

旗多様体上のある種の holonomic system の
characteristic cycle と Weyl 群の表現について

東北大理 谷崎俊之 (Toshiyuki Tanisaki)

§0. 序

Beilinson-Bernstein [BB] は半単純 Lie 環の表現と旗多様体上の $\mathcal{D}$ -加群との間のある種の対応を示した (§1 参照)。Highest weight module や Harish-Chandra module に対応する $\mathcal{D}$ -加群は、いわゆる確定特異点型の holonomic 系 (regular holonomic system) になる。そこで regular holonomic system に関する解析的な深い結果 (e.g. [KK], [K], ...) を用いる事により irreducible highest weight module の指標公式に関する Kazhdan-Lusztig 予想 [KL1] が証明された (Brylinski-Kashiwara [BK], Beilinson-Bernstein [BB], また Harish-Chandra module については Vogan [V])。またこの点をもとに新結果が生まれてくるものと期待される。

この小論では、highest weight module に対応する regular holonomic system の characteristic cycle に関する筆者の予想 ([T; ChII 予想1]) の解決 (Kashiwara-Tanisaki [KT])

を報告する。なお [KT] では highest weight module の場合のみを扱っているが Harish-Chandra module についても同様の結果が成立するので本稿ではこの場合も含めて取り扱う事にする。

§1. §1.1 の abelian category の同値

[1.1] Beilinson-Bernstein theory

$G \in \mathbb{C}$ 上の連結半単純代数群, $B \in G$ の Borel 部分群とし, $\mathfrak{g}, \mathfrak{b}$ の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{b}$ と書く。旗多様体 $B = G/B$ 上の線型偏微分作用素の圏を $\mathcal{D}_B$ とする (以下 algebraic な category で考える)。 G の B の自然な作用から Lie 環の準同型 $\mathfrak{g} \longrightarrow \{\mathfrak{b} \text{ 上の global な vector field}\}$ が導かれる。よって $\mathfrak{g}$ の universal enveloping algebra $U(\mathfrak{g})$ から $\Gamma(B, \mathcal{D}_B)$ への algebra homomorphism が定まる。これを $U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{D} \Gamma(B, \mathcal{D}_B)$ と書く。

Prop. 1 (Beilinson-Bernstein [BB])

D は全射で $\text{Ker } D = U(\mathfrak{g}) (\cap \mathfrak{g} U(\mathfrak{g}))$ 。

(ここで $\mathfrak{g}$ は $U(\mathfrak{g})$ の中心) ┘

$R = U(\mathfrak{g}) / \text{Ker } D (\cong \Gamma(B, \mathcal{D}_B))$ とおく。有限生成 R -module M (i.e. trivial central character を持つ有限生成 $U(\mathfrak{g})$ -module) に対して $\mathcal{D}_B \otimes_R M$ は coherent $\mathcal{D}_B$ -Module になるが, 上の

functor $M \mapsto \mathcal{D}_B \otimes_R M$ は category の同値を示す。すなわち、

Th. 1 (Beilinson-Bernstein [BB])

$$\begin{array}{ccc} \{\text{有限生成 } R\text{-module}\} & \xrightarrow{\sim} & \{\text{coherent } \mathcal{D}_B\text{-Module}\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{D}_B \otimes_R M \\ \uparrow & & \uparrow \\ (\mathcal{O}_B, \mathcal{M}) & \xleftarrow{\quad} & \mathcal{M} \end{array} \quad \lrcorner$$

remark Th. 1 では central character が trivial な場合のみしか述べられていないが、一般の central character χ に対して $\mathcal{D}_B$ を "Twist" して local には $\mathcal{D}_B$ と同型な層 $\mathcal{D}_B^{(\chi)}$ が定まり、これに対して Th. 1 と同様の事実が成立する ([BB])。

1.2 Riemann-Hilbert 対応

coherent $\mathcal{D}_B$ -Module $\mathcal{M}$ に対して、以下述べる $\mathcal{M}$ は regular holonomic $\mathcal{D}_B$ -Module である。regular holonomic $\mathcal{D}_B$ -Module $\mathcal{M}$ に対して、その "解" $DR(\mathcal{M}) = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_B}(\mathcal{O}_B, \mathcal{M})$ は 11 となる perverse complex である。すなわち cohomology sheaf $\mathcal{H}^i(DR(\mathcal{M}))$ は constructible で $\text{codim supp } \mathcal{H}^i(DR(\mathcal{M})) \geq i$ ($\forall i \geq 0$)。

Th. 2 (Kashiwara [K])

$$\begin{array}{ccc} \{\text{regular holonomic } \mathcal{D}_B\text{-Module}\} & \simeq & \{\text{perverse complex on } B\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{\quad} & DR(\mathcal{M}) \end{array} \quad \lrcorner$$

1.3 Highest weight modules

$\mathfrak{g} \in \mathfrak{g}$ には必ずある Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ と $\Delta, W \in \Sigma \mathfrak{h}$ である。 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の root 系 Δ 及び Weyl 群 W とする。正 root 系 $\Delta^+ \in \mathfrak{h}$ に対して $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ として $\lambda = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha \in \mathfrak{h}^*$ とおく。 $M_\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して M_λ は highest weight λ を持つ Verma module M_λ であり、 L_λ は simple quotient L_λ である。

$$\tilde{\mathcal{O}}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \tilde{\mathcal{O}}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \text{有限生成 } R\text{-module } \mathcal{M} \\ \mathfrak{h}(\mathfrak{g})\text{-module } \mathcal{M} \text{ として locally finite} \end{array} \right\}$$

とあるとき $M_\lambda, L_\lambda \in \tilde{\mathcal{O}}_0$ である。また $\tilde{\mathcal{O}}_0$ は Grothendieck 群 $K(\tilde{\mathcal{O}}_0)$ とあるとき

$$K(\tilde{\mathcal{O}}_0) = \bigoplus_{\lambda \in W} \mathbb{Z}[M_\lambda] = \bigoplus_{\lambda \in W} \mathbb{Z}[L_\lambda]$$

となる。(以下 Grothendieck 群は常に係数 $\mathbb{Z}$ で考えることにする。)

$$\left(\begin{array}{l} \tilde{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \tilde{\mathcal{U}} = \{ \text{regular holonomic } \mathfrak{sl}_2\text{-module with } \mathfrak{h}\text{-action} \} \\ \tilde{\mathcal{Z}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \tilde{\mathcal{Z}} = \{ \text{perverse complex on } \mathfrak{h} \text{ with } \mathfrak{h}\text{-action} \} \end{array} \right)$$

とある。 $B_w = BwB/B$ (Schubert cell) とする。このとき Th 1.2 の対応 $\alpha \neq \beta$ である。

Prop 2

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{\mathcal{O}}_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}_B \otimes_{\mathbb{Z}} (\cdot)} & \tilde{\mathcal{U}} & \xrightarrow{DR} & \tilde{\mathcal{Z}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M_\lambda & \longleftrightarrow & \tilde{M}_\lambda & \longleftrightarrow & \mathbb{C}_{B_w}[-\text{codim } B_w] \\ L_\lambda & \longleftrightarrow & \tilde{L}_\lambda & \longleftrightarrow & \pi \mathbb{C}_{B_w}[-\text{codim } B_w] \end{array}$$

且 ${}^{\pi}\mathbb{C}_{\mathfrak{g}_w}$ は $\mathbb{C}_{\mathfrak{g}_w}$ の DGM-Flt, $[-\text{codim } \mathcal{B}_w]$ は complex $\mathbb{C}$ の degree の shift である。 $\tilde{\mathfrak{m}}_w, \tilde{\mathfrak{l}}_w$ は holonomic system の言葉で書けるが ${}^{\pi}\mathbb{C}_{\mathfrak{g}_w}$ は省略する。

1.4 Harish-Chandra modules

$G_{\mathbb{R}} \in G$ の 1 の a real form である (通常とは異なる)。 $G_{\mathbb{R}}$ の 極大 compact 部分群 $K_{\mathbb{R}}$ の 複素素 $K \in K (\subset G)$ と書く。

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}(\mathfrak{g}, K) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Trivial central character を持つ } (\mathfrak{g}, K)\text{-module} \\ \text{で有限の組列列を成す } \end{array} \right\} \\ \mathcal{U}(\mathfrak{g}, K) = \{ \text{regular holonomic } \mathcal{D}_{\mathcal{B}}\text{-Module with } K\text{-action} \} \\ \mathcal{F}(\mathfrak{g}, K) = \{ \text{perverse complex on } \mathcal{B} \text{ with } K\text{-action} \} \end{array} \right.$$

であるとき, Th 1, 2 の対応の $\ast$ と τ

Prop 3

$$\mathcal{H}(\mathfrak{g}, K) \xrightarrow{\mathcal{D}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathbb{R}} (\cdot)} \mathcal{U}(\mathfrak{g}, K) \xrightarrow{\text{DR}} \mathcal{F}(\mathfrak{g}, K) \quad \lrcorner$$

$\mathcal{B}$ 上の K -orbit の分類は Matsuki [M] にある。特に

Prop 4 (Matsuki [M])

(i) $\# |K \backslash \mathcal{B}| < \infty$

(ii) $x \in \mathcal{B}$ に対して $K_x / (K_x)_0$ は $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ の有限個の直積 (且 $K_x = \{g \in K \mid g \cdot x = x\}$) ┐

且 $x \in \mathcal{B}$ を含む K -orbit $\in \mathcal{O}$ である。 $K_x / (K_x)_0$ の character χ に対して $\mathcal{O}$ 上の local system が自然に定まる。

$\pi \in S_{(0,d)}$ と書く。このとき $S_{(0,d)}[-\text{codim } 0]$, $\pi S_{(0,d)}[-\text{codim } 0]$
 $\in \mathcal{F}(g, k)$ であり、 $\mathcal{F}(g, k)$ の simple object の全体は $(0, d)$ と
 動かすときの $\pi S_{(0,d)}[-\text{codim } 0]$ である。 $S_{(0,d)}[-\text{codim } 0]$,
 $\pi S_{(0,d)}[-\text{codim } 0]$ に対応する $\mathcal{M}(g, k)$ (resp. $\mathcal{H}(g, k)$) の
 object をそれぞれ $M_{(0,d)}$, $L_{(0,d)}$ (resp. $M_{(0,d)}$, $L_{(0,d)}$) と
 書く。このとき

$$\begin{cases} K(\mathcal{M}(g, k)) = \bigoplus_{(0,d)} \bigoplus [M_{(0,d)}] = \bigoplus_{(0,d)} \bigoplus [L_{(0,d)}] \\ K(\mathcal{H}(g, k)) = \bigoplus_{(0,d)} \bigoplus [M_{(0,d)}] = \bigoplus_{(0,d)} \bigoplus [L_{(0,d)}] \end{cases}$$

となる。尚 $L_{(0,d)}$ の Langlands classification での d の
 parameter に対応 (213) の $[V]$ に対応する π とする。

remark 既約 Harish-Chandra module $L_{(0,d)}$ の指標を求めた
 問題は上の事等から $\mathcal{H}^c(\pi S_{(0,d)})|_{\mathcal{G}}$ を計算する事に帰着す
 るが、これは $[LV]$ であることがわかる。

$$[1.5] \quad K(\mathcal{M}(g \times g, \Delta G)) \cong K(\hat{\mathcal{M}}(g, B))$$

$$G_1 = G \times G, \quad g_1 = g \times g, \quad K = \Delta G = \{(g, g) \in G \times G \mid g \in G\}$$

とし $\mathcal{M}(g_1, K) = \mathcal{M}(g \times g, \Delta G)$ を考えよう。 $B \times B$ の
 ΔG -orbit の分解は Bruhat 分解から

$$B \times B = \bigsqcup_{w \in W} Y_w \quad (Y_w = \Delta G \cdot (eB, wB))$$

と考えられる。各 Y_w は単連結だから、 $M_w = M(Y_w, 1)$, $L_w = L(Y_w, 1)$

とあるとき

$$K(\mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, 4G)) = \bigoplus_{\mathcal{M} \in \mathcal{W}} \bigoplus [\mathcal{M}_{\mathcal{W}}] = \bigoplus_{\mathcal{L} \in \mathcal{W}} \bigoplus [\mathcal{L}_{\mathcal{W}}]$$

とある。

Proposition 5.

$$\begin{array}{ccc} \text{Functor} & \mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, 4G) & \longrightarrow \hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}, B) \quad (= \delta 1) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M} \mid_{\mathbb{R}[B] \times B} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} K(\mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, 4G)) & \xrightarrow{\sim} & K(\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}, B)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\mathcal{M}_{\mathcal{W}}] & \longrightarrow & [\hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{W}}] \\ [\mathcal{L}_{\mathcal{W}}] & \longrightarrow & [\hat{\mathcal{L}}_{\mathcal{W}}] \end{array} \quad \perp$$

§2. characteristic cycle

[2.1] 定義の復習

一般に non-singular algebraic variety X 上の holonomic $\mathbb{D}_X$ -Module $\mathcal{M}$ に対して, $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ は cotangent bundle T^*X の subvariety (素点で次元は $\dim X$) として定義される。また $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ の multiplicity も定め、 $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ が T^*X の algebraic cycle として定義される。こゝに $\perp$ は簡単に復習する。

$\mathbb{D}_X$ の自然な filtration により $\text{gr} \mathbb{D}_X = \bigoplus_{p \geq 0} (\mathcal{O}_{T^*X}(-p))$ である。 $(T^*X \xrightarrow{p} X)$ 。holonomic $\mathbb{D}_X$ -Module $\mathcal{M}$ に対して $\mathcal{M}$ の good filtration 存在 $\Rightarrow \exists$ 有限 $\mathbb{Z}$ の $\text{gr} \mathcal{M} \in \text{gr} \mathbb{D}_X$ である。こゝに $\perp$ は $\text{gr} \mathbb{D}_X$ -

Module である。よって coherent $\mathcal{O}_X$ -Module

$\hat{M} = \mathcal{O}_X \otimes_{P(\text{gr } \mathcal{D}_X)} P(\text{gr } M)$ が定まる。これを

$$\text{Ch}(M) = \text{supp}(\hat{M}).$$

また $\text{Ch}(M)$ の既約分解 $\text{Ch}(M) = \bigcup_j \Lambda_j$ がある。 $p_j \in$

Λ_j を generic point とし

$m_j = (\text{the length of } \hat{M}_{p_j} \text{ as an } \mathcal{O}_{X, p_j}\text{-module})$

と定め

$$\underline{\text{Ch}}(M) = \sum_j m_j [\Lambda_j]$$

である。

[2.2] 性質

まずは容易。

Lemma 1

M_1, M_2, M_3 が holonomic $\mathcal{D}_X$ -Module として

$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$ が exact ならば

$$\underline{\text{Ch}}(M_2) = \underline{\text{Ch}}(M_1) + \underline{\text{Ch}}(M_3)$$

次に積分, 引き戻しに関する functorial property を示す。

Prop 6 non-singular algebraic variety X, Y を $\mathbb{A}^1$ の

morphism $X \xrightarrow{f} Y$ があるとき

$$X \times T^*Y \xrightarrow{f^*} T^*X, \quad X \times T^*Y \xrightarrow{w} T^*Y$$

に natural map がある。

(b) $M \in \text{holonomic (resp. regular holonomic)} \mathcal{D}_X\text{-Module}$ とある。 M は "複素" $\mathcal{D}_Y$ -Module

$$\int_S M := Rf_+ (\mathcal{D}_Y \leftarrow X \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} M) \quad \text{(S は proper $\mathbb{A}^1_S$)}$$

は $\mathcal{D}_Y$ -Module の bounded complex $\mathcal{C}^\bullet$ は a cohomology sheaf

$$\int_S^c M := \mathcal{H}^i(\int_S M)$$

は holonomic (resp. regular holonomic) $\mathcal{D}_Y$ -Module。 また

$$f^*(\text{Ch}(M)) \longrightarrow T^*Y \text{ は proper } \mathbb{A}^1_S$$

$$\underline{\text{Ch}}(\int_S M) = \omega_+ \circ f^*(\underline{\text{Ch}}(M))$$

とある。(ただし, ω_+ , f^* は algebraic cycle と $\mathcal{C}^\bullet$ は a 直線束 $\mathcal{C}^\bullet$ 上

に $\mathbb{A}^1_S$ 。 また M は $\mathcal{D}_X$ -module の complex $\mathcal{C}^\bullet$ $\mathcal{H}^i(\mathcal{C}^\bullet)$ は holonomic

$$\text{とある} \quad \underline{\text{Ch}}(M) := \sum_i (-1)^i \underline{\text{Ch}}(\mathcal{H}^i(M)).$$

(c) π は holonomic (resp. regular holonomic) $\mathcal{D}_X$ -Module

とある。 π は $\mathbb{A}^1_S$ 上 $\mathbb{L}f^*(\pi) := \mathcal{O}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^*(\mathcal{O}_Y)} f^*(\pi)$ は $\mathcal{D}_X$ -

Module の bounded complex $\mathcal{C}^\bullet$ は a cohomology sheaf

は holonomic (resp. regular holonomic) $\mathcal{D}_X$ -Module。 また

$$\omega^*(\text{Ch}(\pi)) \longrightarrow T^*X \text{ は proper } \mathbb{A}^1_S$$

$$\underline{\text{Ch}}(\mathbb{L}f^*\pi) = f_+ \circ \omega^*(\underline{\text{Ch}}(\pi))$$

とある。 └

Prop $\pi_1, \pi_2 \in \text{holonomic (resp. regular holonomic)}$

$\mathcal{D}_X$ -Module とある。 また $T^*X \times T^*X \xrightarrow{f} T^*X$ は

$(a, b) \mapsto a+b$ により定義する。

$= a \geq \chi \text{ Ch}(M) \times_{\chi} \text{Ch}(M) \xrightarrow{p} T^*X$ が proper ならば

$$\text{Tor}_i^{\otimes_{\mathbb{Q}_x}}(M, N) = 0 \quad (i \neq 0)$$

また $M \otimes_{\mathbb{Q}_x} N$ は holonomic (resp. regular holonomic) $\mathbb{Q}_x$ -Module である,

$$\underline{\text{Ch}}(M \otimes_{\mathbb{Q}_x} N) = p_* (\underline{\text{Ch}}(M) \times_{\chi} \underline{\text{Ch}}(N))$$

である。 ┘

[23] $\mathcal{U}(\mathfrak{g}, K)$, $\tilde{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}, B)$ の場合.

$M \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}, K)$ であるとき $\#|K \setminus B| < \infty$ ならば

$\text{Ch}(M) \subset \bigcup_{O: K\text{-orbit}} \overline{T_O^+ B}$ である事がわかる。よって

$\underline{\text{Ch}}(M) \in \bigoplus_{O: K\text{-orbit}} \mathbb{Q}[\overline{T_O^+ B}]$ である。Lemma 1 により、

$\mathbb{Q}$ -linear map

$$K(\mathcal{U}(\mathfrak{g}, K)) \xrightarrow{\text{Ch}} \bigoplus_{O: K\text{-orbit}} \mathbb{Q}[\overline{T_O^+ B}] \quad (*)$$

が定義される。この特別な場合として

$$K(\mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, 4G)) \xrightarrow{\text{Ch}} \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Q}[\overline{T_{Y_w}^+ (B \times B)}] \quad (**)$$

が得られる。また同様にして

$$K(\tilde{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}, B)) \xrightarrow{\text{Ch}} \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Q}[\overline{T_{B_w}^+ B}] \quad (***)$$

が得られるが、 $M \in \mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, 4G)$ と $M|_{B \times B} \in \tilde{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}, B)$

また $\overline{T_{Y_w}^+ (B \times B)}$ と $\overline{T_{B_w}^+ B}$ が同一視あるとき $(**)$ と $(***)$ は同じ写像である。

§3. W-module structure

[3.1] $K(\mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \Delta G)) \cong \mathbb{Q}[W]$ as an algebra

Lusztig-Vogan [LV] に従って $K(\mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \Delta G))$ に積を定義 (2.3). $B \times B \times B$ から (i, j) -成分への射影を $B \times B \times B \xrightarrow{P_{ij}} B \times B$ ($1 \leq i < j \leq 3$) とする。このとき $m_1, m_2 \in \mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \Delta G)$ に対して

$$\int_{P_{12}}^i (\mathbb{L}_{P_{12}^+} m_1) \underset{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} (\mathbb{L}_{P_{23}^+} m_2) \in \mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \Delta G)$$

である。これを $K(\mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \Delta G))$ の積と定義する。

$$[m_1] \cdot [m_2] = \sum_i (-1)^i \left[\int_{P_{12}}^i (\mathbb{L}_{P_{12}^+} m_1) \underset{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} (\mathbb{L}_{P_{23}^+} m_2) \right]$$

により定義する。

Prop. 8 (Lusztig-Vogan [LV])

上の積構造により $K(\mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \Delta G))$ は環に同型するに

$$\begin{array}{ccc} K(\mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \Delta G)) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Q}[W] \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ [\mathcal{M}_w] & \xleftarrow{\quad} & W \end{array}$$

remark Prop. 8 の同型対応 $\psi: [\mathcal{M}_w] \rightarrow \mathbb{Q}[W]$ に対応する $\mathbb{Q}[W]$ の元

$\in \mathcal{A}(w)$ とすると, $\mathcal{A}(w) = \sum_{y \leq w} (-1)^{\ell(w) + \ell(y)} P_{y,w}(1) y$ と表す。

ここで $\leq$ は Bruhat order, ℓ は長, $P_{y,w}$ は Kazhdan-Lusztig 多項式。

[3.2] $K(\mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \Delta G))$ acts on $K(\mathcal{U}(\mathfrak{g}, K))$

$K(\mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \Delta G)) (\cong \bigoplus [W])$ の $K(\mathcal{U}(\mathfrak{g}, K))$ への作用を定義する。 $B \times B$ 上の第 i -成分への射影 $\pi_i: B \times B \xrightarrow{\pi_i} B$ ($i=1, 2$) とする。 $m \in \mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \Delta G)$, $n \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}, K)$ に対し

$$\int_{\mathfrak{g}_1}^i m \otimes_{\mathcal{O}_{B \times B}} (\pi_i^* n) \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}, K)$$

とある。

Prop. 9 (Lusztig - Vogan [LV])

$$[m] \cdot [n] = \sum_i (-1)^i \left[\int_{\mathfrak{g}_1}^i m \otimes_{\mathcal{O}_{B \times B}} (\pi_i^* n) \right]$$

$$(m \in \mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \Delta G), n \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}, K))$$

により $K(\mathcal{U}(\mathfrak{g}, K))$ への $K(\mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \Delta G))$ の作用が定まる。

これにより $K(\mathcal{U}(\mathfrak{g}, K))$ は W -module になる。 $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ の Weyl 群は $W \times W$ であり、特に $K(\mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \Delta G)) (\cong \bigoplus [W])$ は $W \times W$ -module になるが、これは $\bigoplus [W]$ の両側正則表現と一致している。

$s \in W$ simple reflection に対し対応する rank 1 の parabolic subgroup $P_s (\supset B)$ とし $P_s = G/P_s$ とおく。また $B \xrightarrow{\pi_s} P_s$ を自然な射影とする。このとき $[KT]$ と全く同様に s がわかる。

Prop 10 $\pi \in \mathcal{M}(\mathfrak{g}, K)$ のとき

$$S \cdot [\pi] = [\pi] + \sum_i (-1)^i [\mathcal{H}^i(\mathbb{L}_{\pi_s^*} \int_{\pi_s} \pi)]$$

3.3 Lusztig の Springer 表現

$\bigoplus_{O:K\text{-orbit}} \bigoplus [\overline{T_O^* B}]$ に W -module structure を定義するのだが、以下の目的があるが、そのための準備として Lusztig の Springer 表現について復習する。

$\tilde{\mathcal{G}} = \{(x, gB) \in \mathfrak{g} \times B \mid x \in \text{Lie}(gBg^{-1})\}$ とおき、 $\tilde{\mathcal{G}} \xrightarrow{S} \mathfrak{g}$ は自然な写像である。また $\mathcal{G}_{r.s.} = \{\text{regular semisimple element in } \mathfrak{g}\}$, $S^{-1}(\mathcal{G}_{r.s.}) = \tilde{\mathcal{G}}_{r.s.}$, $\tilde{\mathcal{G}}_{r.s.} \xrightarrow{S_{r.s.}} \mathcal{G}_{r.s.}$ とする。 $S_{r.s.}$ は W -principal bundle であり $S_{r.s.*}(\mathbb{Q}_{\tilde{\mathcal{G}}_{r.s.}})$ に W が作用する。 DGM-FTL の functoriality により $\pi(S_{r.s.*}(\mathbb{Q}_{\tilde{\mathcal{G}}_{r.s.}}))$ に W が作用する。 ところで $RS_*(\mathbb{Q}_{\tilde{\mathcal{G}}}) \cong \pi(S_{r.s.*}(\mathbb{Q}_{\tilde{\mathcal{G}}_{r.s.}}))$ (Lusztig) であり $RS_*(\mathbb{Q}_{\tilde{\mathcal{G}}})$ は W -action を持つ。 従って $\mathcal{N} = \{\mathfrak{g} \ni \text{a nilpotent element}\}$, $\tilde{\mathcal{N}} = S^{-1}(\mathcal{N})$, $\tilde{\mathcal{N}} \xrightarrow{S_{\mathcal{N}}} \mathcal{N}$ とするとき $RS_{\mathcal{N}*}(\mathbb{Q}_{\tilde{\mathcal{N}}}) \cong RS_*(\mathbb{Q}_{\tilde{\mathcal{G}}})|_{\mathcal{N}}$ は W -action を持つ。 ここで $\tilde{\mathcal{N}} \cong T^*B$ に注意してある。

remark $x \in \mathcal{N}$ のとき、上のことから $H^i(B^x, \mathbb{Q}) \cong R^i S_{\mathcal{N}*}(\mathbb{Q}_{\tilde{\mathcal{N}}})$ に W が作用する ($B^x = S^{-1}(x)$)。 したがって通常の Springer 表現である。

$$\boxed{3.4} \quad W \text{ acts on } H_{2d}(Z^{(g,k)}, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{O: k\text{-orbit}} \mathbb{Q} [\overline{T_O^+ B}].$$

k -orbit O に対して $Z_O^{(g,k)} = \overline{T_O^+ B}$, $Z^{(g,k)} = \bigcup_{O: k\text{-orbit}} Z_O^{(g,k)}$ とある。

$\dim B = d$ とあるとき, $Z^{(g,k)}$ は π の $\pi^{-1}(0)$ である。 $\dim Z^{(g,k)} = d$ 。 $\delta \subset Z$

$$\begin{aligned} H_{2d}(Z^{(g,k)}, \mathbb{Q}) &:= (H_c^{2d}(Z^{(g,k)}, \mathbb{Q}))^\vee \\ &= \bigoplus_{O: k\text{-orbit}} \mathbb{Q} [Z_O^{(g,k)}] \end{aligned}$$

である。

K は Lie 環 $\mathfrak{g} \in \mathbb{R}$, また $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} \in \text{Cartan 分解}$ とし,

$N(\mathfrak{p}) = N \cap \mathfrak{p}$ とあるとき, $Z^{(g,k)} = \mathcal{P}_N^{-1}(N(\mathfrak{p}))$ である。

わかる。 $\delta \subset Z$ 3.3 参照

$$\begin{aligned} H_c^i(N(\mathfrak{p}), \mathbb{R} \mathcal{P}_{N^+}(\mathbb{Q}_N) |_{N(\mathfrak{p})}) \\ = H_c^i(Z^{(g,k)}, \mathbb{Q}) \end{aligned}$$

に W -action が定義される。 dual を取ると $H_c(Z^{(g,k)}, \mathbb{Q})$

に W -action が定まる。 従って特に

$$H_{2d}(Z^{(g,k)}, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{O: k\text{-orbit}} \mathbb{Q} [\overline{T_O^+ B}]$$

に W が作用する。

この特別な場合として $Z = Z^{(g \times g, \Delta G)}$ とあるとき

$$H_{4d}(Z, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{W \in W} \mathbb{Q} [\overline{T_W^+ (B \times B)}]$$

に $W \times W$ が作用する。

$\boxed{3.5}$ local formula

$H_{2d}(Z^{(g,k)}, \mathbb{Q})$ の W -module とし Z の構造は, base

「Prop 11 (Hotta [H7]) K -orbit $O \neq \emptyset$ 112

(i) O が S -vertical ならば

$$s \cdot [Z_0^{(g,k)}] = -[Z_0^{(g,k)}]$$

(ii) O が S -horizontal ならば

$$s[Z_0^{(g,k)}] = [Z_0^{(g,k)}] + \omega_s^+ \omega_s + \mathcal{S}_s^+([Z_0^{(g,k)}])$$

$$\text{また } \omega_s^+ \omega_s + \mathcal{S}_s^+([Z_0^{(g,k)}]) \in \bigoplus_{O'} Z_{Z_0} [Z_{O'}^{(g,k)}]$$

つまり O' は $O' \subset \overline{\pi_s^{-1}(\pi_s(O))}$ ならば S -vertical orbit である。 $\square$

3.6 主定理

「Main theorem

3.2, 3.4 で定義された W -module structure 112

$$K(\mathcal{U}(g,k)) \xrightarrow{\text{Ch}} H_{2d}(Z^{(g,k)}, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{\mathbb{Q}} [T_0^* \mathbb{B}]$$

は W -module として同型 $\square$

(証明 112)

$$\pi \in \mathcal{U}(g,k) \text{ のとき } \text{Ch}(s \cdot [\pi]) = s \text{Ch}([\pi])$$

が任意の s について成立する事を示せばよい。 $\text{Ch}(\pi)$ が

わかっているとき $s \cdot \text{Ch}(\pi)$ は Prop 11 でわかる。また,

$\text{Ch}(s \cdot [\pi])$ は Prop 10, 6, 7 等から計算されるのでこれ

らが一致する事がわかる。詳細は [KT] と同様。 //

3.7 で述べた様に, $M(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \Delta G)$ の場合には, この主定理は (少なくとも Weyl 群の表現論という観点から) 意味がはっきりしているが, 一般の場合にこのが何を意味するかはよくわからないう。この定理に何らかの表現論的意味を与える事が今後の問題である。

[3.7] cell 表現と Springer 表現

主定理を $M(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \Delta G)$ の場合に考えよう。3.1 により $K(M(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \Delta G)) \cong \bigoplus [\mathbb{W}]$ であった。また同型写像は

$$\begin{array}{ccc} K(M(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \Delta G)) & \xrightarrow{R} & \bigoplus [\mathbb{W}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [M_w] & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{W} \end{array}$$

により与えられている。さて主定理から, 次の事がわかる。

$$(*) \left(\begin{array}{ccc} \text{W} \times \text{W} \text{-module} & \text{として} & \\ \text{Hed}(Z, \mathbb{Q}) & \xrightarrow{R'} & \bigoplus [\mathbb{W}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [Z_e] & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{E} \end{array} \right)$$

$$(\text{且} \ Z_w = \overline{T_{Y_w}^{\downarrow}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})})$$

実際, この場合 $\underline{Ch}$ は同型写像で, $\underline{Ch}(m_e) = [Z_e]$ 。

(もっとも $(*)$ は主定理を用いたとしても直接証明できる。[KL] 参照)

よって次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc} K(M(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \Delta G)) & \xrightarrow{\underline{Ch}} & \text{Hed}(Z, \mathbb{Q}) \\ & \searrow R & \uparrow R' \\ & \bigoplus [\mathbb{W}] & \end{array}$$

これが [KT] の主定理であった。

$$a(w) = R([Z_w]) \quad , \quad b(w) = R'([Z_w])$$

とある。基底 $\{a(w)\}_{w \in W}$ は Weyl 群の cell 表現に、また基底 $\{b(w)\}_{w \in W}$ は Weyl 群の Springer 表現に対応している。cell 表現と Springer 表現の関係は 2 つ基底の変換係数を与える事によりわかる。これは次で与えられる。

$$\text{Ch}([Z_w]) = \sum_y m_y([Z_w]) [Z_y] \Rightarrow a(w) = \sum_y m_y([Z_w]) b(y).$$

$m_y([Z_y]) = 1$, $m_y([Z_w]) \neq 0 \Rightarrow y \leq w (\Leftrightarrow B_y \subset B_w)$ となる。例えば

$$a(w) \in b(w) + \sum_{y < w} Z_{\geq 0} b(y)$$

がわかる。Kazhdan-Lusztig [KL2] は $G = SL_n(\mathbb{C})$ での $a(w) = b(w)$ である事を予想しているが、これは次の同値である。

$$\text{予想} \quad G = SL_n(\mathbb{C}) \Rightarrow \text{Ch}([Z_w]) = \overline{T_{T_w}^+ (B \times \Phi)}$$

§4. K-orbits on B (d'apres Matsuki [M])

今後 Harish-Chandra module の研究において K の B への作用に関する軌道分解の様子が重要になると思われる。そこで、Matsuki [M] の結果 (の一部) をここにまとめておく。なお簡単のため Borel 部分環, Cartan 部分環をそれぞれ BSA , CSA と略記する。

4.1 parametrization

$G_{\mathbb{R}} \in G$ ($\mathbb{C}$ 上の半単純連結代数群) の real form とする (連結性は仮定しない)。 $G_{\mathbb{R}}$ の極大 compact 部分群 $K_{\mathbb{R}}$ の複素化を K とする。 また $G, G_{\mathbb{R}}, K, K_{\mathbb{R}}$ の (連結成分の) L に環 $\mathbb{Z}$ を与えて $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0, \mathfrak{k}, \mathfrak{k}_0$ と書く。 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0, \mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を Cartan 分解 (及び $\mathbb{Z}$ の複素化) とし, Cartan involution θ とかく。 $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}_0$ に関する共役 τ とする。

旗多様体 $B = G/B$ は $\mathfrak{g}$ の BSA の全体と同一視するとき, $K \backslash B \longleftrightarrow \{\mathfrak{g} \text{ の BSA}\} / \sim_K$ である。

Lemma 3

- (i) 任意の BSA $\mathfrak{b}$ は θ -stable な $\mathfrak{g}$ の CSA と書ける。
 (ii) $\mathfrak{g}$ の θ -stable な CSA とあるとき, K の連結成分 K_0 の元 k が存在して, $k \cdot \mathfrak{b}$ は $\mathfrak{g}_0$ の θ -stable CSA の複素化になる。

$\mathfrak{g}_0$ の θ -stable CSA $\mathfrak{g}_0$ と $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ の正 root 系 Δ^+ に対して, $\mathfrak{b}(\mathfrak{g}_0, \Delta^+) = (\mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{\alpha})$ とかく。 ($\mathfrak{g}_{\alpha}$ は root space。) Lemma 3 により任意の BSA はある $\mathfrak{g}_0, \Delta^+$ に対して $\mathfrak{b}(\mathfrak{g}_0, \Delta^+)$ と K_0 -共役である。

Lemma 4 $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}'_0 \in \mathfrak{g}_0$ の θ -stable CSA, $\Delta^+, \Delta'^+ \in (\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ 及び $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ の正 root 系 とあるとき

$$b(\theta_0, \Delta^+) \underset{K}{\sim} b(\theta'_0, \Delta^+) \iff \begin{array}{l} \exists R \in K_{\mathbb{R}} \text{ s.t.} \\ \left(\begin{array}{l} R \cdot \theta_0 = \theta'_0 \\ \text{or} \\ R \cdot b(\theta_0, \Delta^+) = b(\theta'_0, \Delta^+) \end{array} \right) \end{array}$$

θ_0 の $\mathbb{Q}$ -stable CSA θ_0 に対し, $(\mathfrak{g}, \theta_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ の Weyl 群 $W(\theta_0)$ とする。また $W(\theta_0; K_{\mathbb{R}}) = N_G(\theta_0) \cap K_{\mathbb{R}} / Z_G(\theta_0) \cap K_{\mathbb{R}}$ ($\subset W(\theta_0)$) とおく。

$$\{\theta_0 \text{ a CSA}\} / \underset{G_{\mathbb{R}}}{\sim} \longleftrightarrow \{\theta_0 \text{ a } \mathbb{Q}\text{-stable CSA}\} / \underset{K_{\mathbb{R}}}{\sim}$$

こので以上の事をまとめ、

Prop. 12

θ_0 の CSA の $G_{\mathbb{R}}$ -共役類の完全代表系 $\{\theta_0^{(i)} \mid i \in I\}$ と各 $\theta_0^{(i)}$ が $\mathbb{Q}$ -stable になるようにとる。このとき、

$$K \backslash B \longleftrightarrow \bigsqcup_{i \in I} W(\theta_0^{(i)}; K_{\mathbb{R}}) \backslash W(\theta_0^{(i)})$$

で、対応は各 $i \in I$ に対し $(\mathfrak{g}, \theta_0^{(i)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ の正 root 系 $\Delta_{\mathbb{C}}^+$ をとって固定するとき

$$b(\theta_0^{(i)}, \Delta_{\mathbb{C}}^+) \longleftrightarrow W(\theta_0^{(i)}; K_{\mathbb{R}}) w$$

により与えられる。

remark θ_0 の CSA の分類については, Sugiura [S], Warner [W] を参照。特に $\#|\{\theta_0 \text{ a CSA}\} / \underset{G_{\mathbb{R}}}{\sim}| < \infty$ なる $\mathfrak{g}$ に対して $\#|K \backslash B| < \infty$

[4.2] K -orbit の諸性質

以下 $\mathfrak{g}_0$ の $\mathbb{Q}$ -stable CSA $\mathfrak{f}_0$ ($\mathfrak{f} := \mathfrak{f}_0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$) を固定し、
 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{f})$ の root 系, Weyl 群 $\Sigma \ni s_1, s_2, \dots, s_n \in \Delta$, W とおく。 Σ に
 正 root 系 Δ^+ を固定し、 $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}(\mathfrak{f}_0, \Delta^+)$, 対応する Borel 部分
 群 B と書く。 $\mathfrak{o}$ を通る K -orbit $\mathcal{O}$ と書くとき、 $\mathcal{O} \cong K/K_{\mathfrak{o}}$
 (且 $K_{\mathfrak{o}} = \{k \in K \mid k \cdot \mathfrak{o} = \mathfrak{o}\} = K \cap B$) である。

Prop 13 $H_{\mathbb{R}} = Z_{G_{\mathbb{R}}}(\mathfrak{f}_0)$, $H = Z_G(\mathfrak{f})$ とおくと、

$$\begin{aligned} K_{\mathfrak{o}}/(K_{\mathfrak{o}})_0 &= K \cap B / (K \cap B)_0 \cong K \cap H / (K \cap H)_0 \cong K_{\mathbb{R}} \cap H_{\mathbb{R}} / (K_{\mathbb{R}} \cap H_{\mathbb{R}})_0 \\ &\cong H_{\mathbb{R}} / (H_{\mathbb{R}})_0 \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^N \\ &\quad \left(\text{且 } 0 \leq N \leq \dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{f}_0 \cap \mathfrak{p}_0) \right) \end{aligned}$$

Prop 14

(i) $\mathfrak{o}$ を含む K -orbit $\mathcal{O}$ が open

$$\iff \begin{cases} \bullet \mathfrak{f}_0 \cap \mathfrak{p}_0 \text{ は } \mathfrak{p}_0 \text{ の max. abelian subspace} \\ \quad (\mathfrak{f}_0 \text{ は normal CSA}) \\ \bullet \Delta_0 = \{\alpha \in \Delta \mid \tau(\alpha) = -\alpha\} \text{ とおくと } \tau(\Delta^+ \cap \Delta_0) = \Delta^+ \cap \Delta_0 \end{cases}$$

(ii) $\mathfrak{o}$ を含む K -orbit $\mathcal{O}$ が closed

$$\iff \begin{cases} \bullet \mathfrak{f}_0 \cap \mathfrak{k}_0 \text{ は } \mathfrak{k}_0 \text{ の CSA} \\ \quad (\mathfrak{f}_0 \text{ は fundamental CSA}) \\ \bullet \mathcal{Q}(\Delta^+) = \Delta^+ \end{cases}$$

Remark open orbit は唯一つ (あてはまえる)。closed orbit
 の数は $\# | W(\mathfrak{g}_0; K_{\mathbb{R}}) \setminus W(\mathfrak{g}_0)_0 |$ と一致する。こゝで $\mathfrak{g}_0$
 は θ -stable な fundamental CSA (共役を除いて unique),
 また $W(\mathfrak{g}_0)_0 = \{ w \in W(\mathfrak{g}_0) \mid \theta w = w \}$ 。

Prop. 15 $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}(\mathfrak{g}_0, \Delta^+)$ の nilpotent radical $\in \mathfrak{m}^+$ とある。
 また, $\Delta_I = \{ d \in \Delta \mid \theta d = d \}$, $\Delta_{I, \mathfrak{p}} = \{ d \in \Delta_I \mid \mathfrak{g}_d \subset \mathfrak{p} \}$ とおくと
 け,

$$\begin{aligned} \operatorname{codim} \mathcal{O} &= \dim(\mathfrak{m}^+ \cap \mathfrak{p}) \\ &= \frac{1}{2} (\# |\Delta_{I, \mathfrak{p}}| + \# |(\Delta^+ \cap \mathfrak{o}(\Delta^+)) - \Delta_I|) \end{aligned}$$

§ 5. 補足

[5.1] 講演では $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ の primitive ideal の associated
 variety の既約性について述べた ([KT], [J2])。[KT]
 では integral case のみにしか言及してはなかつたが, non-
 integral の場合も同様に正しい。[KT] で Borho - Brylinski
 の未発表の結果として引用した定理の証明は (少なくとも
 筆者が柏原 A に教えて頂いたのは) $\otimes$ -Module を用いるもの
 であるが, Joseph [J2] はこの部分を Casselman functor
 なるものを $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -module だけの範囲で証明しているよ
 うである。なお Brylinski からの私信によると, 上記の Borho -
 Brylinski の定理は彼等の一連の論文の Part III に書く予定との

事である。

[5.2] 本稿の主定理は Harish-Chandra module, あるいは半単純 Lie 群の無限次元表現の研究を念頭にふいたものでそのような応用が望まれるが, ここで見方を変えて Weyl 群の表現論の観点から見直してみよう。

まずは [KL2] と全く同様に示す。

Lemma 5

$$H_{2d}(Z^{(g,k)}, \mathbb{Q}) \cong \bigoplus_{x \in K \backslash V(g)} H_{2d_x}(B^x) {}^{C_K(X)} \text{ as a } W\text{-module}$$

$$(d_x = \dim B^x, \quad C_K(X) = Z_K(X)/Z_K(X)^0) \quad \lrcorner$$

一般には, W -module としての全射準同型

$$(*) \quad K(\mathcal{U}(g, k)) \xrightarrow{\text{Ch}} H_{2d}(Z^{(g,k)}, \mathbb{Q})$$

があるわけだが, g_0 が 非役を除いた唯一つの CSA を持つ場合には (*) は同型写像になる。実際この場合任意の BSA もに対して K が連結にある事が Prop 13 と [W; Prop. 1.4.1.4] からわかる。 G, K の Weyl 群をそれぞれ $W, W(K)$ とすると Prop. 12 から $K \backslash B$ は $W(K) \backslash W$ で parametrize できる。よって $W(K)w$ に対したる K -orbit を O_w と書くとき,

$$K(\mathcal{U}(g, k)) = \bigoplus_{w \in W(K) \backslash W} \mathbb{Q} [M_{(O_w, 1)}]$$

とある。[LV] より simple reflection s の作用に関して

$$s \cdot (-1)^{\dim O_w} [M_{(O_w, 1)}] = -(-1)^{\dim O_{ws}} [M_{(O_{ws}, 1)}]$$

とある。

$$K(\mathcal{U}(\mathfrak{g}, \kappa)) \cong \text{Ind}_{W(\kappa)}^W(1) \otimes \text{sgn}$$

とある。以上をまとめ

Prop. 16 $\mathfrak{g}_0$ が 共役を除く唯一の CSA を持つとき,

$$\text{Ind}_{W(\kappa)}^W(1) \otimes \text{sgn} \cong \bigoplus_{\chi \in \chi(W/P)} H_{2d_\chi}(\mathbb{B}^\times)^{C(\chi)} \quad \text{J}$$

$(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \Delta G)$ のとき $[KL2]$ の場合と一致して

$$\left[\bigoplus [W] \cong \bigoplus_{\chi \in G/P} (H_{2d_\chi}(\mathbb{B}^\times) \otimes H_{2d_\chi}(\mathbb{B}^\times))^{C(\chi)} \right. \\ \left. (C(\chi) = Z_G(x) / Z_G(x)^\circ) \right]$$

となり、これは Springer の完全性定理が得られるのである。

$\mathfrak{g}_0$ が complex simple Lie algebra の non-compact real form であるとき、唯一の CSA を持つのは次の場合である。

$$\textcircled{1} \mathfrak{g} = A_{2m-1}, \mathfrak{k} = \mathbb{C}m$$

$$\textcircled{2} \mathfrak{g} = D_m, \mathfrak{k} = B_{m-1}$$

$$\textcircled{3} \mathfrak{g} = E_6, \mathfrak{k} = F_4$$

①② の場合には Prop. 16 を具体的に書いてみると次のようになる。

① $2m$ の分割 σ に対応する S_{2m} の既約表現を χ_σ とかく

$$\text{とき,} \quad \text{Ind}_{W(\mathbb{C}m)}^{S_{2m}}(1) \cong \bigoplus \chi_\sigma$$

すなわち、 σ は各 part が even であるような $2m$ の分割を全2重に。

$$\textcircled{2} \quad \text{Ind}_{W(B_{n-1})}^{W(D_n)}(1) \cong 1 \oplus \chi$$

ここで χ は通常の約束で $(\overbrace{\square \cdots \square}^{n-1}, \phi)$ に対応する既約束現である。

①の場合は元来岩堀先生が予想されていたもので [Tk] にその証明がある。②の場合はいさしにしろ簡単にわかる事である。

REFERENCES

- [BB] Beilinson, A. and Bernstein, J. : Localisation de g -modules;
Comptes Rendus, 292A, 15-18 (1981).
- [BK] Brylinski, J. L. and Kashiwara, M. : Kazhdan-Lusztig
conjecture and holonomic systems; Invent. math. 64, 387-
410 (1981).
- [H] Hotta, R. : On Joseph's construction of Weyl group representations; preprint (1982).
- [J1] Joseph, A. : On the variety of a highest weight module; to
appear in J. Alg.
- [J2] ——— : On the associated variety of a primitive ideal;
preprint (1983).
- [K] Kashiwara, M. : The Riemann-Hilbert problem for holonomic
systems; preprint (1983).
- [KK] ——— and Kawai, T. : On holonomic systems of micro-
differential equations, III.; Publ. RIMS. Kyoto Univ. 17
813-979 (1981).
- [KL1] Kazhdan, D. and Lusztig, G. : Representations of Coxeter
groups and Hecke algebras; Invent. math. 53, 165-184
(1979).
- [KL2] ——— and ——— : A topological approach to Springer's
representations; Adv. in Math. 38, 222-2228 (1980).
- [KT] Kashiwara, M. and Tanisaki, T. : The characteristic cycles
of holonomic systems on a flag manifold. -related to the
Weyl group algebra-; preprint (1983).

- [LV] Lusztig, G. and Vogan, D. : Singularities of closures of K-orbits on flag manifolds; Invent. math. 71, 365-379 (1983).
- [M] Matsuki, T. : The orbits of affin symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups; J. Math. Soc. Japan 31, 331-357 (1979).
- [S] Sugiura, M. : Conjugate classes of Cartan subalgebras in real semisimple Lie algebras; J. Math. Soc. Japan 11, 374-434 (1959).
- [T] Tanisaki, T. : Representation theory of complex semisimple Lie algebras and $\mathcal{D}$ -Modules; in Reports of the 5-th seminar on algebra II, 67-163 (1983).
- [V] Vogan, D. : Irreducible characters of semisimple Lie groups III; Invent. math. 71, 381-417 (1983).
- [W] Warner, G. : Harmonic analysis on semisimple Lie groups I; Springer Verlag, 1972.
- [Th] Thompson, J. G. : Fixed point free involutions and finite projective planes; in: Finite simple groups II. Proc. Sympos. Univ. Durham 1978, 321-337 Academic Press, 1980.