

Volterra モデルについて

東京工大 理学部 伊藤 栄明

2.2.7 は Volterra による次の方程式も二つの角度からみ
ることにする。

$$\frac{d}{dt} N_i = N_i \left(\sum_{j=1}^r A_{ij} N_j \right) \quad A_{ij} = -A_{ji} \quad (1)$$

$i, j = 1, 2, \dots, r$

1) Volterra equation と Boltzmann equation

2) Volterra equation と Markov chain

§1 Volterra モデルと Boltzmann equation

まず次の a) b) c) d) を満たすモデルを考える。

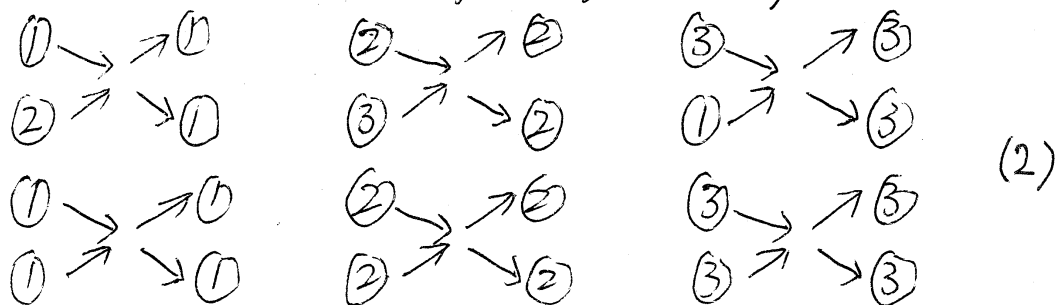
a) ①, ②, ③ 3種類の粒子がある。それぞれの個数は N_1, N_2, N_3 とし $N_1 + N_2 + N_3 = N$ かつ N は一定であるとする。

b) それぞれの粒子は random に衝突をくりかえす。
uniform distribution of colliding pair
を仮定する。つまり rC_2 通りの組合せが等確率であると

する。

c) 単位時間にはどの粒子も平均して一回衝突する。

d) 粒子は次のような衝突規則にしたがう



つまり ① は ② より強く ② は ③ より強く ③ は ① より強いとする。Boltzmann's problem との類推から

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} n_1 &= \frac{n_1}{n} n_1 + \frac{n_2}{n} n_1 + \frac{n_3}{n} n_2 - n_1 \\ \frac{\partial}{\partial t} n_2 &= \frac{n_2}{n} n_2 + \frac{n_3}{n} n_2 + \frac{n_1}{n} n_3 - n_2 \\ \frac{\partial}{\partial t} n_3 &= \frac{n_3}{n} n_3 + \frac{n_1}{n} n_3 + \frac{n_2}{n} n_1 - n_3\end{aligned}\quad (3)$$

が成立する。

$$\left(\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \frac{n_3}{n}\right) \equiv (P_1, P_2, P_3)$$

とあけは

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} P_1 &= P_1^2 + P_2 P_1 + P_1 P_2 - P_1 \\ \frac{\partial}{\partial t} P_2 &= P_2^2 + P_3 P_2 + P_2 P_3 - P_2 \\ \frac{\partial}{\partial t} P_3 &= P_3^2 + P_1 P_3 + P_3 P_1 - P_3\end{aligned}\quad (4)$$

となる。(4) は M. Kac の本にあるのと同様な 3 粒子 master equation からみちびくことができる。

衝突規則も次のような代数的構造であらわすことができる。

$$\begin{aligned}
 E_1 \circ E_1 &= E_1 & E_1 \circ E_2 &= E_2 \circ E_1 = E_1 \\
 E_2 \circ E_2 &= E_2 & E_2 \circ E_3 &= E_3 \circ E_2 = E_2 \\
 E_3 \circ E_3 &= E_3 & E_3 \circ E_1 &= E_1 \circ E_3 = E_3
 \end{aligned} \tag{5}$$

$P_1 E_1 + P_2 E_2 + P_3 E_3$ と考える

$$(P_1 E_1 + P_2 E_2 + P_3 E_3) \circ (P_1' E_1 + P_2' E_2 + P_3' E_3)$$

なる値も定義する。分配法則がなりたつようにすれば (5) の IT の convolution とあらわす2と分かる。2の場合 結合律は成立しない。2れより (4) は次のようにあらわす。

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\sum_{i=1}^3 P_i E_i \right) = \left(\sum_{i=1}^3 P_i E_i \right) \circ \left(\sum_{i=1}^3 P_i E_i \right) - \left(\sum_{i=1}^3 P_i E_i \right) \tag{6}$$

(5) の代数的構造に確率を入れ込むと考える。つまり

① と ② が衝突した場合 確率 $1 - P_{12}$ で ① は ② にかわり P_{12} で ① にとどまる。② は確率 P_{12} で ① にかわり $1 - P_{12}$ で ② のまゝでいる。

2の場合 代数的構造は次のようになる

$$\begin{aligned}
 E_1 \circ E_1 &= E_1 & E_1 \circ E_2 &= E_2 \circ E_1 = P_{12} E_1 + (1 - P_{12}) E_2 \\
 E_2 \circ E_2 &= E_2 & E_2 \circ E_3 &= E_3 \circ E_2 = P_{23} E_2 + (1 - P_{23}) E_3 \\
 E_3 \circ E_3 &= E_3 & E_3 \circ E_1 &= E_1 \circ E_3 = P_{31} E_3 + (1 - P_{31}) E_1
 \end{aligned} \tag{7}$$

(7) の IT の (6) と考えると次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} P_1 &= \{ (1-2P_{12})P_2 + (2P_{31}-1)P_3 \} P_1 \\
\frac{\partial}{\partial t} P_2 &= \{ (2P_{12}-1)P_1 + (1-2P_{23})P_3 \} P_2 \\
\frac{\partial}{\partial t} P_3 &= \{ (1-2P_{31})P_1 + (2P_{23}-1)P_2 \} P_3
\end{aligned} \quad (8)$$

一般に

$$E_i \circ E_j = P_{ij} E_i + (1-P_{ij}) E_j \quad P_{ij} = P_{ji} \quad (9)$$

$i, j = 1, 2, \dots, r$

なる代数的構造の上で

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^r P_i E_i \right) = \left(\sum_{i=1}^r P_i E_i \right) \circ \left(\sum_{i=1}^r P_i E_i \right) - \left(\sum_{i=1}^r P_i E_i \right) \quad (10)$$

なる Boltzmann equation の右側のものを考える。2 とか 7 である。これは Volterra の式 (1) と同等なものである。2 とかわかる。

§2. Volterra モデルと Markov chain

以上で個数は連続な量とみなして、実際は discrete な量である。そこで次のような Markov chain を考える。§1 の C) のかわりに単位時間内に全体で一回だけ衝突がおけるという仮定をする。又自分自身との衝突というのを考えないとする。したがって $N(N-1)/2$ 通りの組合せで衝突確率があることになる。

$p(n_1, n_2, n_3, \dots)$ を時刻 t で系が $(n_1, n_2, n_3, \dots)$ にある確率とすれば次のような Markov chain となる。

$$\begin{aligned}
 p(n_1, n_2, n_3; t+1) = & \frac{1}{N^2} \{ (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) p(n_1, n_2, n_3; t) \\
 & + 2(n_1-1)(n_2+1) p(n_1-1, n_2+1, n_3; t) + 2(n_2-1)(n_3+1) p(n_1, n_2-1, n_3+1; t) \\
 & + 2(n_3-1)(n_1+1) p(n_1+1, n_2, n_3-1; t) \} \quad (11)
 \end{aligned}$$

3種類の粒子の個数の積を考える。それは時刻 t で $H_3(t)$ なる確率変数であらわすことができる。そのとき

$$E(H_3(t+1) | H_3(t)) = (1 - 2 \frac{3C_2}{N^2}) H_3(t) \quad (12)$$

が成り立つ。

今種の数が $2A+1$ あるとする。それ以外の種が他の A 種類よりも強く A 種類よりも弱いとする。つまり“どの種も対等”であるとする。3種類の場合と同様なモデルを考え $2A+1$ 種の個数の積を確率変数 $H_{2A+1}(t)$ であらわすことにすると

$$E(H_{2A+1}(t+1) | H_{2A+1}(t)) = (1 - 2 \frac{2A+1}{N^2}) H_{2A+1}(t) \quad (13)$$

が成り立つ。

種の数が $2A$ の場合 “どの種も対等” であるようにすることはできない。適当な一つの種を加えることにより “どの種も対等” にすることができることを “どの種もほとんど対等” であるということにする。 “どの種もほとんど対等” であれば適当な一つの種をとりよせることにより “どの種も対等” にすることができる。

$2A$ の種があり “どの種もほとんど対等” であるとする。

種 i もとの $\gamma_i(t)$ とにより “どの種も対等” にするこ
 とが下とするとする。 $2N+1$ 種の場合と同様なモデルを考へる。
 “種 i の個数も確率変数 $X_i(t)$ ” であらわす。種 i もの $\gamma_i(t)$
 “種 i の個数の積も確率変数 $H'_{2N+1}(t)$ ” であらわす。

そのとき

$$\begin{aligned} E(H'_{2N+1}(t+1) | H'_{2N+1}(t)) \\ = \left(1 + \frac{(2N-3)X_i(t) - 2Nc_2}{N^2}\right) H'_{2N+1}(t) \end{aligned} \quad (14)$$

が成り立つ。

おおよそ次のようなことが言えると思われる。

今 $2N+1$ 種類があり “どの種も対等” であるとする。その
 とき状態は (13) 式によつて変化する。 $H'_{2N+1}(t)$ はある
 時間後に 0 になり 種の数は $2N$ になる。“どの種もほとん
 ど対等” であるから (14) 式が成り立つ。 $X_i(t)$ はある
 時間後に 0 になり 種の数は $2N-1$ になる。

以上のくりかえしにより最終的には一種類だけになり
 まう。

References

1. Kac, M.: Probability and related topics in physical sciences. New York 1959
2. McKean H. P. Jr.: Speed of approach to

equilibrium for Kac's caricature of
Maxwellian gas. Arch. Rational Mech. Anal.,
21, 343 ~ 367 (1966)

3. Volterra, V.: Leçons sur la théorie
mathématique de la lutte pour la vie.
Cahiers scientifiques VII Paris: Gauthier-Villars.
1931