

特異点閉じ込め法と広田の方法

丸野健一 (Ken-ichi Maruno)

九州大学大学院総合理工学研究科大気海洋環境システム学専攻

1 はじめに

ソリトン方程式は, その発見以来活発に研究され, 物理, 数学, 工学の分野に大きな影響を及ぼしてきた. 様々な分野への広がり要因は, ソリトン方程式の豊富な数学的構造にある. このソリトン方程式の解空間の持つ豊富な代数構造を明らかにする手法として広田の方法がある.

また, ソリトン方程式の可積分性を保存した離散化は数値解析への応用の観点から, 1970年代から議論されてきた [1, 2]. しかし最近, 数理工学, 物理学において離散可積分系が直接現れ, 差分方程式それ自体の数学的構造の研究が重要になってきた [3, 4].

可積分系の離散化の有効な方法の一つは「解の離散化」であり, 広田の方法を用いて 1) 適当な従属変数変換で双線形形式を求め, 2) ソリトン解を求め, 3) 解に現れる指数関数を離散化し, 4) 適当な従属変数変換を見出して非線形差分方程式を得る, というステップを踏む. この手法は, 代数構造をよく表すという広田の方法の利点をうまく生かした方法である. しかし, この方法では, 4) のステップの「適当な従属変数変換」を組織的に見つけることが難しいし, また方程式を非線形のまま扱うことが難しい. つまり, 非線形のレベルと τ 関数のレベルのギャップが大きい. たとえば「与えられた非線形差分方程式の可積分性を判定し, 可積分ならば解を構成せよ」という問題を解くのは非常に難しい. このギャップを埋める方法となるのが, Grammaticos らにより提出された特異点閉じ込め (Singularity Confinement) という概念である [5]. これはパルベ性の離散版とみなされるものである.

本稿では, 特異点閉じ込め法を用いて, 非線形差分方程式を双線形化する方法について述べる. この方法は Ramani らにより常差分方程式の場合で提案され [6], 我々は非線形偏差分方程式の場合にもそれは有効であることを示した [7]. さらに, この方法は微差分方程式に対しても有効であることを示す.

2 特異点閉じ込め法

連続系においては可積分判定テストとしてパルベテストがよく知られているが, 離散系においては長い間, 可積分判定テストがなく, そのことが離散系の研究を一層難しくしていた. Grammaticos らは, 連続系のパルベ性に相当する特異点閉じ込め (Singularity Confinement) という概念を提案した. 彼らはまず, 離散 KdV 方程式

$$x_j^{i+1} = x_{j+1}^{i-1} + \frac{1}{x_j^i} - \frac{1}{x_{j+1}^i} \quad (1)$$

	i	i+1	i+2	i+3
j-2				f f
j-1			∞	0 f
j		0	∞	f
j+1				

図 1: discrete KdV 方程式の特異点のパターン

で考えた. いま, $x_j^i = \epsilon \rightarrow 0$ になったとしよう. このとき, 順に漸化式を解いていくことにより,

$$\begin{aligned} x_{j-1}^{i+1} &= -\frac{1}{\epsilon} + O(\epsilon^0) \rightarrow \infty, \\ x_j^{i+1} &= \frac{1}{\epsilon} + O(\epsilon^0) \rightarrow \infty, \\ x_{j-1}^{i+2} &= -\epsilon + O(\epsilon^2) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

となり特異点が生じるが, その他は有限値となり, 特異点は打ち消しあってなくなってしまふ. つまり, 特異点は有限領域に閉じこめられている. さらに, 初期値の情報は失われている. この状況はパンルベ性の概念に, 非常に近いものである.

つまり特異点閉じ込めとは次のような性質である.

- 初期値に依存してあるステップで特異性が現れたとき, その特異性は何ステップか後に打ち消しあってなくなってしまう.
- 初期値に関する情報は特異点を通過した後に失われない.

この性質は連続系のパンルベ性の概念と類似しており, 事実多くの離散可積分系がこの性質を持っていることが調べられている.

注意すべきことは, ここでいう特異点は動く特異点のことである. 動かない特異点は, 特異点閉じ込めテストの対象から除かれなければならない.

しかし, 特異点閉じ込めテストをパスするが, 非可積分である例は幾つか知られている. 例えば, 非可積分写像

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_n^2 - 4} \quad (2)$$

を考えてみよう. これは $x_n = 2 + \epsilon$ から生じる特異点と, $x_n = -2 + \epsilon$ から生じる特異点の 2 種類が考えられるが, どちらの特異点も x_{n+1} が無限大になるだけで, 閉じ込められてしまう. Grammaticos らは, このようなタイプの差分方程式を排除するために, pre-image non-proliferation という判定法と特異点閉じ込め法を組み合わせることを提案し

ている [8]. proliferation of pre-image とは, 平たく言えば, 漸化式を逆に解いていったとき, pre-image が一つに決まらず, その数が指数関数的に増加していくことをいう. 上の漸化式は, まさにこれにあたり, 可積分ではないといえる.

3 特異点閉じ込め法と広田の方法

広田の方法は微分方程式, および微差分方程式の解の構成に非常に強力な方法であることは広く知られている. 双線形方程式の従属変数は τ 関数とよばれ, 非線形可積分系理論において中心的な役割を演じる.

たとえば Korteweg-de Vries 方程式,

$$4u_t - 6uu_x - u_{xxx} = 0, \quad (3)$$

は, 従属変数変換

$$u = 2(\log \tau)_{xx}. \quad (4)$$

によって

$$(D_x^4 - 4D_x D_t)\tau \cdot \tau = 0, \quad (5)$$

に変換される. eq.(5) で, D_x etc. は 以下で定義される D-operator である.

$$D_x^n D_t^m f \cdot g = (\partial_x - \partial_y)^n (\partial_t - \partial_s)^m f(x, t)g(y, s)|_{y=x, s=t}. \quad (6)$$

摂動法

$$\tau = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \cdots, \quad (7)$$

を適用し, f_1 として指数関数を適用すると, ソリトン解を導くことができる. さらに, このソリトン解は行列式で書かれることがわかっている. たとえば, N ソリトン解は

$$\tau = \begin{vmatrix} f_1 & \partial_x f_1 & \cdots & \partial_x^{N-1} f_1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_N & \partial_x f_N & \cdots & \partial_x^{N-1} f_N \end{vmatrix}, \quad (8)$$

で与えられる. ここで

$$f_k = \exp(p_k x + p_k^3 t) + \exp(-p_k x - p_k^3 t), \quad k = 1, \cdots, N. \quad (9)$$

である.

広田の方法を行う上での重要なステップは, 双線形形式への適当な従属変数変換を見つけることである. これを見い出すのは簡単なことではないが, しかし連続系の場合であれば, これはたいてい $u = 2(\log \tau)_{xx}$ または $u = F/G$ の形をしているし, またパウルベテストから組織的に見い出すことも可能である [9].

では, 離散系へ広田の方法を適用することを考えてみよう. 上の離散 KdV 方程式の場合, 従属変数変換

$$x_j^i = \frac{\tau_j^i \tau_{j+1}^{i-2}}{\tau_{j+1}^{i-1} \tau_j^{i-1}}, \quad (10)$$

により, 双線形形式

$$\tau_{j-1}^{i+1}\tau_{j+1}^{i-2} + \tau_{j+1}^{i-1}\tau_{j-1}^i = \alpha\tau_j^i\tau_j^{i-1}, \quad (11)$$

に変換されるが, この従属変数変換を見出すのは考えられる添字 i, j の組み合わせが多く非常に難しい. 事実, 上の従属変数変換は先に双線形方程式が与えられてから見いだされたものである. もし先に非線形差分方程式が与えられたとして, 上のような従属変数変換を見つけよ, という問題が提起されたならば, どうすればよいだろうか? これは, 非常に困難な問題であり, このことが離散系の解析を難しいものとしている一つの要因である. もし, 連続系同様, 離散系でも特異点閉じ込めテストの情報を用いて双線形形式への従属変数変換が見いだせるならば, 上にあげた困難な状況も解決し, 離散系の解析の強力な道具となるであろう.

Ramani らは離散 Painlevé 方程式の場合で, 特異点閉じ込めテストの特異点のパターンから双線形形式が導出できることを示し, さらに我々は非線形偏差分方程式の場合にも同様のことが言えることを示した [6, 7]. 上の離散 KdV 方程式では, (i, j) でのみ零点をもつ関数 τ_j^i によって特異点は生じたと仮定すれば, 上の従属変数変換は自然に導かれる.

3.1 離散時間戸田方程式

Suris は離散時間戸田方程式には 4 種類あるとしているが [10], そのうちの 2 本は独立変数変換により, 残り 2 本に帰着する. したがって, 本質的には, 広田によって提案されたもの

$$\exp(x_n^{t+1} - x_n^t) - \exp(x_n^t - x_n^{t-1}) = \delta^2(\exp(x_{n+1}^t - x_n^t) - \exp(x_n^t - x_{n-1}^t)), \quad (12)$$

Suris によって提案されたもの

$$\exp(y_n^{t+1} - y_n^t) - \exp(y_n^t - y_n^{t-1}) = \delta^2(\exp(y_{n+1}^t - y_n^t) - \exp(y_n^t - y_{n-1}^t)), \quad (13)$$

の 2 種類である. この 2 つの離散時間戸田方程式の違いを見るために, 特異点閉じ込め法を用いて双線形方程式を求めてみよう. eq.(12) において

$$a_n^t = \exp(x_{n+1}^t - x_n^t), \quad (14a)$$

$$b_n^t = \exp(x_n^{t+1} - x_n^t), \quad (14b)$$

とおくと

$$b_n^t - b_n^{t-1} = \delta^2(a_n^t - a_{n-1}^t), \quad (15a)$$

$$a_n^{t+1}b_n^t = a_n^tb_{n+1}^t, \quad (15b)$$

の形となる.

$$a_n^t = \frac{a_n^{t-1}b_{n+1}^{t-1}}{b_n^{t-1}}, \quad (16a)$$

$$b_n^t = b_n^{t-1} + \delta^2(a_n^t - a_{n-1}^t), \quad (16b)$$

に特異点閉じ込めテストを適用すると

$$\{a_n^{t+1}, a_{n-1}^{t+1}, a_n^{t+2}, a_{n+1}^{t+2}\} \rightarrow \{0, \infty, \infty, 0\}, \quad (17a)$$

$$\{b_n^t, b_n^{t+1}, b_{n+1}^{t+1}, b_{n+1}^{t+2}\} \rightarrow \{0, \infty, \infty, 0\}, \quad (17b)$$

τ_n^t が (n, t) で 0 になることでこのパターンが生じたとすると従属変数変換は

$$a_n^t = \frac{\tau_{n+1}^{t-1} \tau_{n-1}^{t-2}}{\tau_n^{t-1} \tau_n^{t-2}}, \quad (18a)$$

$$b_n^t = \frac{\tau_n^t \tau_{n-1}^{t-2}}{\tau_n^{t-1} \tau_{n-1}^{t-1}}, \quad (18b)$$

と考えられる. これをもとの式に代入して変形すると双線形形式

$$\tau_n^t \tau_n^{t-2} - \delta^2 \tau_{n+1}^{t-1} \tau_{n-1}^{t-1} = \{\tau_n^{t-1}\}^2, \quad (19)$$

が導かれる.

eq.(13) において

$$c_n^t = \exp(y_{n+1}^{t+1} - y_n^t), \quad (20a)$$

$$d_n^t = \exp(y_n^{t+1} - y_n^t), \quad (20b)$$

とおくと

$$d_n^t - d_n^{t-1} = \delta^2 (c_n^{t-1} - c_{n-1}^t), \quad (21a)$$

$$d_n^{t-1} c_n^t = d_{n+1}^t c_n^{t-1}. \quad (21b)$$

変形して

$$c_n^t = (1/\delta^2)(d_n^{t+1} - d_n^t + \delta^2 c_{n-1}^{t+1}), \quad (22a)$$

$$d_n^t = \frac{d_{n-1}^{t-1} c_{n-1}^t}{c_{n-1}^{t-1}}. \quad (22b)$$

これに特異点閉じ込めテストを行うと,

$$\{c_n^t, c_{n+1}^t, c_{n+1}^{t+1}, c_{n+2}^{t+1}\} \rightarrow \{0, \infty, \infty, 0\}, \quad (23a)$$

$$\{d_{n+1}^t, d_{n+1}^{t+1}, d_{n+2}^t, d_{n+2}^{t+1}\} \rightarrow \{0, \infty, \infty, 0\}, \quad (23b)$$

τ_n^t が (n, t) で 0 になることでこのパターンが生じたとすると従属変数変換は

$$c_n^t = \frac{\tau_n^t \tau_{n-2}^{t-1}}{\tau_{n-1}^t \tau_{n-1}^{t-1}}, \quad (24a)$$

$$d_n^t = \frac{\tau_{n-1}^t \tau_{n-2}^{t-1}}{\tau_{n-1}^{t-1} \tau_{n-2}^t}, \quad (24b)$$

と考えられる. これをもとの式に代入して変形すると双線形形式

$$\tau_n^t \tau_n^{t-2} - \delta^2 \tau_{n+1}^{t-1} \tau_{n-1}^{t-1} = \{\tau_n^{t-1}\}^2, \quad (25)$$

が導かれる.

結局, 二つの方程式は, 同じ戸田の双線形方程式であり, 非線形変換が違うものをとっているために, 非線形のレベルでは違うもののように見えるのである. 2式の間の Miura 変換は

$$\exp(x_n^{t+1} + y_n^t) = \exp(x_{n-1}^{t+1} + y_{n+1}^t), \quad (26)$$

となっている.

3.2 離散時間 Relativistic Toda lattice 方程式

Relativistic Toda lattice 方程式

$$\ddot{q}_n = (\dot{q}_{n-1} + c)(\dot{q}_n + c) \frac{g^2 \exp(q_{n-1} - q_n)}{1 + g^2 \exp(q_{n-1} - q_n)} - (\dot{q}_n + c)(\dot{q}_{n+1} + c) \frac{g^2 \exp(q_n - q_{n+1})}{1 + g^2 \exp(q_n - q_{n+1})}, \quad (27)$$

(c は光速, g は定数) の離散化として, 離散時間 Relativistic Toda lattice 方程式

$$\frac{\delta \exp(q_n^{t+1} - q_n^t) - 1}{\delta \exp(q_n^t - q_n^{t-1}) - 1} = \frac{1 + g^2 \exp(q_{n-1}^t - q_n^t)}{1 + g^2 \exp(q_n^t - q_{n+1}^t)} \cdot \frac{1 + \frac{g^2}{\delta} \exp(q_n^t - q_{n+1}^{t+1})}{1 + \frac{g^2}{\delta} \exp(q_{n-1}^{t-1} - q_n^t)}, \quad (28)$$

が提案されている [11]. ($\delta = \exp(ch)$, h は格子間隔)

離散時間 Relativistic Toda lattice 方程式

$$I_n^t = \exp(q_n^{t-1} - q_n^t), V_n^t = \exp(q_{n-1}^{t-1} - q_n^t), \quad (29)$$

とおくことによって

$$I_n^t V_{n+1}^{t+1} = I_{n+1}^{t+1} V_{n+1}^t, \quad (30a)$$

$$\frac{\delta - I_n^{t+1}}{\delta - I_n^t} = \frac{I_n^{t+1} + g^2 V_n^{t+1}}{I_n^t + g^2 V_{n+1}^t} \frac{\delta + g^2 V_{n+1}^{t+1}}{\delta + g^2 V_n^t}, \quad (30b)$$

となり, これを変形して

$$I_n^t = \frac{I_{n-1}^{t-1} V_n^t}{V_n^{t-1}}, \quad (31a)$$

$$V_n^t = -\frac{\delta}{g^2} + \frac{\delta + g^2 V_{n-1}^{t-1}}{g^2} \frac{\delta - I_{n-1}^t}{\delta - I_{n-1}^{t-1}} \frac{I_{n-1}^{t-1} + g^2 V_n^{t-1}}{I_{n-1}^t + g^2 V_{n-1}^t}, \quad (31b)$$

とし, 特異点閉じ込めテストを行う. 特異点は $V_n^t \rightarrow 0$ から生じる場合, $I_n^t \rightarrow \delta$ から生じる場合, $I_n^t + g^2 V_{n+1}^t \rightarrow 0$ から生じる場合の 3 通り考えられ, それぞれ

$$1. \quad \{I_n^t, I_n^{t+1}, I_{n+1}^t, I_{n+1}^{t+1}\} \rightarrow \{0, \infty, \infty, 0\}, \\ \{V_n^t, V_{n+1}^t, V_{n+1}^{t+1}, V_{n+2}^{t+1}\} \rightarrow \{0, \infty, \infty, 0\}, \quad (32a)$$

$$2. \quad \{I_n^t\} \rightarrow \{\delta\}, \{V_{n+1}^t\} \rightarrow \{-\frac{\delta}{g^2}\}, \quad (32b)$$

$$3. \quad \{I_{n+1}^{t+1}\} \rightarrow \{\delta\}, \{V_{n+1}^{t+1}\} \rightarrow \{-\frac{\delta}{g^2}\}, \quad (32c)$$

となる. これらのパターンはそれぞれ (n, t) でのみ零点をもつ関数 $F_n^t, G_n^t, \bar{G}_n^t$ によって生じたとする, と,

$$I_n^t = \delta + \alpha_1 \frac{G_n^t \bar{G}_{n-1}^{t-1}}{F_n^{t-1} F_{n-1}^t} = \alpha_2 \frac{F_n^t F_{n-1}^{t-1}}{F_n^{t-1} F_{n-1}^t}, \quad (33a)$$

$$V_n^t = -\frac{\delta}{g^2} + \beta_1 \frac{G_{n-1}^t \bar{G}_{n-1}^{t-1}}{F_{n-1}^t F_{n-1}^{t-1}} = \beta_2 \frac{F_n^t F_{n-2}^{t-1}}{F_{n-1}^t F_{n-1}^{t-1}}, \quad (33b)$$

と表わされると推測でき, この従属変数変換ともとの方程式から

$$\delta F_{n-1}^{t+1} F_n^t - \alpha_2 F_n^{t+1} F_{n-1}^t + \alpha_1 \bar{G}_{n-1}^t G_n^{t+1} = 0, \quad (34a)$$

$$(\delta/g^2) F_n^t F_n^{t+1} + \beta_2 F_{n-1}^t F_{n+1}^{t+1} - \beta_1 \bar{G}_n^t G_n^{t+1} = 0, \quad (34b)$$

$$\alpha_2 F_n^t F_n^t + g^2 \beta_2 F_{n-1}^t F_{n+1}^t - \gamma G_n^t \bar{G}_n^t = 0, \quad (34c)$$

が導かれる. 解については文献 [12] に掲載している.

3.3 Bruschi-Ragnisco 方程式

Bruschi-Ragnisco 方程式 [13]

$$\dot{b}_n = b_{n+1} c_n - b_n c_{n-1} \quad (35a)$$

$$\dot{c}_n = c_n (c_n - c_{n-1}), \quad (35b)$$

は,

$$b_n = \dot{q}_n, c_n = \frac{\dot{q}_n}{q_n - q_{n+1}}, \quad (36)$$

により,

$$\ddot{q}_n = \frac{\dot{q}_{n+1} \dot{q}_n}{q_n - q_{n+1}} - \frac{\dot{q}_n \dot{q}_{n-1}}{q_{n-1} - q_n}, \quad (37)$$

と変形でき, Hamilton 構造, Lax 方程式など様々な性質が調べられている. この離散化は Suris により提案された [14].

$$b_n^{t+1} (1 + h c_{n-1}^{t+1}) = b_n^t + h b_{n+1}^t c_n^t, \quad (38a)$$

$$c_n^{t+1} = c_n^t \frac{1 + h c_n^{t+1}}{1 + h c_{n-1}^{t+1}}, \quad (38b)$$

これに対して特異点閉じ込め法を適用しよう. 独立変数変換 $n-t \rightarrow n$ を行い, 変形すると

$$b_n^t = \frac{b_{n-2}^{t+1} (1 + h c_{n-3}^{t+1}) - b_{n-1}^t}{h c_{n-1}^{t+1}}, \quad (39a)$$

$$c_n^t = c_{n-1}^{t+1} \frac{1 + h c_{n-2}^{t+1}}{1 + h c_{n-1}^{t+1}}. \quad (39b)$$

特異点が生じるのは, 第一式の分母から生じる場合と, 第二式の分母から生じる場合の二通りである.

まず、第一式の分母から特異点が生ずる場合を考えよう。 $c_n^t = \epsilon$ とおくと、 b が無限大となるが、生じた特異点はいつまでも閉じ込められず、どこまでも伝わっていく。

しかし、第二式の分母から生じる場合を考えて、 $c_n^t = -\frac{1}{h} + \epsilon$ とおくと、特異点は有限の領域で閉じ込められ、そのパターンは

$$\{c_n^t, c_{n+1}^{t-1}, c_{n+2}^{t-1}\} \rightarrow \{-\frac{1}{h}, \infty, 0\}, \quad (40a)$$

$$\{b_{n-2}^{t-1}\} \rightarrow \{0\}. \quad (40b)$$

このパターンから従属変数変換を考えると、

$$b_n^t = \alpha \tau_{n-2}^{t+1}, \quad (41a)$$

$$\begin{aligned} c_n^t &= -\frac{1}{h} + \beta \frac{\tau_n^t}{\tau_{n-1}^{t+1}} \\ &= \gamma \frac{\tau_{n-2}^{t+1}}{\tau_{n-1}^{t+1}}, \end{aligned} \quad (41b)$$

となり、これから

$$-\frac{1}{h} \tau_{n-1}^{t+1} + \beta \tau_n^t = \gamma \tau_{n-2}^{t+1}. \quad (42)$$

が導かれる。もとの独立変数変換にもどす ($n+t \rightarrow n$) と

$$-\frac{1}{h} \tau_n^{t+1} + \beta \tau_n^t = \gamma \tau_{n-1}^{t+1}, \quad (43)$$

となり、これは線形差分方程式である。

特異点閉じ込めの性質は、考えられるすべての動く特異点、すなわち初期値に依存して生じる特異点に対して成り立たねばならないものである。しかし、この場合、閉じ込められない場合があるにも関わらず、可積分である。これはどういうことだろうか？

もう一度、方程式を見てみよう。この方程式は、 b, c についての連立方程式であるが、注意しなければならないのは、第二式は c だけの式となっているということである。これによって c は決まってしまう、第一式は b についての線形差分方程式になる。したがって、 b に対しては動く特異点は存在しない。

つまり、最初のパターンは単に線形方程式の係数からなる動かない特異点であるので、特異点閉じ込めテストで考慮する必要のないものである。したがって、これは特異点閉じ込めの精神に反するものではない。

3.4 微差分方程式

微差分方程式に対する特異点閉じ込め法は Ramani らにより行われている [15]。ここでは、微差分方程式に対しても特異点閉じ込め法を用いることで、双線形方程式を導けることを示す。戸田方程式

$$\ddot{x}_n = \exp(x_{n+1} - x_n) - \exp(x_n - x_{n-1}). \quad (44)$$

これは, 変数変換

$$a_n = \exp(x_{n+1} - x_n), b_n = \dot{x}_n, \quad (45)$$

により次の形に変換できる.

$$\dot{a}_n = a_n(b_{n+1} - b_n), \quad (46)$$

$$\dot{b}_n = a_n - a_{n-1}. \quad (47)$$

これを变形して

$$a_n = a_{n-1} + \dot{b}_n, \quad (48a)$$

$$b_{n+1} = b_n + \frac{\dot{a}_n}{a_n}, \quad (48b)$$

の形で

$$a_n = \phi\psi, \quad \psi = t - t_0 \rightarrow 0, \quad (49)$$

(ϕ は t の函数)を代入して, n について順に解いて ψ のべきでまとめると,

$$b_{n+1} = \frac{1}{\psi} + b_n + \frac{\dot{\phi}}{\phi} \rightarrow \infty,$$

$$a_{n+1} = -\frac{1}{\psi^2} + \dot{b}_n + \frac{\ddot{\phi}}{\phi} - \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 + \phi\psi \rightarrow \infty,$$

$$b_{n+2} = -\left(\frac{1}{\psi} - b_n - \frac{\dot{\phi}}{\phi}\right) + O(\psi) \rightarrow \infty,$$

$$a_{n+2} = A\psi + O(\psi^2) \rightarrow 0,$$

(A は ϕ の有理式)となつて, 特異点は閉じ込められることがわかる.

ψ を連続変数である時間を含まない離散的な従属変数変換に対応する特異多様体であるとし, $\psi = \tau_n$ (τ_n は n にのみ零点を持つ函数)と考えると, 上の計算の ψ に注目すると

$$a_n = \frac{\tau_n \tau_{n-2}}{\tau_{n-1}^2}, \quad (50)$$

となっていることが予想される.

また ϕ を連続変数である時間を含む(t の微分を含む)従属変数変換に対応する特異多様体であるとし, $\phi = \tau_n$ (τ_n は n にのみ零点を持つ函数)と考えると, 上の計算の ϕ に注目すると

$$a_n = \delta + \frac{\ddot{\tau}_{n-1}}{\tau_{n-1}} - \left(\frac{\dot{\tau}_{n-1}}{\tau_{n-1}}\right)^2, \quad (51a)$$

$$b_n = \frac{\dot{\tau}_{n-1}}{\tau_{n-1}} - \frac{\dot{\tau}_{n-2}}{\tau_{n-2}}, \quad (51b)$$

が予想でき, これらの従属変数変換から双線形方程式

$$\ddot{\tau}_n \tau_n - (\dot{\tau}_n)^2 + \delta(\tau_n)^2 = \tau_{n+1} \tau_{n-1}, \quad (52)$$

が導かれる。これは特異点閉じ込め法とパンルベテストを融合したものである。

ロトカ・ボルテラ方程式

$$\dot{u}_n = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}), \quad (53)$$

を考えよう。

$$u_n = u_{n-2} + \frac{\dot{u}_{n-1}}{u_{n-1}}, \quad (54)$$

の形で

$$u_n = \phi\psi, \quad \psi = t - t_0 \rightarrow 0, \quad (55)$$

を代入し計算していく。

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{\psi} + \frac{\dot{\phi}}{\phi} + u_{n-1} \rightarrow \infty, \\ u_{n+2} &= -\left(\frac{1}{\psi} - \frac{\dot{\phi}}{\phi} - u_{n-1}\right) + O(\psi) \rightarrow \infty, \\ u_{n+3} &= A\psi \rightarrow 0, \end{aligned}$$

(A は ϕ の有理式)となり、特異点は閉じ込められる。さきほどと同様に、 ψ を連続変数である時間を含まない離散的な従属変数変換に対応する特異多様体であるとし、 $\psi = \tau_n$ (τ_n は n にのみ零点を持つ函数)と考え、 ϕ を連続変数である時間を含む(t の微分を含む)従属変数変換に対応する特異多様体であるとし、 $\phi = \tau_n$ (τ_n は n にのみ零点を持つ函数)と考えると

$$\begin{aligned} u_n &= \delta + \frac{\dot{\tau}_{n-1}}{\tau_{n-1}} - \frac{\dot{\tau}_{n-2}}{\tau_{n-2}} \\ &= \frac{\tau_n \tau_{n-3}}{\tau_{n-1} \tau_{n-2}}, \end{aligned} \quad (56)$$

が予想できる。これによって、

$$\dot{\tau}_n \tau_{n-1} - \tau_n \dot{\tau}_{n-1} + \delta \tau_n \tau_{n-1} = \tau_{n+1} \tau_{n-1}, \quad (57)$$

次に modified 微差分 mKdV 方程式 (武野)[16]

$$\dot{u}_n = u_n^2(u_{n+1} - u_{n-1}), \quad (58)$$

の双線形化を考えよう。これを變形して

$$u_n = u_{n-2} + \frac{\dot{u}_{n-1}}{u_{n-1}^2}, \quad (59)$$

の形で

$$u_n = \phi\psi, \quad \psi = t - t_0 \rightarrow 0, \quad (60)$$

を代入し計算していく。

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{\phi} \left(\frac{1}{\psi^2} + \frac{\dot{\phi}}{\phi\psi} + \phi u_{n-1} \right) \rightarrow \infty, \\ u_{n+2} &= -\phi\psi + O(\psi^2) \rightarrow 0, \\ u_{n+3} &= O(\psi^0), \end{aligned}$$

となり, 特異点は閉じ込められる. さきほどと同様にして, この情報を用いて従属変数変換

$$u_n = \frac{\tau_n \tau_{n-2}}{\tau_{n-1}^2}, \quad (61)$$

が予想できる. これを eq.(58) に代入すると

$$\dot{\tau}_n \tau_{n-1} - \tau_n \dot{\tau}_{n-1} + \delta \tau_n \tau_{n-1} = \tau_{n+1} \tau_{n-2}, \quad (62)$$

が導出される.

4 まとめ

特異点閉じ込め法の応用としての一面を見てきた. 連続系においてはパルベテストが双線形形式への従属変数変換を導いたが, 離散系では特異点閉じ込め法が同じ役割をする. パルベテストと特異点閉じ込め法の関係については, 感覚的には非常に類似したものであることはわかるのだが, その関係をすっきりと述べた文献は筆者の知る限りではまだない. これは今後の課題であるが, 特異点閉じ込め法の有効性は十分確かめられており, その計算の簡便性もあって, 今後様々な分野での応用が期待される.

この内容の多くは, 同志社大学の梶原健司博士, 及川正行教授, 早稲田大学の中尾真一郎氏と共同で行われたものである. また, 及川先生には本稿を読んでいただき, 貴重なコメントを頂いた. 心からお礼を申し上げます.

参考文献

- [1] R. Hirota: J. Phys. Soc. Jpn. ,**43**(1977), 1424.
- [2] M. J. Ablowitz and J. Ladik: J. Math. Phys. ,**16** (1975) 598.
- [3] V. G. Papageorgiou, B. Grammaticos and A. Ramani: Phys. Lett. A ,**179** (1993) 111.
- [4] R. Hirota, S. Tsujimoto and T. Imai: RIMS Kokyuroku, **822**(1993), 144.
- [5] B. Grammaticos, A. Ramani and V. G. Papageorgiou: Phys. Rev. Lett. ,**67** (1991) 1825.
- [6] A. Ramani, B. Grammaticos and J. Satsuma: J. Phys. A: Math. Gen. **28** (1995) 4655.
- [7] K. Maruno, K. Kajiwara, S. Nakao and M. Oikawa: Phys. Lett. A , **229** (1997) 173.
- [8] B. Grammaticos, A. Ramani and M. Tamizhmani: J. Phys. A: Math. Gen. **27** (1994) 559.
- [9] J. Weiss, M. Tabor and G. Carnevale: J. Math. Phys. ,**24** (1983) 522.
- [10] Y. B. Suris: Phys. Lett. A , **206** (1995) 153.
- [11] Y. B. Suris: J. Phys. A: Math. Gen. **29** (1996) 451.
- [12] K. Maruno, K. Kajiwara and M. Oikawa: Phys. Lett. A **241** (1998) 335.
- [13] M. Bruschi and O. Ragnisco: Inverse Problem **5**(1989), 983.

- [14] Y. B. Suris: solv-int/9709005
- [15] A. Ramani, B. Grammaticos and K. M. Tamizhmani: J. Phys. A: Math. Gen. **25** (1992) L883.
- [16] S. Takeno: J. Phys. Soc. Jpn. ,**61**(1992), 1433.