 x_0 での形式冪級数からなる formal function 全体の集合を $F(M)_{x_0}$ と書く.

形式的ベクトル場

$$\xi = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial y^j} + c \frac{\partial}{\partial z}, \quad a_i, b_j, c \in F(M)_{x_0}$$

で

$$L_\xi \omega = \rho \omega \quad (\exists \rho \in F(M)_{x_0})$$

をみたすものを形式的無限小接触変換とよぶ. 形式的無限小接触変換全体のなすリー環を C で表し, 形式的接触リー環とよぶ. その構造についてはよく知られている [1]. 次に C の基本的な性質をあげておく.

$f \in F(M)_{x_0}$ にたいして

$$\begin{cases} \langle \xi_f, \omega \rangle = f \\ \xi_f \lrcorner d\omega \equiv -df \pmod{\omega} \end{cases} \quad (\text{mod } \omega)$$

によって, 形式的ベクトル場 ξ が唯一つ定まり

$$L_\xi \omega = \rho \omega$$

をみたす. これにより, 写像

$$F(M)_{x_0} \ni f \rightarrow \xi_f \in C$$

が得られるが, これは一対一上への写像である.

$$F(M)_{x_0} \supset H_p := \text{linearspan} \langle \{x^\alpha y^\beta z^\gamma \mid |\alpha| + |\beta| + 2|\gamma| - 2 = p\} \rangle$$

を上に対応で C へ写す. これを $\mathfrak{c}_p$ と書くことにすると, C はベクトル空間として完全直和 $\hat{\bigoplus}_{p \in \mathbb{Z}} \mathfrak{c}_p$ と同型となり, C に重み付きの degree が入るがさらに次が成り立つ.

- (i) $[\mathfrak{c}_p, \mathfrak{c}_q] \subset \mathfrak{c}_{p+q}$
- (ii) $\mathfrak{c}_p = 0 \ (p < -2)$
- (iii) $\dim \mathfrak{c}_{-2} = 1, \dim \mathfrak{c}_{-1} = 2n$
 $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{c}_{-1} \times \mathfrak{c}_{-1} \rightarrow \mathfrak{c}_{-2}$ は非退化.
- (iv) $p \geq 0, x \in \mathfrak{c}_p, [x, y] = 0, \forall y \in \mathfrak{c}_- (= \bigoplus_{q < 0} \mathfrak{c}_q)$ ならば $x = 0$ が成り立つ.
- (v) graded Lie algebra $\bigoplus \mathfrak{c}_p$ は上の性質をみたすものの中で最大.
- (vi) C は $\mathfrak{c}_p$ の完全直和 $\hat{\bigoplus} \mathfrak{c}_p$ にリー環として同型.

さて, $\text{Aut}(M, E, G)$ のリー環を L とすると L は C の部分リー環である.

$C^p := \bigoplus_{k \geq p} \mathfrak{c}_k$, $L^p := C^p \cap L$, $\mathfrak{l}_p := L^p / L^{p+1}$, $\mathfrak{l} := \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \mathfrak{l}_p$
 とおく. $\text{Aut}(M, E, G)$ が M 上推移的ならば

$$(i) \quad \mathfrak{l}_{-2} = \mathfrak{c}_{-2}$$

$$(ii) \quad \mathfrak{l}_{-1} = \mathfrak{c}_{-1}$$

が成り立つ. さらに

$$\mathfrak{c}_0(g) := \{A \in \mathfrak{c}_0 \mid g(Au, v) + g(u, Av) = 0, u, v \in \mathfrak{c}_{-1}\}$$

とおくと,

$$(iii) \quad \mathfrak{l}_0 \subset \mathfrak{c}_0(g)$$

である. 但し, $g: \mathfrak{c}_{-1} \times \mathfrak{c}_{-1} \rightarrow \mathbf{R}$ を正定値内積とする.

そこで, 最初の問題は $\mathfrak{c} = \bigoplus \mathfrak{c}_p$ の graded な部分リー環 $\mathfrak{l} = \bigoplus \mathfrak{l}_p$ で先の (i)(ii)(iii) をみたすものを決定することである. リー環 $\mathfrak{l}$ は有限次元であることが分かり, その最大次元も決まる. 特に $\mathfrak{l}$ が最大次元をとるとき, そのリー環の構造ははっきりと定まる. 第2の問題は, $\mathfrak{l}$ が確定したとき, フィルター付きリー環 L でその associated graded Lie algebra が $\mathfrak{l}$ に一致するものを決定または分類することである. ここでは特に3次元のサブリーマン接触多様体に限って考える.

2 Associated graded Lie algebra の決定

ここでは序章で述べた graded Lie algebra $\mathfrak{l}$ で (i)(ii)(iii) をみたすものを決定する. (M, E, g) をサブリーマン接触多様体とすると, 各点 $x \in M$ にたいして接触構造 E から graded Lie algebra $\mathfrak{h}(x) = \mathfrak{h}(x)_{-2} + \mathfrak{h}(x)_{-1}$ が自然に決まるが, その上にリーマン計量 $g: \mathfrak{h}(x)_{-1} \times \mathfrak{h}(x)_{-1} \rightarrow \mathbf{R}$ が定義された $(\mathfrak{h}(x), g_x)$ を考える. ここで, $\mathfrak{h}(x)_{-1} = E_x$, $\mathfrak{h}(x)_{-2} = T_x M / E_x$ であり, 歪対称双線形写像 $\varphi: \mathfrak{h}(x)_{-1} \times \mathfrak{h}(x)_{-1} \rightarrow \mathfrak{h}(x)_{-2}$ が $\varphi(X, Y) := [X, Y]_x \pmod{E_x}$ で定義される. また, X, Y は, $u, v \in E_x$ について $X_x = u, Y_x = v$ となる E のセクションである. このような $(\mathfrak{h}(x), g_x)$ の標準形はどうなっているのだろうか. 一般に, $2n$ 次元ベクトル空間 V と, その上の正定値内積 $\beta: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ と非退化な歪対称双線形写像 $\varphi: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ の組 (V, β, φ) について V の基 $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ で, $\beta = \beta(e_i, e_j), A = \varphi(e_i, e_j)$ とするとき

$$\beta = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & 0 & \\ \hline & & & \mu_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_n \end{array} \right)$$

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} & & & & \\ & 0 & & -1 & \\ & & \ddots & & \\ & & & & -1 \\ \hline & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 1 \end{array} \right)$$

となるようなものが存在する. このことから, $(\mathfrak{h}(x), g_x)$ について, ある $\mathfrak{h}(x)_{-2}$ の基と $\mathfrak{h}(x)_{-1}$ の基により, 上の意味での標準形で表現できる. そこで, $X_0 \in \mathfrak{c}_0(g)$ を標準形で表現することを考える. 上述のことから分るように, ある実数 μ にたいして $\mathfrak{c}_{-2}$ の基 $\{f_0\}$ と $\mathfrak{c}_{-1}$ の基 $\{f_1, \dots, f_{2n}\}$ で $[f_i, f_j] = 0$, $[f_i, f_{n+i}] = f_0$, $g(f_i, f_j) = \delta_{ij}$, $g(f_{n+i}, f_{n+j}) = \mu_{ij}\delta_{ij}$ となるようなものが存在する. これを用いると,

$$X_0 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A \end{array} \right) + c \left(\begin{array}{c|ccc} 2 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{array} \right)$$

と書ける. 但し,

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right)$$

で $-{}^tA_{11} = A_{22}$. また, A_{12} と A_{21} はそれぞれ対称行列. さらに,

$$K = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ \hline & & & \mu_1 \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & \mu_n \end{array} \right)$$

とするとき, ${}^tAK + KA = 0$ をみtas. このことから X_0 のトレースは消えるので, $X_0 \in \mathfrak{c}_0(g)$ にたいして上の定数 $c = 0$ となる. そして次の命題が得られる.

Proposition 1 *Graded Lie algebra $\mathfrak{l}$ についてその第一延長 $\mathfrak{l}_1$ より先は消える. すなわち $\mathfrak{l}$ は有限次元である.*

証明の概略: $\mathfrak{l}_1$ の任意の元 x_1 について $x_1 = 0$ がいえればよい. $x_0 \in \mathfrak{c}_0(g)$ について, $\rho_{-1}(x_0) : \mathfrak{l}_{-1} \rightarrow \mathfrak{l}_{-1}$ を $\rho_{-1}(x_0)(x_1) := [x_0, x_1]$ により定めると, x_0 の形から $\text{trace}(\rho_{-1}(x_0)) = 0$ となる. このことから, 任意の $x_{-2} \in \mathfrak{l}_{-2}$ について $[x_0, x_{-2}] = 0$ であることが分る. また, 任意の $x_{-2} \in \mathfrak{l}_{-2}, x_{-1} \in \mathfrak{l}_{-1}$ について

$$[[x_1, x_{-2}], x_{-1}] + [[x_{-2}, x_{-1}], x_1] + [[x_{-1}, x_1], x_{-2}] = 0$$

が成り立つ. ところが, $[x_{-2}, x_{-1}] \in \mathfrak{l}_{-3}$ より, 第二項目は消える. また, $[x_{-1}, x_1] \in \mathfrak{l}_0$ なので, 上述のことより $[[x_{-1}, x_1], x_{-2}] = 0$. だから任意の $x_{-1} \in \mathfrak{l}_{-1}$ について $[[x_1, x_{-2}], x_{-1}] = 0$ が得られる. よって $[x_1, x_{-2}] = 0$. ここで, $\Psi : \mathfrak{l}_{-1} \times \mathfrak{l}_{-1} \times \mathfrak{l}_{-1} \rightarrow \mathbf{R}$ を, $\Psi(u, v, w) := g([x_1, u], v, w)$ で定めると, $[x_1, u] \in \mathfrak{c}_0(g)$ であることから, $\Psi(u, v, w) = -\Psi(u, w, v)$ である. また, $x_1, u, v \in \mathfrak{l}_{-1}$ にたいして Jacobi の恒等式,

$$[[x_1, u], v] + [[u, v], x_1] + [[v, x_1], u] = 0$$

が成り立つが, 第二項目が消えることから, $\Psi(u, v, w) = \Psi(v, u, w)$ であることが分る. このことより $\Psi(u, v, w) = 0$ であり, リー環 $\mathfrak{l}$ が transitive であることから, $x_1 = 0$ が得られた. $\square$

また, 固有値 μ が定数で特に 1 のとき,

$$X_0 = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & & 0 \\ \hline & A_{11} & A_{12} \\ 0 & -A_{12} & A_{11} \end{array} \right)$$

と書ける. 但し, A_{11} は歪対称で A_{12} は対称である. よって, X_0 の最大次元は n^2 で graded Lie algebra $\mathfrak{l}$ の最大次元は $(n+1)^2$ である.

3 Main Theorem

上述の最大次元 $(n+1)^2$ をとる graded Lie algebra $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{-2} \oplus \mathfrak{l}_{-1} \oplus \mathfrak{l}_0$ の構造は以下のように決まる.

$\mathfrak{l}_{-2} = \mathbf{R}, \mathfrak{l}_{-1} = \mathbf{C}^n \simeq \mathbf{R}^{2n}, \mathfrak{l}_0 = \mathfrak{u}(n)$ について,

(i) $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{l}_{-2} \times \mathfrak{l}_0 \rightarrow 0$

(ii) $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{l}_0 \times \mathfrak{l}_{-1} \rightarrow \mathfrak{l}_{-1}$

$[A, x] := Ax \ (A \in \mathfrak{l}_0, x \in \mathfrak{l}_{-1})$

(iii) $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{l}_0 \times \mathfrak{l}_0 \rightarrow \mathfrak{l}_0$

$[X, Y] := XY - YX \ (X, Y \in \mathfrak{l}_0)$

(iv) $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{l}_{-1} \times \mathfrak{l}_{-1} \rightarrow \mathfrak{l}_{-2}$

$[Z, W] := \text{Im} \langle Z, W \rangle$. 但し $\langle, \rangle$ はエルミート内積.

このようにして、はっきり決まったリー環 $\mathfrak{l}$ にたいして grL と $\mathfrak{l}$ が同型となるような L はどれくらいあるのかということを考えたい。この様な問題の一般的な考察については [2] を参照されたい。

ここでは、 $n = 1$ のとき、すなわち次のような 4 次元の graded Lie algebra $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_2 \oplus \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{l}_0$ を考える。

$$\mathfrak{l}_2 = \langle e_1 \rangle, \mathfrak{l}_1 = \langle e_2, e_3 \rangle, \mathfrak{l}_0 = \langle e_4 \rangle$$

$$[e_4, e_2] = e_3$$

$$[e_4, e_3] = -e_2$$

$$[e_2, e_3] = e_1$$

他は自明。

また、実数 κ にたいして

$$\gamma_\kappa : \mathfrak{l} \times \mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{l}$$

$$\gamma_\kappa(e_2, e_3) := [e_2, e_3] + \kappa e_4,$$

その他の i, j については、

$$\gamma_\kappa(e_i, e_j) := [e_i, e_j]$$

により定めると、 $(\mathfrak{l}, \gamma_\kappa)$ は、自然な方法で filtered Lie algebra となる。このとき、以下の定理が成り立つ。

Theorem 1 Graded Lie algebra としての isomorphism $\Phi_0 : grL \rightarrow \mathfrak{l}$ が存在するならば、 $\kappa \in \mathbf{R}$ と、filtered Lie algebra としての isomorphism $\Phi : L \rightarrow (\mathfrak{l}, \gamma_\kappa)$ で $gr\Phi : grL \rightarrow \mathfrak{l}$ が Φ_0 と一致するようなものが存在する。

証明の概略 : complementary subspace をとり、 $L^p = \bar{\mathfrak{l}} \oplus L^{p+1}$ とする。 $L = \bigoplus \bar{\mathfrak{l}}_p$ とし、 $\bar{\mathfrak{l}}_2 = \langle \varepsilon_1 \rangle$, $\bar{\mathfrak{l}}_1 = \langle \varepsilon_2, \varepsilon_3 \rangle$, $\bar{\mathfrak{l}}_0 = \langle \varepsilon_4 \rangle$ とする。このとき、 $\bar{\gamma} : \bar{\mathfrak{l}} \times \bar{\mathfrak{l}} \rightarrow \bar{\mathfrak{l}}$ を、

$$\bar{\gamma}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) := \sum_k c_{ij}^k \varepsilon_k$$

で表すことを考える。ここで、 c_{ij}^k は $\{\varepsilon_k\}$ に関するリー環 L の構造定数である。 $\bar{\gamma}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ は以下のようにになっている。

$$\bar{\gamma}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = c_{12}^1 \varepsilon_1 + c_{12}^2 \varepsilon_2 + c_{12}^3 \varepsilon_3 + c_{12}^4 \varepsilon_4$$

$$\bar{\gamma}(\varepsilon_1, \varepsilon_3) = c_{13}^1 \varepsilon_1 + c_{13}^2 \varepsilon_2 + c_{13}^3 \varepsilon_3 + c_{13}^4 \varepsilon_4$$

$$\bar{\gamma}(\varepsilon_1, \varepsilon_4) = c_{14}^2 \varepsilon_2 + c_{14}^3 \varepsilon_3 + c_{14}^4 \varepsilon_4$$

$$\bar{\gamma}(\varepsilon_2, \varepsilon_3) = \varepsilon_1 + c_{23}^2 \varepsilon_2 + c_{23}^3 \varepsilon_3 + c_{23}^4 \varepsilon_4$$

$$\bar{\gamma}(\varepsilon_2, \varepsilon_4) = -\varepsilon_3 + c_{24}^4 \varepsilon_4$$

$$\bar{\gamma}(\varepsilon_3, \varepsilon_4) = \varepsilon_2 + c_{34}^4 \varepsilon_4$$

そこで、さらに complementary subspace を次のように取り直す。

$$\begin{aligned}
\delta_1 &:= \varepsilon_1 + P_{12}\varepsilon_2 + P_{13}\varepsilon_3 + P_{14}\varepsilon_4 \\
\delta_2 &:= \varepsilon_2 + P_{24}\varepsilon_4 \\
\delta_3 &:= \varepsilon_3 + P_{34}\varepsilon_4 \\
\delta_4 &:= \varepsilon_4
\end{aligned}$$

ここで, P_{ij} は関数である. この P_{ij} を上手く取ることにより, $\bar{\gamma}$ の基底 δ_i による表現は簡単になる. 例えば,

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}(\delta_1, \delta_2) &= \bar{\gamma}(\varepsilon_1 + P_{12}\varepsilon_2 + P_{13}\varepsilon_3 \cdots, \varepsilon_2 + \cdots) \\
&\equiv (c_{12}^1 - P_{13})\varepsilon_1 (\text{mod } L^{-1}) \\
&\equiv (c_{12}^1 - P_{13})\delta_1 (\text{mod } L^{-1})
\end{aligned}$$

と書ける. ここで, $c_{12}^1 = P_{13}$ とおけば δ_i に関する構造定数 d_{12}^1 は消すことができる. さらに, P_{12} を上手く取ると, $d_{13}^1 = 0$, P_{14} から $d_{12}^3 = 0$, P_{24} から $d_{23}^2 = 0$, P_{34} から $d_{23}^3 = 0$ とできる.

このようにして簡単になった表現を新たに, ε_i による表現と見ることにし, $\bar{\gamma}$ が Jacobi の恒等式を満たすことも考慮に入れると, 最終的には,

$$\bar{\gamma}(\varepsilon_2, \varepsilon_3) = \varepsilon_1 + c_{23}^4 \varepsilon_4,$$

その他の i, j については,

$$\bar{\gamma}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = [\varepsilon_i, \varepsilon_j]$$

となることが分った. これは filtered Lie algebra $(L, \bar{\gamma})$ と $(\mathfrak{l}, \gamma_\kappa)$ が isomorphism で写りあうことを表している. このことから, 定理の主張であった $\kappa \in \mathbf{R}$ と filtered Lie algebra としての isomorphism $\Phi: L \rightarrow (\mathfrak{l}, \gamma_\kappa)$ で, $gr\Phi: grL \rightarrow \mathfrak{l}$ が graded Lie algebra としての isomorphism $\Phi_0: grL \rightarrow \mathfrak{l}$ と一致するようなものの存在が言えた. $\square$

Remark 1

Filtered Lie algebra $(\mathfrak{l}, \gamma_\kappa)$ の同型類は次の三つに分かれる.

(i) $\kappa > 0$ のとき, $(\mathfrak{l}, \gamma_\kappa)$ は $(\mathfrak{u}(2), \{F^p\})$ と同型. 但し, F^p を filtration $\mathfrak{u}(2) = F^{-2} \supset F^{-1} \supset F^0$ で,

$$F^{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda i & -\bar{\xi} \\ \xi & \eta i \end{pmatrix} \mid \eta, \lambda \in \mathbf{R}, \xi \in \mathbf{C} \right\}$$

$$F^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -\bar{\xi} \\ \xi & \eta i \end{pmatrix} \mid \eta \in \mathbf{R}, \xi \in \mathbf{C} \right\}$$

$$F^0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta i \end{pmatrix} \mid \eta \in \mathbf{R}, \xi \in \mathbf{C} \right\}$$

とする.

(ii) $\kappa = 0$ のとき, $(\mathfrak{l}, \gamma_\kappa)$ は graded Lie algebra $\mathfrak{L}_{-2} \oplus \mathfrak{L}_{-1} \oplus \mathfrak{o}(2)$ と同型.

(iii) $\kappa < 0$ のとき, $(\mathfrak{l}, \gamma_\kappa)$ は $(\mathfrak{u}(1, 1), \{F^p\})$ と同型. 但し, F^p は filtration $\mathfrak{u}(1, 1) = F^{-2} \supset F^{-1} \supset F^0$ で,

$$F^{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda i & \xi \\ \bar{\xi} & \eta i \end{pmatrix} \mid \eta, \lambda \in \mathbf{R}, \xi \in \mathbf{C} \right\}$$

$$F^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ \bar{\xi} & \eta i \end{pmatrix} \mid \eta \in \mathbf{R}, \xi \in \mathbf{C} \right\}$$

$$F^0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta i \end{pmatrix} \mid \eta \in \mathbf{R}, \xi \in \mathbf{C} \right\}$$

である.

参考文献

- [1] T.Morimoto, On the intransitive Lie algebras whose transitive parts are infinite and primitive, J Math. Soc. Japan, vol.29, No.1 (1977),35-65.
- [2] T.Morimoto, Transitive Lie algebras admitting differential systems,Hokkaido Math. J, Vol.17,(1988),45-81