

p -Block と置換表現について

北大 理学部 池田 正

§1

G を有限群、 p を素数、 X を可移 G -空間、 $B \in G$ の p -block とする。この時 B に属している既約指標のうちどのようなものが X から作られる置換表現の irreducible constituent として現れるかを調べることは興味深いと思われる。ここではまずどのような時に B に属している既約指標が X の置換表現内に現れるかについて述べる。

以下、記号として次のものを用る。

(k, K, F) を modular 系とし、 $\text{char } k = 0$ $F = K/\pi K$.

$\text{char } F = p$, k, F と G に関して分裂体とする。

$$H = \text{Stab}_G(x) \quad x \in X$$

この時 G -空間として $H \backslash G \cong X$ となる。

$$e = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} h, \quad \{g_1, \dots, g_s\} = \text{Rep}(H \backslash G / H) \quad g_i = 1$$

$A \cong 1$ を可換環として、 AX を置換 AG -加群とする。

§ 2

Curtis - Fossum [1], Scott [2] によると、置換表現を考
える時に 中心になるものとして その centralizer ring が
ある ます centralizer ring について よく知られている
次の補題を述べておく.

補題 1 $eRGe$ は R -free R -algebra となり. その standard
basis として

$$A_i = \frac{1}{|H:H \cap H^g|} e g_i e \quad (i=1,2,\dots,s) \quad \text{がとれる}$$

特に, $eRGe$ の原始中等元と $\overline{eRGe} = eRGe / \pi eRGe$ の 原始中
等元は 1 対 1 に対応する.

上で述べた $eRGe$ の π と X の R 上の centralizer ring とは

$$eRGe \cong \text{End}_{R_G}(RX), \quad \overline{eRGe} \cong \text{End}_{FG}(FX)$$

となっている

次の補題は容易にえられる

補題 2 $\varphi: Z(RG) \longrightarrow Z(eRGe)$

$$\begin{array}{ccc} \psi & & \psi \\ u & \longmapsto & ue \end{array}$$

は R -algebra homomorphism である

以上の π を用いて §1 で最後に述べた π に対する
判定条件を 求めてみると 次のようになる.

命題 1 B に対応する KG の block idempotent を f とする.

この時 B に属する既約指標のうち 少なくとも 1 つが KX の irreducible constituent として現れるための必要十分条件は $\varphi(f) \neq 0$ となることである.

更に B に属する irreducible character を次のようにすると

$\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m, \zeta_{m+1}, \dots, \zeta_n$, $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ は KX の irreducible constituent として現れる

ζ_i によって associate される KG の central primitive idempotent を h_i として

$$\varphi(f) = \varphi(h_1) + \dots + \varphi(h_m)$$

となる.

(証明の概略) $\zeta_i \in B$ となる必要十分条件は h_i が f の直交分解元分解の中に現れることである. 一方 $KX \cong (K_H)^G$ より $(K_H)^G$ の canonical decomposition の式 (Serre Th8) を用いて $\zeta_i | (K_H)^G$ となる必要十分条件は $h_i e = \varphi(h_i) \neq 0$ となることがわかる. 以上を用いて 上の主張をえる. ||

今, L. Scott によると $eKG e$ の basis A_i に対し 次のように G -空間 $(H \backslash G) \times (H \backslash G)$ の G -orbit O_i が 1 対 1 に対応していることが知られている

$$O_i = (Hg_i, Hg_i)^G \quad (i=1, 2, \dots, s)$$

この時 Wielandt によると ζ を任意の KX の irreducible

constituent と 17

$$\nu_p(\beta_i(1)) \leq \max_{1 \leq i \leq s} \nu_p |0_i| \quad (\nu_p(\cdot) \text{ は } (\cdot) \text{ 内の } p\text{-part})$$

となることがわかっていて、この形の命題として次のものが命題 1 の系としてえられる。

系 f を block B に対応する RG の block idempotent で、 $\varphi(f) \neq 0$ とする。

$$f = \sum_C a_C \hat{C} \quad (C \text{ は } G \text{ の conjugate class})$$

$$\varphi(\hat{C}) = \sum_{i=1}^s b_i^C A_i \quad b_i^C \in \mathbb{Z}$$

$$\text{の時} \quad \alpha = \max \{ \nu_p |0_i| \mid b_i^C \not\equiv 0 \pmod{p} \text{ for some } \bar{a}_C = 0 \}$$

とすると ある $\beta_i \in B$ があって $(1 \leq i \leq m)$

$$\nu_p(\beta_i(1)) \leq \alpha$$

となる。

証明は $\varphi(f) \neq 0$ より $\overline{\varphi(f)} \neq 0$ となる事実と Curtis-Fosssum [1] に

よる式

$$\varphi(f) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^s \frac{\beta_j(1)}{|0_i|} \beta_j(A_i) A_i$$

の 2 つを用いて示される。

§ 3

§ 2 の命題 1 によると $\varphi(f)$ の形を調べてみる必要がでてくる。それに対する一つの解答として上の系で用いた式があるが、ここでは別の見方で $\varphi(f)$ の形を求め、その

一つの応用を述べてみる.

命題 2 $\varphi(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^s \left(\sum_C \sum_{j=1}^m \zeta_j(1) \zeta_j(x_i^{-1}) |Hx_i \cap C| \right) A_i$
 但し $x_i \in C$ とする

(証明の概略) Scott [1] によると

$$\varphi(\hat{C}) = \sum_{i=1}^s |Hx_i \cap C| A_i$$

となることが知られている. 一方

$$f = \sum_C \sum_{j=1}^m \frac{1}{|G|} \zeta_j(1) \zeta_j(x_i^{-1}) \hat{C}$$

はわかっているのて 命題 1 を応用すると上の式をえる。||

この命題 2 を応用することによって $\varphi(f)$ の係数に関する

次のような関係式をえることができる.

系 $\varphi(f) = \sum_{i=1}^s \lambda_i A_i \quad (\lambda_i \in \mathbb{R})$ として

$$\sum_{i=1}^s \lambda_i |H : H^{g_i} \cap H| = \begin{cases} 1 & B \text{ が principal block の時} \\ 0 & \text{その他の時} \end{cases}$$

(証明) $Hg_i : H$ は $i=1, \dots, s$ の H の right coset 全体を

$$X_0 = \{Hg_i k_1, Hg_i k_2, \dots, Hg_i k_t\} \quad k_i \in H, k_1 = 1$$

$$\text{として } X = \{Hg_i h_j \cap C \mid Hg_i h_j \in X_0\} \text{ とおく}$$

X に H を conjugate action で作用させるとその作用は可移的に

なる. よって

$$|Hg_i \cap C| |H : H^{g_i} \cap H| = |Hg_i H \cap C|$$

よって 命題 2 を用いて

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^s \lambda_i |H : H^{g_i} \cap H| &= \sum_{i=1}^s \sum_c \sum_{j=1}^m \frac{\zeta_j(1)}{|G|} \zeta_j(x_i^{-1}) |Hg_i H \cap C| \\ &= \sum_{j=1}^m \zeta_j(1) \sum_c \frac{\zeta_j(x_i^{-1})}{|G|} |C|\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\lambda} \sum_c \frac{1}{|G|} \zeta_j(x_i^{-1}) |C| = \begin{cases} 1 & \zeta_j = 1_G \\ 0 & \zeta_j \neq 1_G \end{cases}$$

以上をまとめると上の系をえる

11

§ 4

命題 1 よりどのような f に対し $\varphi(f) \neq 0$ となるかということ
を詳しく調べるのが重大となるが それに対する よい判
定条件を私は知らない。 § 3 のことを用いても B が principal
block の時はよいという当然の結果しかでてこない。 principal
block 以外の block について何かよい判定条件は えられるか?
また 置換表現に限らず 単項表現についても 上の § 3 の
ようなことが 成立するかなどを考えてみる必要がある。

Reference. [1] Curtis-Fossum "On Centralizer Ring and Characters of
Representations of Finite Groups" Math. Z. 107

[2] Scott "Modular Permutation Representations"
Trans. A.M.S. 175