

関孝和の円周率の計算についての注意

真島秀行（お茶の水女子大学大学院）

0. 序

『括要算法』に関孝和の行った円周率の計算法が掲載されている。3つの部分からなっている。まず初めに直径1尺の円に内接する正 2^n 角形の周の長さ L_n を $n=2, \dots, 15, 16, 17$ に対して計算し、その結果を用いて次の式（所謂加速公式）

$$L_{16} + \frac{(L_{16} - L_{15})(L_{17} - L_{16})}{(L_{16} - L_{15}) - (L_{17} - L_{16})}$$

の値を計算して、「3.14159265359 微弱を定周となす」とし、さらに近似分数を $3/1$, $4/1$ から始めて定周を上回る場合は分母分子にそれぞれ1, 3を加え、下回る場合は分母分子にそれぞれ1, 4を加えて古来から知られている近似分数を次々に現れるようにし、最終的に $355/113$ を円周率の近似分数として得ている。

以上はよく知られており、「3.14159265359 微弱」の「微弱」とは通常「3.141592653589...から小数第12位の9を繰り上げて小数第11位を9とした」という意味で、この数値は円周率の真の値と小数第12位まで一致しており精確な計算をしたことになっている。関孝和がどのような考えでこの計算をしたかという説明が加藤平左エ門氏、杉本敏夫氏、竹之内脩氏、森本光生氏、小川東氏等いろいろなされているようだが、上の式を導入する意味をどう捉え、「3.14159265359 微弱を定周となす」と言明したか、ということについて、おそらく同主旨の先行研究があるであろうとも思われるが、広く知られているとは思えないし、見聞きした範囲では明確に言っていないと感じられるので関孝和三百年祭の年であり、敢えて講演の機会を得て講演者の推察を述べた。

1. 推察の結果

結論としては、「外接正 2^n 角形の周の長さを計算して内接正 2^n 角形の周の長さ比べるという方法では効率が悪く精度を上げるには適さないことを認識し、内接正 2^n 角形の周の長さ L_n から辺数を倍にしていくとどれだけ増えるかを知り

真の値を決定するために各段階の増分、すなわち、階差を計算し（書き留め）それを見ることにより階差の比が単調減少しながら $1/4$ （小数表現で0.25）に近

づいていることに気が付き、内接正 2^n 角形の周の長さの上界として上の式で与えられる数値を計算し、実際に計算していた L_{17} と比較して小数第 9 位までの数値を確定し、その上で、有限級数の和として $n=18, 19, 20, 21, 22, 23, \dots$ に対して L_n を（書き留めることなく）そろばん上で階差を次々に 4 で割って足す計算をしたか、あるいは、（計算が正しければ）真の値の下界となる公比を $1/4$ とした無限級数の和を階差に $4/3$ を掛けてそろばんの上で求めたりし、目で見ても比較し確かめ、小数第 13 位まで 3.1415926535897 となると確信して、小数第 12 位または 13 位を繰り上げて同じになる 3.14159265359 を採用し 3.14159265359 微弱と結論付けた」と考えている。

2. 階差の比が単調減少して $1/4$ に収束することについて

加藤平左エ門は表記のことを証明しようと試みているが、周の長さの 2 乗については正しいが、周の長さそのものでは成り立たない不等式を用いており正しくない部分がある。それを修正しておく。（三角関数を用いるならば、倍角の公式を用いて次のような計算

$$L_n = 2^n \sin \frac{\pi}{2^n}, L_n - L_{n-1} = 2^n \sin \frac{\pi}{2^n} - 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{2^{n-1}} = 2^n \sin \frac{\pi}{2^n} \left(1 - \cos \frac{\pi}{2^n}\right),$$

$$\frac{L_{n+1} - L_n}{L_n - L_{n-1}} = \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \left(1 + \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$$

をすれば、 n が大きくなるにつれて $\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$ が 1 に近づき、従って、分母が 4 に近づくことが分かるけれども、以下に三角関数を用いない証明を書いておく。）

直径 1 の円に内接する正 2^n 角形の一辺の長さを b_n とし、矢の長さを h_n とすると、三平方の定理と三角形の相似比を利用して次の関係式を導ける。

$$(b_{n+1})^2 = h_n = \frac{1 - \sqrt{1 - (b_n)^2}}{2} = \frac{1 - \sqrt{1 - h_{n-1}}}{2}, (b_n)^2 = h_{n-1}, (b_{n-1})^2 = h_{n-2} = 4h_{n-1}(1 - h_{n-1})$$

これを利用すると、直径 1 の円に内接する正 2^n 角形の周の長さを L_n とすると、次の関係式がある。

$$(L_{n+1})^2 = 2^{2(n+1)}(b_{n+1})^2 = 2^{2(n+1)}h_n = 2^{2(n+1)} \frac{1 - \sqrt{1 - (b_n)^2}}{2} = 2^{2(n+1)} \frac{1 - \sqrt{1 - h_{n-1}}}{2}$$

$$(L_n)^2 = 2^{2n}(b_n)^2 = 2^{2n}h_{n-1}$$

$$(L_{n-1})^2 = 2^{2(n-1)}(b_{n-1})^2 = 2^{2(n-1)}h_{n-2} = 2^{2(n-1)}4h_{n-1}(1 - h_{n-1}) = 2^n h_{n-1}(1 - h_{n-1})$$

従って、周の長さの階差 $L_{n+1} - L_n$ の比は次のような表現をもち、

$$\begin{aligned} \frac{L_{n+1} - L_n}{L_n - L_{n-1}} &= \frac{2^n \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - h_{n-1}}} - 2^n \sqrt{h_{n-1}}}{2^n \sqrt{h_{n-1}} - 2^n \sqrt{h_{n-1}(1 - h_{n-1})}} = \frac{(\sqrt{h_{n-1}} + \sqrt{h_{n-1}(1 - h_{n-1})})(1 - \sqrt{1 - h_{n-1}})^2}{(\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - h_{n-1}}} + \sqrt{h_{n-1}})(h_{n-1})^2} \\ &= \frac{\sqrt{h_{n-1}} + \sqrt{h_{n-1}(1 - h_{n-1})}}{\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - h_{n-1}}} + \sqrt{h_{n-1}}} \left(\frac{1}{1 + \sqrt{1 - h_{n-1}}} \right)^2 = \frac{\sqrt{h_{n-1}} + \sqrt{h_{n-1}(1 - h_{n-1})}}{\sqrt{\frac{4h_{n-1}}{2 + 2\sqrt{1 - h_{n-1}}} + \sqrt{h_{n-1}}}} \left(\frac{1}{1 + \sqrt{1 - h_{n-1}}} \right)^2 \\ &= \frac{(1 + \sqrt{1 - h_{n-1}})\sqrt{1 + \sqrt{1 - h_{n-1}}}}{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \sqrt{1 - h_{n-1}}}} \left(\frac{1}{1 + \sqrt{1 - h_{n-1}}} \right)^2 = \frac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \sqrt{1 - h_{n-1}}})\sqrt{1 + \sqrt{1 - h_{n-1}}}} \end{aligned}$$

よって、比 $\frac{L_{n+1} - L_n}{L_n - L_{n-1}}$ は n が増えるに連れて単調減少して $\frac{1}{4}$ に収束することがわかる。

このことより、円周率、すなわち、直径 1 の円周の長さの真の値

$$L = \sum_{k=n}^{\infty} (L_{k+1} - L_k) = L_n + (L_{n+1} - L_n) \left(1 + \frac{L_{n+2} - L_{n+1}}{L_{n+1} - L_n} + \frac{L_{n+2} - L_{n+1}}{L_{n+1} - L_n} \frac{L_{n+3} - L_{n+2}}{L_{n+2} - L_{n+1}} + \dots \right)$$

の下界としては、最後の大括弧の項を公比 $\frac{1}{4}$ の等比級数とした値

$L_n + \frac{4}{4-1} (L_{n+1} - L_n)$ をとることができ、一方で上界としては、最後の大括弧の項

を公比 $\frac{L_{n+2} - L_{n+1}}{L_{n+1} - L_n}$ の等比級数とした値 $L_n + \frac{(L_n - L_{n-1})(L_{n+1} - L_n)}{(L_n - L_{n-1}) - (L_{n+1} - L_n)}$ をとることができる。

3. 関孝和の数値計算

以下に、『括要算法』に書かれている関孝和の（小数第 19 位までの数値に強または弱か、小数第 18 位までの数値に微強または微弱と表した）計算結果と現在

の計算機による（小数第 21 位までの）計算結果とを対比しながら書いておく。
円周率の真の値と一致しているところまで下線を引いておく。

L_n ($n=13, 14, 15, 16, 17$)

関孝和の計算

計算機での計算

<u>3.1415925765848 726668</u>	弱	<u>3.1415925765848726656816</u>
<u>3.1415926343385 629908</u>	強	<u>3.1415926343385629890954</u>
<u>3.1415926487769 856708</u>	弱	<u>3.1415926487769856694851</u>
<u>3.1415926523865 913571</u>	強	<u>3.1415926523865913458035</u>
<u>3.1415926532889 927759</u>	弱	<u>3.1415926532889927652719</u>

（関の計算は真の値と小数第 16 位までは合っていることが分かる。）

階差 $L_{n+1} - L_n$ ($n=13, 14, 15, 16$)

関孝和の計算

計算機での計算

0.0000000577536 903240	0.0000000577536903234134
0.0000000144384 226800	0.0000000144384226803897
0.0000000036096 056863	0.0000000036096056763184
0.0000000009024 014188	0.0000000009024014194684

（この階差の表を見れば容易に小数第 13 位までの数値を使えば比が $1/4$ になっていることがわかる。なお、関の計算は小数第 16 位まで真の値に合っている。）

階差の比

関孝和の計算

計算機での計算

0.2500000017141 761754	0.2500000017234630279486
0.2500000011289 321805	0.2500000004308625074710
0.2499999992312 179664	0.2500000001077125965727

$L_{16} + \frac{(L_{16} - L_{15})(L_{17} - L_{16})}{(L_{16} - L_{15}) - (L_{17} - L_{16})}$ の値

関孝和の計算

計算機での計算

<u>3.1415926535897932476</u>	<u>3.1415926535897932386008</u>
------------------------------	---------------------------------

L_n の $n=18, 19, 20, 21, 22, 23, \dots$ に対する推定値としてはそろばんで（4 で割った

数を) 次々に加えるという計算でわかる以下の有限等比級数の和

$$L_{17} + \frac{1}{4}(L_{17} - L_{16}) + \frac{1}{4^2}(L_{17} - L_{16}) + \dots + \frac{1}{4^{n-17}}(L_{17} - L_{16}) = L_{16} + (L_{17} - L_{16}) \left(1 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} \left(\dots \right) \right) \right)$$

と考えられるし、また、無限級数の和

$$L_{16} + (L_{17} - L_{16}) + \frac{1}{4}(L_{17} - L_{16}) + \frac{1}{4^2}(L_{17} - L_{16}) + \dots = L_{16} + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}(L_{17} - L_{16}) = L_{16} + \frac{4}{3}(L_{17} - L_{16})$$

をそろばんの上で計算したのであろうと推察される。

計算機による加速公式の計算による上界と公比 1/4 の無限等比級数の計算による下界は

n=13	<u>3.1415926535897938047128</u>	<u>3.1415926535897930968994</u>
n=14	<u>3.1415926535897932738532</u>	<u>3.1415926535897932296150</u>
n=15	<u>3.1415926535897932406745</u>	<u>3.1415926535897932379096</u>
n=16	<u>3.1415926535897932386008</u>	<u>3.1415926535897932384280</u>

従って、3.141592653589793238 は円周率の小数第 18 位までの真の値となっている。

関孝和の計算から加速公式で計算した上界と公比 1/4 の無限級数である下界は、

n=13		<u>3.1415926535897930988</u>
n=14	<u>3.1415926535897932748</u>	<u>3.1415926535897932308</u>
n=15	<u>3.1415926535897932597</u>	<u>3.1415926535897932525</u>
n=16	<u>3.1415926535897932476</u>	<u>3.1415926535897932488</u>

となるが、関孝和は数値計算により階差の比が単調減少して $\frac{1}{4}$ に近づいて行く

と確信していたはずだが、彼の遺した計算では、n=16 に対しては階差の比が 0.25 未満となってしまう、周の長さの計算が n=15, 16, 17 で一部違っていると考えたはずである。その間違いは小数第 17, 18, 19 位くらいにあって、小数 16 位までは階差の比がほぼ $\frac{1}{4}$ になっており、さらに、小数第 13 位までに限定すれば階

差が正確に $\frac{1}{4}$ になっており、その位までは正しい計算になっていると考えたと

推察する。従って、その位までの数値を使って、小数第 12 位または第 13 位で繰上げして同じ数値が並ぶ結果となる数値 3.14159265359 微弱を定周と確定したと考える。繰り返しになるが、小数第 13 位までの値を有効として小数第 12

位までの数値に強または弱か、小数第 11 位までの数値に微強または微弱という表現を用いるとき、小数第 12 位が 9 であるから切り上げると 3.14159265359 微弱となるが、小数第 13 位の 7 を切り上げて 3.141592653590 弱としても後に計算に使う数値は 3.14159265359 となるので 3.14159265359 微弱という表現にしたと推察する。

補足 1. 建部賢弘の関孝和の計算法に関する言及について

建部賢弘は以下の書で関氏がどこまで求めたか言及している。

「綴術算経」 探圓數 第十一

第一段 本文略

始関氏角面幕を開平方にして各角面を求て截周を用ゆ今角面幕を以て截周幕を求る者開平方の功を省也是首より幕數を用る事を察するに非ず先截周を用て後探て幕數を用る事を會す

第二段 本文略

始関氏増約の術を以て定周を求る事を理會して一遍にして止む故に十三万千七十二角に到る截周を求て十五六位の真數を究め得たり今累遍増約の術を用る事を探り會して千二十四角に到る截周幕を求て四十餘位の真數を究む是亦首より増約累遍を用る事を察すへからす一遍の増約を用て後玄く探て累遍する事を會せり

第三段 碎約の術を用て径一尺の定周三尺一寸四一五九二六五三五八九七九三二三八六二六四三三八三二七九五〇二八八四一九七一二強を求得て零約の術を以て径周の率を造る 以下略

始関氏零約（中略）関氏円を碎抹して定周を求め零約の術を以て径周の率を造れり爾しより後二十余年を歴て隋志を覲るに周數率數ことごとく邂逅に符号する者有りああ祖子関子也邦を異にし時を殊にすと雖真理に會する事相同可謂妙なりと

「建部先生綴術真本」（東大本）では「二十許位の真數を究め」とある。

「綴術算経（東北大学 狩野本）」でも「二十許位の真數を究め」とある。

「綴術算経」（国立公文書館蔵）序は 1722 年（享保 7 年 1 月 7 日）とあり、「建部先生綴術真本」（東大本）及び「綴術算経（東北大学 狩野本）」では 1722 年（享保 7 年 2 月 8 日）で約一か月の間に、関孝和の計算の検算を行ったと考えられる。その結果、真の値に合う桁数が小数 15～16 位から小数 20 位許位と数桁多くなるのを確認している。成立順についていくつか説があったが、この部

分を見比べて成立順に言及したものは今までなかった。序の年月日の順に成立していると考えられる。

補足 2. 等比級数の和の公式について

初項 a で公比 r の等比数列について、(結局、最後には、部分和に r を掛けて差をとって割ることになるが) そろばんで計算する立場からすると

$$aS_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = a(1 + r(1 + r(1 + r(\dots(1 + r)\dots))))),$$

$$a(1 + rS_n) = aS_{n+1} = aS_n + ar^n, (1-r)aS_n = a(1-r^n), aS_n = a \frac{1-r^n}{1-r}$$

その代わりに元となる等比数列の階差数列からなる級数を考えると自然に得られる。

$$(a - ar) + (ar - ar^2) + \dots + (ar^{n-1} - ar^n) = a(1-r) + ar(1-r) + \dots + ar^{n-1}(1-r)$$

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = a \frac{1-r^n}{1-r}$$

補足 3. 本文中にも述べたが、周の長さの比 $\frac{L_{n+1}-L_n}{L_n-L_{n-1}}$ の単調減少性については、三角関数を用いるならば、倍角の公式を用いて次のような計算になる。

$$L_n = 2^n \sin \frac{\pi}{2^n},$$

$$L_n - L_{n-1} = 2^n \sin \frac{\pi}{2^n} - 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{2^{n-1}} = 2^n \sin \frac{\pi}{2^n} \left(1 - \cos \frac{\pi}{2^n}\right),$$

$$\frac{L_{n+1}-L_n}{L_n-L_{n-1}} = \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \left(1 + \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$$

一方、周の長さの自乗の階差の比についても同様の計算を行える。

$$(L_n)^2 = 2^{2n} \sin^2 \frac{\pi}{2^n},$$

$$(L_n)^2 - (L_{n-1})^2 = 2^{2n} \sin^2 \frac{\pi}{2^n} - 2^{2(n-1)} \sin^2 \frac{\pi}{2^{n-1}} = 2^{2n} \sin^2 \frac{\pi}{2^n} \left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{2^n}\right),$$

$$\frac{(L_{n+1})^2 - (L_n)^2}{(L_n)^2 - (L_{n-1})^2} = \frac{1}{4 \cos^4 \frac{\pi}{2^{n+1}}} =$$

このとき出てくる分母の関数が、周の長さに関する場合よりも単調性が簡単に示せるものであることから、周の長さの自乗を考えた方が取り扱いのであろう。

補足 4. 小数第 16 位 (17 桁) まで真の値を得ていたことになるが「3.14159265359 微弱を以て定周となす」と小数第 11 位 (12 桁) しか言明していない理由について 2008 年 8 月 5 日午前に何人かの講演があった。それらをもとに講演後に議論がなされた。次のような意見があった。

- (1) 関のつつましやかな性質による、
- (2) 近似分数 $355/113$ を出すには 12 桁で十分だったから、
- (3) 2 の 18 乗角形も計算し四捨五入したから、
- (4) 階差の比の級数として公比 0.251 の等比級数で置き換えたものを考えたから、

(5) 数値計算で階差の比が $1/4$ となる桁まで採用したから、
筆者の意見は (5) であり、本文で説明したとおりである。

一次資料

『括要算法』、関孝和遺稿, 1712 年 (正徳 2) 刊本, 東京大学総合図書館蔵他
「綴術算経」、建部賢弘著, 1722 年 (享保 7) 写本, 国立公文書館蔵

参考文献

- 小川東、佐藤健一、竹之内脩、森本光生、『建部賢弘の数学』、共立出版、(2008)
小川東、平野葉一、『数学の歴史—和算と西欧数学の発展』、朝倉書店、(2003)
加藤平二衛門、『算聖 関孝和先生の業績』、槇書店、
小松彦三郎、「綴術算経の異本と成立の順序」、数理解析研究所講究録 1130 巻, 2000 年, pp229-244
小松彦三郎、「綴術算経の異本と成立の順序補遺」、数理解析研究所講究録 1392 巻, 2004 年, pp69-70
日本学士院編、『明治前日本数学史』第 2 巻、岩波書店、(1956)
横塚啓之、「建部賢弘の著と考えられる『弧背截約集』について」、数学史研究 182, 2004, pp1-39