

長方形基礎の加振による半無限粘弾性地盤の振動特性

小堀 鐸 二・南井 良一郎
鈴木 有・日下部 馨

VIBRATIONAL CHARACTERISTICS OF SEMI-INFINITE VISCO-ELASTIC MEDIUM TO SURFACE EXCITATIONS ON A RECTANGULAR AREA

By *Takuji KOBORI, Ryoichiro MINAI, Tamotsu SUZUKI*
and *Kaoru KUSAKABE*

Synopsis

This paper deals with the vibrational behaviors of a visco-elastic ground subjected to harmonic excitations on the rectangular surface area. The mathematical model of the ground is an isotropic, homogeneous, semi-infinite, visco-elastic medium. Three types of the surface harmonic excitations are considered, which are vertical and horizontal excitation and also rotational excitation about a horizontal axis. It is assumed that the distribution of exciting forces on the rectangular area is uniform for the vertical and horizontal excitation and triangular for the rotational one. The numerical results of the amplitude and phase characteristics of the displacement in the direction of each excitation are shown graphically along the depth below the center of the rectangular surface area.

1. ま え が き

構造物の地震応答を論ずる場合、地盤の影響を無視することのできないのは多くの震害調査や研究結果の示すところである。このような観点から筆者等は既報^{1)~4)}において構造物の基礎地盤の動特性を概括的に表わす一つの表現として、**dynamical ground compliance** を基礎中心の変位とそれに加わる調和波の複素振巾比、すなわち、基礎の力一変位複素伝達関数として定義し、等質等方な半無限弾性および粘弾性地盤ならびに剛基盤上に弾性層のある場合の長方形基礎の **dynamical ground compliance** の解析的表現を求め、その数値計算を行なってきた。また、それらの結果を用いて構造物と地盤との連成系の動特性ならびに地震応答の解析を行なってきた^{5)~8)}。

本報では、**dynamical ground compliance** の考え方を基礎中心位置以外の地盤内部に適用し、地盤を半無限粘弾性体として地盤表面の長方形基礎に垂直、水平ならびに回転加振を行なった場合、地盤内でどのような振動特性を示すかの問題を基礎に加わる力を入力、地盤内各点のある方向の変位を出力とする複素伝達関数の形で扱え、特に地盤媒質の減衰常数の影響に注目して、基礎中心直下の深さ方向の振巾特性と位相特性との分布性状を調べる。

これらの結果は既報²⁾³⁾で求めた成層構造を有する弾性地盤ならびに粘弾性地盤の **dynamical ground compliance** と対照して成層構造の影響を判断するための基礎資料となり得ると考えられ、また、地盤上の基礎版を起振器で加振するときの地盤振動の計測計画ならびに計測結果の理論的裏付けともなり得る。さらに近年、計算機の大規模化とともに可能となった **finite element method** による地盤振動の解析の際に問題となる要素の分割法と分割範囲を妥当に推測するための基礎資料となり得よう。さらに、表面の伝達特性は隣接する基礎あるいは構造物相互間の干渉を考慮した連成振動の問題にも適用できるであろう。

2. 基礎方程式および境界条件

ここでは、等質等方な半無限粘弾性地盤上に、Fig. 1 に示すような長方形基礎が載る場合、それに垂直、水平および回転方向の外乱が作用するときの、粘弾性地盤内の振動分布の問題を扱う。ここで、粘弾性の型としては前報⁴⁾でも取扱ったように最も基本的な Voigt type を採用する。

直交座標 x, y, z に関する等質等方な 3 次元 Voigt solid の運動方程式は、 $\{x, y, z\}$ 方向の各々の変位成分を $\{u, v, w\}$ として次式で示される。

$$\begin{aligned} & \left\{ (\lambda + \mu) + (\lambda' + \mu') \frac{\partial}{\partial t} \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\} \Delta + \mu \nabla^2 \{u, v, w\} \\ & = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u, v, w\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

ここに、

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} ; \text{dilatation} \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} : \text{Laplace 演算子} \\ \lambda, \mu &: \text{Lamé の常数} \\ \lambda', \mu' &: \text{Lamé の常数 } \lambda, \mu \text{ に対する粘性常数} \\ \rho &: \text{密度} \end{aligned} \right. \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

各々の加振型に対応する基礎下の応力分布は time factor を分離して、Fig. 2 に示すような振巾分布と仮定する。すなわち、垂直および水平加振の場合には加振方向の応力の振巾分布を一様分布、他の応力を零、回転加振では垂直応力を回転軸からの距離に比例する三角型分布、他の応力を零とする。すなわち、半無限体の自由表面における境界条件として応力分布をそれぞれ次のように与える。

(a) 垂直加振の場合 (z 方向)

$$\sigma_z = \begin{cases} 0 & (|x| > b \text{ or } |y| > c), \\ -q_{ov} \cdot Q(t) & (|x| \leq b \text{ and } |y| \leq c), \end{cases} \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

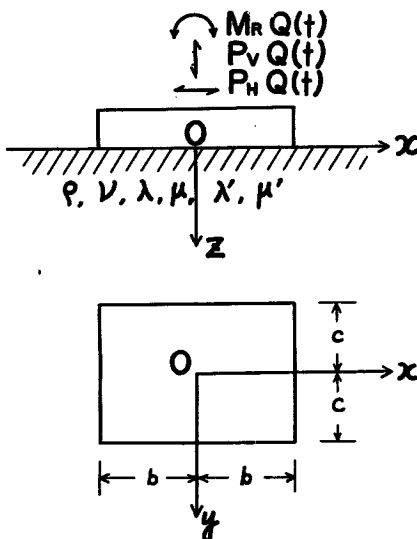


Fig. 1. Co-ordinate system and excitation pattern.

(1) VERTICAL



(2) HORIZONTAL



(3) ROTATION



Fig. 2. Assumption of stress distribution.

(b) 水平加振の場合 (x 方向)

$$\tau_{xz} = \begin{cases} 0 & (|x| > b \text{ or } |y| > c), \\ -q_{OH} \cdot Q(t) & (|x| \leq b \text{ and } |y| \leq c), \end{cases} \quad \sigma_z = \tau_{yz} = 0 \quad \dots\dots\dots(2.4)$$

(c) 回転加振の場合 (回転軸; y 軸)

$$\sigma_z = \begin{cases} 0 & (|x| > b \text{ or } |y| > c), \\ -q_{OR} \frac{x}{b} \cdot Q(t) & (|x| \leq b \text{ and } |y| \leq c), \end{cases} \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \dots\dots\dots(2.5)$$

ここに, q_{Ol} [$l=V, H, R$] は正の常数である。なお, 各場合の加振力の振巾は次式で表わされる。

$$P_V = 4bcq_{OV}, \quad P_H = 4bcq_{OH}, \quad M_R = \frac{4}{3}b^2cq_{OR}$$

3. 半無限粘弾性体の複素伝達関数の解析的表現

変位成分 $\{u, v, w\}$ および表面応力分布 q_l の座標 x, y および時間 t に関する三重フーリエ変換

$$\mathcal{F}\{u, v, w, q_l\} = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{q}_l\} \\ = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{u, v, w, q_l\} e^{-i(\beta x + \gamma y + \omega t)} dx dy dt \quad \dots\dots\dots(3.1)$$

を考え, 文献¹⁾と同様の方法により, 前節の運動方程式 (2.1) 式を境界条件 (2.3)~(2.5) 式のもとに解くと, 媒体内の任意の点 (x, y, z) の変位成分の解析的表現はそれぞれの加振型に対応して次のように得られる。

(a) 垂直加振

$$\mathcal{F}_t\{u\} = \frac{P_V \mathcal{F}_t\{Q(t)\}}{(1+i\omega d_2)\mu\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\beta}{F(\beta, r)} \left[\left\{ 2(\beta^2 + r^2) - \frac{\kappa^2}{1+i\omega d_2} \right\} e^{-\alpha_1 z} - 2\alpha_1 \alpha_2 e^{-\alpha_2 z} \right] \\ \cdot \frac{\sin b\beta}{b\beta} \frac{\sin c\gamma}{c\gamma} \sin x\beta \cos y\gamma d\beta dr \quad \dots\dots\dots(3.2)$$

$$\mathcal{F}_t\{v\} = \frac{P_V \mathcal{F}_t\{Q(t)\}}{(1+i\omega d_2)\mu\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{r}{F(\beta, r)} \left[\left\{ 2(\beta^2 + r^2) - \frac{\kappa^2}{1+i\omega d_2} \right\} e^{-\alpha_1 z} - 2\alpha_1 \alpha_2 e^{-\alpha_2 z} \right] \\ \cdot \frac{\sin b\beta}{b\beta} \frac{\sin c\gamma}{c\gamma} \cos x\beta \sin y\gamma d\beta dr \quad \dots\dots\dots(3.3)$$

$$\mathcal{F}_t\{w\} = \frac{P_V \mathcal{F}_t\{Q(t)\}}{(1+i\omega d_2)\mu\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha_1}{F(\beta, r)} \left[\left\{ 2(\beta^2 + r^2) - \frac{\kappa^2}{1+i\omega d_2} \right\} e^{-\alpha_1 z} - 2(\beta^2 + r^2) e^{-\alpha_2 z} \right] \\ \cdot \frac{\sin b\beta}{b\beta} \frac{\sin c\gamma}{c\gamma} \cos x\beta \cos y\gamma d\beta dr \quad \dots\dots\dots(3.4)$$

(b) 水平加振

$$\mathcal{F}_t\{u\} = \frac{P_H \mathcal{F}_t\{Q(t)\}}{(1+i\omega d_2)\mu\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\frac{\alpha_2 \beta^2}{(\beta^2 + r^2) F(\beta, r)} \left\{ -2(\beta^2 + r^2) e^{-\alpha_1 z} \right. \right. \\ \left. \left. + \left(2(\beta^2 + r^2) - \frac{\kappa^2}{1+i\omega d_2} \right) e^{-\alpha_2 z} \right\} + \frac{r^2}{\alpha_2 (\beta^2 + r^2)} e^{-\alpha_2 z} \right] \\ \cdot \frac{\sin b\beta}{b\beta} \frac{\sin c\gamma}{c\gamma} \cos x\beta \cos y\gamma d\beta dr \quad \dots\dots\dots(3.5)$$

$$\mathcal{F}_I\{v\} = \frac{P_H \mathcal{F}_I\{Q(t)\}}{(1+i\omega d_2)\mu\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\frac{\alpha_2 \beta r}{(\beta^2+r^2)F(\beta, r)} \left\{ 2(\beta^2+r^2)e^{-\alpha_1 z} - \left(2(\beta^2+r^2) - \frac{\kappa^2}{1+i\omega d_2} \right) e^{-\alpha_2 z} \right\} + \frac{\beta r}{\alpha_2(\beta^2+r^2)} e^{-\alpha_2 z} \right] \cdot \frac{\sin b\beta \sin cr}{b\beta cr} \sin x\beta \sin yr d\beta dr \quad \dots\dots\dots(3.6)$$

$$\mathcal{F}_I\{w\} = \frac{P_H \mathcal{F}_I\{Q(t)\}}{(1+i\omega d_2)\mu\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\beta}{F(\beta, r)} \left[2\alpha_1 \alpha_2 e^{-\alpha_1 z} - \left\{ 2(\beta^2+r^2) - \frac{\kappa^2}{1+i\omega d_2} \right\} e^{-\alpha_2 z} \right] \cdot \frac{\sin b\beta \sin cr}{b\beta cr} \sin x\beta \cos yr d\beta dr \quad \dots\dots\dots(3.7)$$

(c) 回転加振

$$\mathcal{F}_I\{u\} = \frac{-3M_R \mathcal{F}_I\{Q(t)\}}{(1+i\omega d_2)\mu\pi^2 b^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{F(\beta, r)} \left[\left\{ 2(\beta^2+r^2) - \frac{\kappa^2}{1+i\omega d_2} \right\} e^{-\alpha_1 z} - 2\alpha_1 \alpha_2 e^{-\alpha_2 z} \right] \cdot \frac{\sin cr (\sin b\beta}{cr b\beta} - \cos b\beta) \cos x\beta \cos yr d\beta dr \quad \dots\dots\dots(3.8)$$

$$\mathcal{F}_I\{v\} = \frac{3M_R \mathcal{F}_I\{Q(t)\}}{(1+i\omega d_2)\mu\pi^2 b^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{r}{\beta F(\beta, r)} \left[\left\{ 2(\beta^2+r^2) - \frac{\kappa^2}{1+i\omega d_2} \right\} e^{-\alpha_1 z} - 2\alpha_1 \alpha_2 e^{-\alpha_2 z} \right] \cdot \frac{\sin cr (\sin b\beta}{cr b\beta} - \cos b\beta) \sin x\beta \sin yr d\beta dr \quad \dots\dots\dots(3.9)$$

$$\mathcal{F}_I\{w\} = \frac{3M_R \mathcal{F}_I\{Q(t)\}}{(1+i\omega d_2)\mu\pi^2 b^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha_1}{\beta F(\beta, r)} \left[\left\{ 2(\beta^2+r^2) - \frac{\kappa^2}{1+i\omega d_2} \right\} e^{-\alpha_1 z} - 2(\beta^2+r^2)e^{-\alpha_2 z} \right] \cdot \frac{\sin cr (\sin b\beta}{cr b\beta} - \cos b\beta) \sin x\beta \cos yr d\beta dr \quad \dots\dots\dots(3.10)$$

ここに,

$$F(\beta, r) = \left\{ 2(\beta^2+r^2) - \frac{\kappa^2}{1+i\omega d_2} \right\}^2 - 4\alpha_1 \alpha_2 (\beta^2+r^2); \text{ Rayleigh Function } \dots\dots\dots(3.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1^2 = \beta^2 + r^2 - \frac{h^2}{1+i\omega d_1}, \quad h^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2}, \quad i = \sqrt{-1} \\ \alpha_2^2 = \beta^2 + r^2 - \frac{\kappa^2}{1+i\omega d_2}, \quad \kappa^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2}, \\ c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \\ \quad ; \text{ 減衰がないときの媒体内を伝播する疎密波および} \\ \quad \text{ 剪断波の速度} \quad \dots\dots\dots(3.12) \\ d_1 = \frac{\lambda' + 2\mu'}{\lambda + 2\mu}, \quad d_2 = \frac{\mu'}{\mu} \\ \quad ; \text{ 疎密波および剪断波に対応する粘性係数} \\ \mathcal{F}_I\{u, v, w, Q(t)\} = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \{u, v, w, Q(t)\} e^{-i\omega t} dt \\ \quad ; \{u, v, w, Q(t)\} \text{ の時間に関するフーリエ変換} \end{array} \right.$$

2重の無限積分を含む変位成分の解 (3.2)~(3.10) 式で、変数変換

$$\beta = \zeta \cos \theta, \quad \tau = \zeta \sin \theta \quad \dots\dots\dots(3.13)$$

を施すと、 θ に関する積分は有界の上下限となる。さらに、変数変換

$$\xi = \zeta / \kappa \quad \dots\dots\dots(3.14)$$

を行なった上、無次元化すると、各加振型に対応する地盤内任意点の力-変位複素伝達関数の次の無次元表示を得る。

(a) 垂直加振

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}_I\{u\}}{P_V \mathcal{F}_I\{Q(t)\}} b\mu &= \frac{a_0 g_2}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{\xi^2}{F(\xi)} \{ (2\xi^2 - g_2) e^{-a_0 \sqrt{\xi^2 - n^2} g_1 Z} \\ &\quad - 2\sqrt{\xi^2 - n^2} g_1 \sqrt{\xi^2 - g_2} e^{-a_0 \sqrt{\xi^2 - g_2} Z} \} \\ &\quad \cdot \cos \theta \frac{\sin(a_0 \xi \cos \theta)}{a_0 \xi \cos \theta} \frac{\sin\left(\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta} \sin(X a_0 \xi \cos \theta) \\ &\quad \cos(Y a_0 \xi \sin \theta) d\theta d\xi \quad \dots\dots\dots(3.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}_I\{v\}}{P_V \mathcal{F}_I\{Q(t)\}} b\mu &= \frac{a_0 g_2}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{\xi^2}{F(\xi)} \{ (2\xi^2 - g_2) e^{-a_0 \sqrt{\xi^2 - n^2} g_1 Z} \\ &\quad - 2\sqrt{\xi^2 - n^2} g_1 \sqrt{\xi^2 - g_2} e^{-a_0 \sqrt{\xi^2 - g_2} Z} \} \\ &\quad \cdot \sin \theta \frac{\sin(a_0 \xi \cos \theta)}{a_0 \xi \cos \theta} \frac{\sin\left(\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta} \cos(X a_0 \xi \cos \theta) \\ &\quad \sin(Y a_0 \xi \sin \theta) d\theta d\xi \quad \dots\dots\dots(3.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}_I\{w\}}{P_V \mathcal{F}_I\{Q(t)\}} b\mu &= \frac{a_0 g_2}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{\xi \sqrt{\xi^2 - n^2} g_1}{F(\xi)} \{ (2\xi^2 - g_2) e^{-a_0 \sqrt{\xi^2 - n^2} g_1 Z} \\ &\quad - 2\xi^2 e^{-a_0 \sqrt{\xi^2 - g_2} Z} \} \\ &\quad \cdot \frac{\sin(a_0 \xi \cos \theta)}{a_0 \xi \cos \theta} \frac{\sin\left(\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta} \cos(X a_0 \xi \cos \theta) \\ &\quad \cos(Y a_0 \xi \sin \theta) d\theta d\xi \quad \dots\dots\dots(3.17) \end{aligned}$$

(b) 水平加振

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}_I\{u\}}{P_H \mathcal{F}_I\{Q(t)\}} b\mu &= \frac{a_0 g_2}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\xi \sqrt{\xi^2 - g_2}}{F(\xi)} \{ -2\xi^2 e^{-a_0 \sqrt{\xi^2 - n^2} g_1 Z} \right. \\ &\quad \left. + (2\xi^2 - g_2) e^{-a_0 \sqrt{\xi^2 - g_2} Z} \} \cos^2 \theta + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - g_2}} e^{-a_0 \sqrt{\xi^2 - g_2} Z} \sin^2 \theta \right] \\ &\quad \cdot \frac{\sin(a_0 \xi \cos \theta)}{a_0 \xi \cos \theta} \frac{\sin\left(\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta} \cos(X a_0 \xi \cos \theta) \\ &\quad \cos(Y a_0 \xi \sin \theta) d\theta d\xi \quad \dots\dots\dots(3.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}_I\{v\}}{P_H \mathcal{F}_I\{Q(t)\}} b\mu &= \frac{a_0 g_2}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\xi \sqrt{\xi^2 - g_2}}{F(\xi)} \{ 2\xi^2 e^{-a_0 \sqrt{\xi^2 - n^2} g_1 Z} \right. \\ &\quad \left. - (2\xi^2 - g_2) e^{-a_0 \sqrt{\xi^2 - g_2} Z} \} + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - g_2}} e^{-a_0 \sqrt{\xi^2 - g_2} Z} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \cos \theta \sin \theta \frac{\sin(a_0 \xi \cos \theta)}{a_0 \xi \cos \theta} \frac{\sin\left(\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta} \sin(X a_0 \xi \cos \theta) \\ & \sin(Y a_0 \xi \sin \theta) d\theta d\xi \dots\dots\dots (3.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}_I\{w\}}{M_R \mathcal{F}_I\{Q(t)\}} b\mu &= \frac{a_0 g_2}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{\xi^2}{F(\xi)} \{2\sqrt{\xi^2 - n^2 g_1} \sqrt{\xi^2 - g_2} e^{-a_0 \sqrt{\xi^2 - n^2 g_1} Z} \\ & - (2\xi^2 - g_2) e^{-a_0 \sqrt{\xi^2 - g_2} Z}\} \\ & \cdot \cos \theta \frac{\sin(a_0 \xi \cos \theta)}{a_0 \xi \cos \theta} \frac{\sin\left(\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta} \sin(X a_0 \xi \cos \theta) \\ & \cos(Y a_0 \xi \sin \theta) d\theta d\xi \dots\dots\dots (3.20) \end{aligned}$$

(c) 回転加振

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}_I\{u\}}{M_R \mathcal{F}_I\{Q(t)\}} \frac{b^2 \mu}{3} &= -\frac{g_2}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{\xi}{F(\xi)} \{(2\xi^2 - g_2) e^{-a_0 \sqrt{\xi^2 - n^2 g_1} Z} \\ & - 2\sqrt{\xi^2 - n^2 g_1} \sqrt{\xi^2 - g_2} e^{-a_0 \sqrt{\xi^2 - g_2} Z}\} \\ & \cdot \frac{\sin\left(\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta} \left\{ \frac{\sin(a_0 \xi \cos \theta)}{a_0 \xi \cos \theta} - \cos(a_0 \xi \cos \theta) \right\} \\ & \cos(X a_0 \xi \cos \theta) \cos(Y a_0 \xi \sin \theta) d\theta d\xi \dots\dots\dots (3.21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}_I\{v\}}{M_R \mathcal{F}_I\{Q(t)\}} \frac{b^2 \mu}{3} &= \frac{g_2}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{\xi}{F(\xi)} \{(2\xi^2 - g_2) e^{-a_0 \sqrt{\xi^2 - n^2 g_1} Z} \\ & - 2\sqrt{\xi^2 - n^2 g_1} \sqrt{\xi^2 - g_2} e^{-a_0 \sqrt{\xi^2 - g_2} Z}\} \\ & \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \frac{\sin\left(\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta} \left\{ \frac{\sin(a_0 \xi \cos \theta)}{a_0 \xi \cos \theta} - \cos(a_0 \xi \cos \theta) \right\} \\ & \sin(X a_0 \xi \cos \theta) \sin(Y a_0 \xi \sin \theta) d\theta d\xi \dots\dots\dots (3.22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}_I\{w\}}{M_R \mathcal{F}_I\{Q(t)\}} \frac{b^2 \mu}{3} &= \frac{g_2}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{\xi}{F(\xi)} \{(2\xi^2 - g_2) e^{-a_0 \sqrt{\xi^2 - n^2 g_1} Z} \\ & - 2\xi^2 e^{-a_0 \sqrt{\xi^2 - g_2} Z}\} \\ & \cdot \frac{\sin\left(\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta} \left\{ \frac{\sin(a_0 \xi \cos \theta)}{a_0 \xi \cos \theta} - \cos(a_0 \xi \cos \theta) \right\} \\ & \frac{\sin(X a_0 \xi \cos \theta)}{\cos \theta} \cos(Y a_0 \xi \sin \theta) d\theta d\xi \dots\dots\dots (3.23) \end{aligned}$$

ここに,

$$F(\xi) = (2\xi^2 - g_2)^2 - 4\xi^2 \sqrt{\xi^2 - n^2 g_1} \sqrt{\xi^2 - g_2} \dots\dots\dots (3.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 a_0 = \kappa b = \frac{\omega}{c_2} b ; \text{円振動数 } \omega \text{ に関する無次元量} \\
 n = \frac{c_2}{c_1} = \frac{h}{k} ; \text{剪断波と疎密波の速度比} \\
 X = \frac{x}{b}, Y = \frac{y}{b}, Z = \frac{z}{b} ; \text{座標 } x, y, z \text{ の無次元量} \\
 g_1 = \frac{1}{1+i\omega d_1} = \frac{1}{1+ia_0\eta_1}, g_2 = \frac{1}{1+i\omega d_2} = \frac{1}{1+ia_0\eta} \dots\dots\dots(3.25) \\
 \eta_1 = \frac{c_2}{b} \frac{\lambda' + 2\mu'}{\lambda + 2\mu} = \eta n^2 \left(2 + \frac{\lambda'}{\mu'} \right) ; \text{疎密波に対応する粘性係数に関する} \\
 \text{無次元量} \\
 \eta = \frac{c_2}{b} \frac{\mu'}{\mu} ; \text{剪断波に対応する粘性係数に関する無次元量}
 \end{array} \right.$$

以上の (3.15) ~ (3.23) 式は $a_0 \neq 0$ (dynamic) のとき成立するが、 $a_0 = 0$ (static) のときは $\xi = b\zeta/a_0$ の形から判るように、以上の式は不定形となるので、 $a_0 \rightarrow 0$ の極限を考えねばならない。文献¹⁾と同様の方法により、 ζ で積分表示した式で複素伝達関数の極限解を求めると次のようになる。ただし、 $r = b\zeta$ とする。

(a) 垂直加振

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\mathcal{F}_t\{u\}}{P_V \mathcal{F}_t\{Q(t)\}} b\mu \right|_{a_0 \rightarrow \infty} &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{-n^2 + (1-n^2)Zr}{2(1-n^2)} e^{-Zr} \\
 &\cdot \cos \theta \frac{\sin(r \cos \theta)}{r \cos \theta} \frac{\sin\left(\frac{c}{b} r \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} r \sin \theta} \sin(Xr \cos \theta) \cos(Yr \sin \theta) d\theta dr \dots\dots(3.15)'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\mathcal{F}_t\{v\}}{P_V \mathcal{F}_t\{Q(t)\}} b\mu \right|_{a_0 \rightarrow 0} &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{-n^2 + (1-n^2)Zr}{2(1-n^2)} e^{-Zr} \\
 &\cdot \sin \theta \frac{\sin(r \cos \theta)}{r \cos \theta} \frac{\sin\left(\frac{c}{b} r \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} r \sin \theta} \cos(Xr \cos \theta) \sin(Yr \sin \theta) d\theta dr \dots\dots(3.16)'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\mathcal{F}_t\{w\}}{P_V \mathcal{F}_t\{Q(t)\}} b\mu \right|_{a_0 \rightarrow 0} &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{1 + (1-n^2)Zr}{2(1-n^2)} e^{-Zr} \\
 &\cdot \frac{\sin(r \cos \theta)}{r \cos \theta} \frac{\sin\left(\frac{c}{b} r \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} r \sin \theta} \cos(Xr \cos \theta) \cos(Yr \sin \theta) d\theta dr \dots\dots\dots(3.17)'
 \end{aligned}$$

(b) 水平加振

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\mathcal{F}_t\{u\}}{P_H \mathcal{F}_t\{Q(t)\}} b\mu \right|_{a_0 \rightarrow 0} &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{1 - (1-n^2)Zr}{2(1-n^2)} e^{-Zr} \cos^2 \theta + e^{-Zr} \sin^2 \theta \right\} \\
 &\cdot \frac{\sin(r \cos \theta)}{r \cos \theta} \frac{\sin\left(\frac{c}{b} r \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} r \sin \theta} \cos(Xr \cos \theta) \cos(Yr \sin \theta) d\theta dr \dots\dots\dots(3.18)'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\mathcal{F}_t\{v\}}{P_H \mathcal{F}_t\{Q(t)\}} b\mu \right|_{a_0 \rightarrow 0} &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{1 - 2n^2 + (1-n^2)Zr}{2(1-n^2)} e^{-Zr} \\
 &\cdot \cos \theta \sin \theta \frac{\sin(r \cos \theta)}{r \cos \theta} \frac{\sin\left(\frac{c}{b} r \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} r \sin \theta} \sin(Xr \cos \theta) \\
 &\sin(Yr \sin \theta) d\theta dr \dots\dots\dots(3.19)'
 \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\mathcal{F}_t\{w\}}{P_R \mathcal{F}_t\{Q(t)\}} b\mu \right|_{a_0 \rightarrow 0} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{n^2 + (1-n^2)Zr}{2(1-n^2)} e^{-Zr} \\ \cdot \cos \theta \frac{\sin(r \cos \theta)}{r \cos \theta} \frac{\sin\left(\frac{c}{b} r \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} r \sin \theta} \sin(Xr \cos \theta) \cos(Yr \sin \theta) d\theta dr \dots (3.20)'$$

(c) 回転加振

$$\left. \frac{\mathcal{F}_t\{u\}}{M_R \mathcal{F}_t\{Q(t)\}} \frac{b^2 \mu}{3} \right|_{a_0 \rightarrow 0} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{n^2 - (1-n^2)Zr e^{-Zr}}{2(1-n^2)} r \\ \cdot \frac{\sin\left(\frac{c}{b} r \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} r \sin \theta} \left\{ \frac{\sin(r \cos \theta)}{r \cos \theta} - \cos(r \cos \theta) \right\} \cos(Xr \cos \theta) \\ \cos(Yr \sin \theta) d\theta dr \dots (3.21)'$$

$$\left. \frac{\mathcal{F}_t\{v\}}{M_R \mathcal{F}_t\{Q(t)\}} \frac{b^2 \mu}{3} \right|_{a_0 \rightarrow 0} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{-n^2 + (1-n^2)Zr e^{-Zr}}{2(1-n^2)} r \\ \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \frac{\sin\left(\frac{c}{b} r \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} r \sin \theta} \left\{ \frac{\sin(r \cos \theta)}{r \cos \theta} - \cos(r \cos \theta) \right\} \\ \sin(Xr \cos \theta) \sin(Yr \sin \theta) d\theta dr \dots (3.22)'$$

$$\left. \frac{\mathcal{F}_t\{w\}}{M_R \mathcal{F}_t\{Q(t)\}} \frac{b^2 \mu}{3} \right|_{a_0 \rightarrow 0} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{1 + (1-n^2)Zr}{2(1-n^2)} e^{-Zr} \\ \cdot \frac{\sin\left(\frac{c}{b} r \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} r \sin \theta} \left\{ \frac{\sin(r \cos \theta)}{r \cos \theta} - \cos(r \cos \theta) \right\} \frac{\sin(Xr \cos \theta)}{r \cos \theta} \\ \cos(Yr \sin \theta) d\theta dr \dots (3.23)'$$

4. 解析結果および考察

前節で求めた複素伝達関数の積分表示 (3.15)~(3.23) 式はそれ以上解析的表現を求めることができないので数値積分を行なう必要がある。しかるに、完全弾性地盤 (無減衰: $\lambda' = \mu' = 0$ 又は $\eta = 0, \lambda'/\mu' = 1$) の場合には、 $\xi \geq 0$ において、 ξ の実軸上に2個の分岐点 ($\xi = n$ および $\xi = 1$) と Rayleigh Pole $\xi = \xi_0$ ($F(\xi_0) = 0$) が存在するので、これらの特異点を避けるために複素平面に拡張して、 ξ が $[0, 2]$ の積分区間では変数変換

$$\xi = 1 + e^{i\omega\psi} \dots (4.1)$$

を導入し、 ξ が $[2, \infty)$ では特異点がないので実軸上に沿って数値積分を行なう。しかし、粘弾性地盤 ($\eta \neq 0$) ではもはやそれらの特異点は第4象限に移行し、実軸上には存在しないので、 ξ に関して $[0, \infty)$ の実軸上に沿っての数値積分を行なうことができる。

ここで、積分変数 ξ に関して無限大まで数値積分を行なうことは不可能であり、有限の範囲で止めることになるが、数値計算法による誤差を考慮して、積分区間の打ち切りによる誤差をある値以下に収まるように ξ の有限の積分範囲を定めれば工学上問題にならないと考えられる。ここでは、数値積分法は Simpson 3/8 則を用い、積分の間隔を順次細かくして行き、前回との相対誤差が 0.05% 以下になったところで計算を打ち切る方式をとり、これに対して積分範囲は $a_0 \xi$ で 0~50 とする。この場合、0.05% の相対誤差と積分範囲 0~50 による無限積分の打ち切りによる誤差とはほぼ同程度の値になる。

以上に述べた方法により垂直および水平加振に対して数値計算を行なった結果の一部を Figs. 3~12 に示す。ただし、複素伝達関数は振巾特性と位相特性の形で次のように表わす。

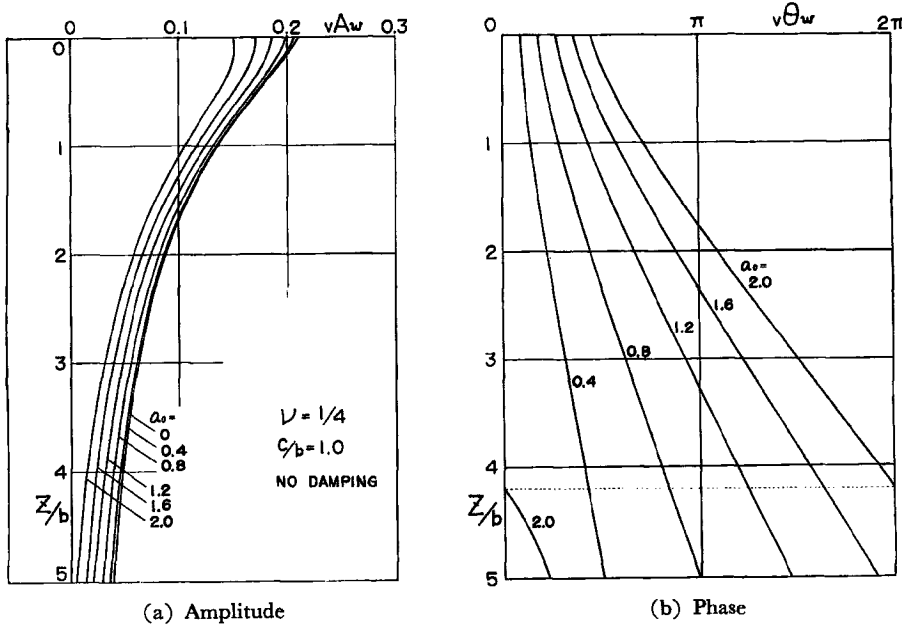


Fig. 3. Vibrational characteristics for vertical excitation.

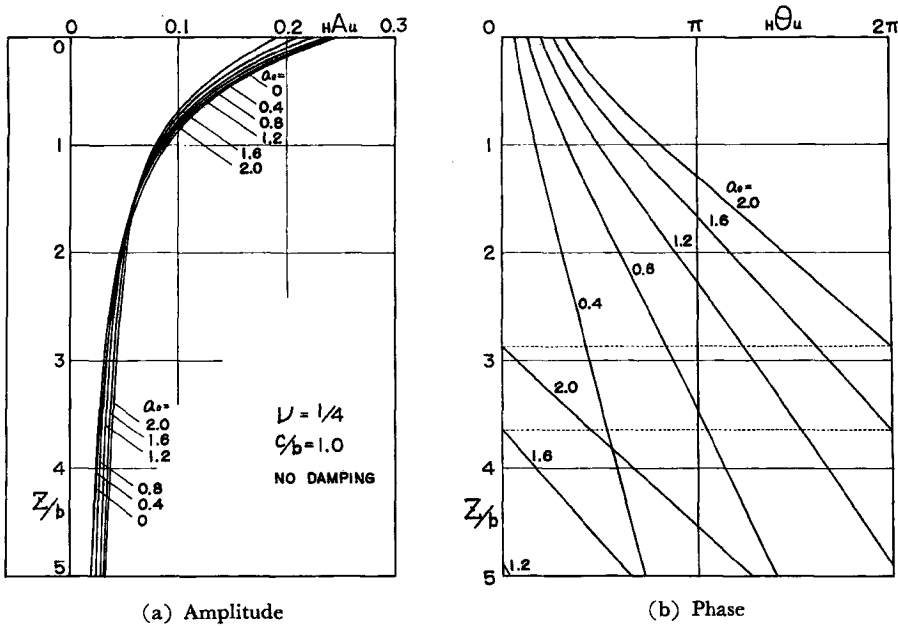


Fig. 4. Vibrational characteristics for horizontal excitation.

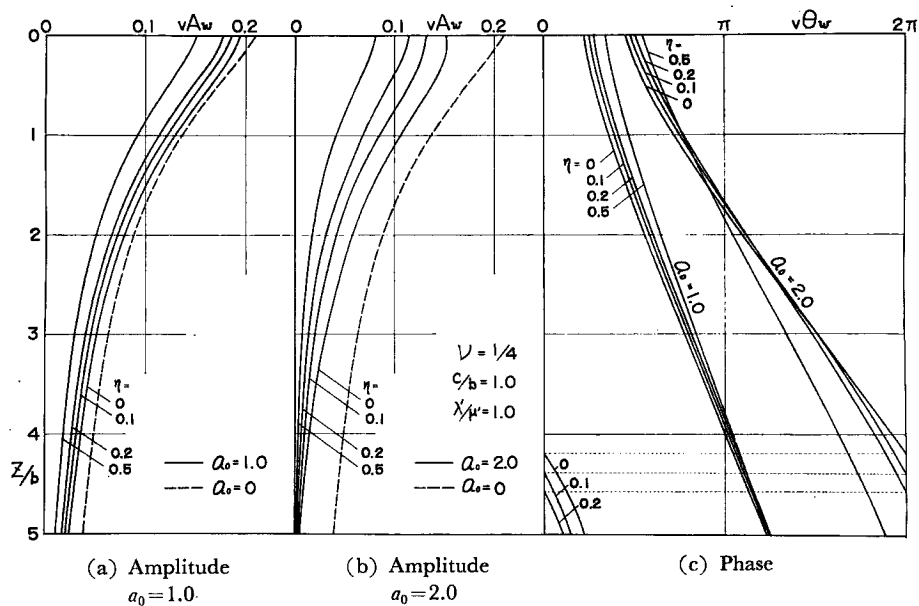


Fig. 5. Vibrational characteristics for vertical excitation.

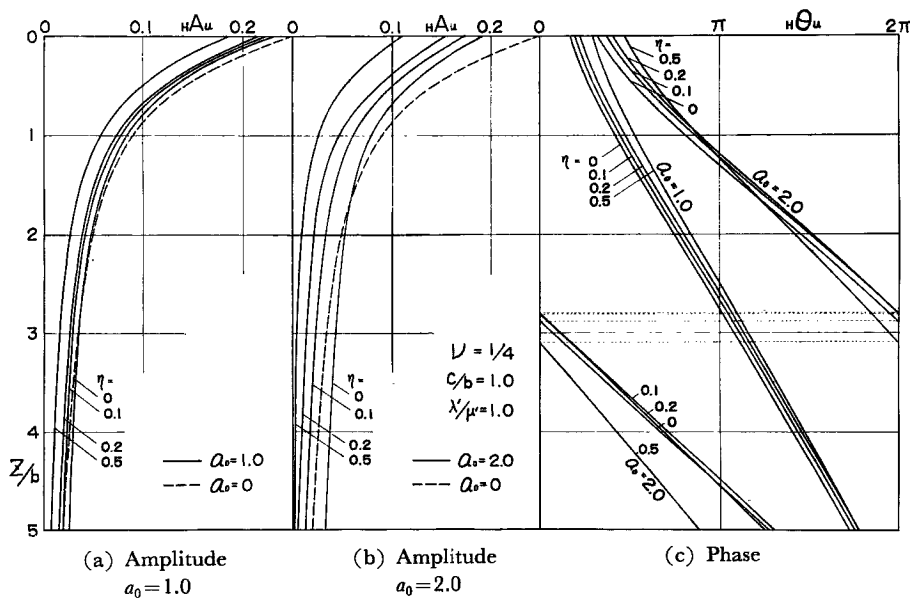
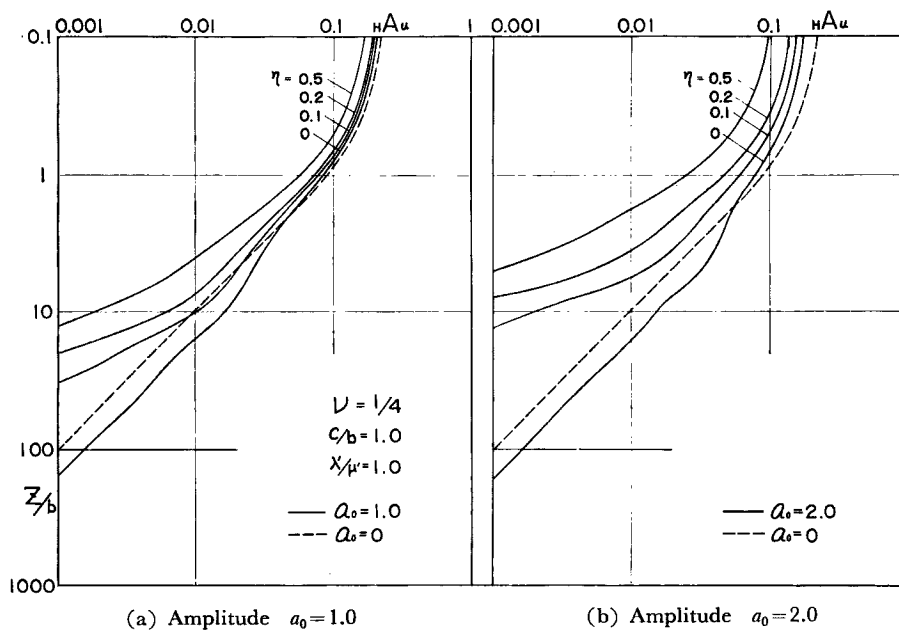
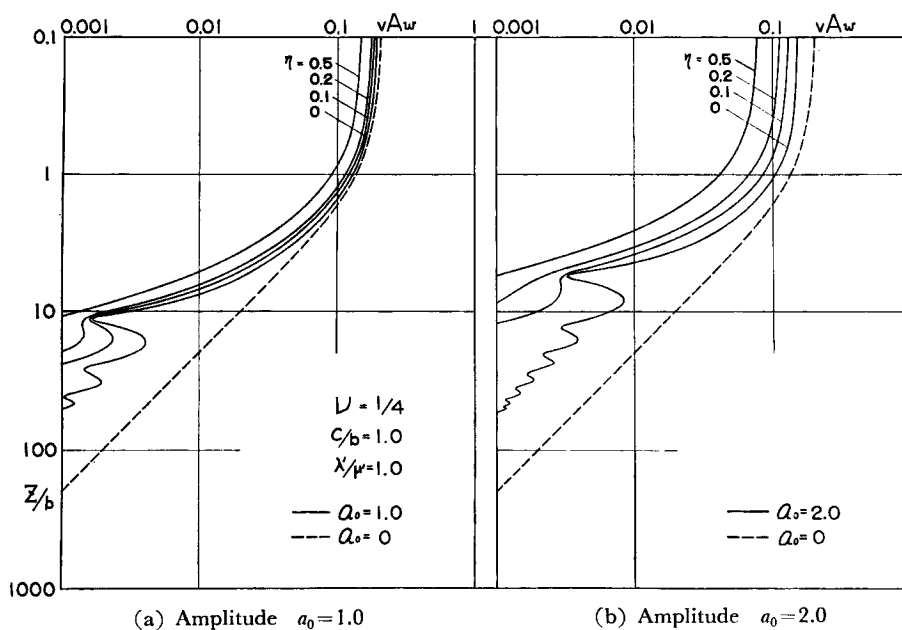


Fig. 6. Vibrational characteristics for horizontal excitation.



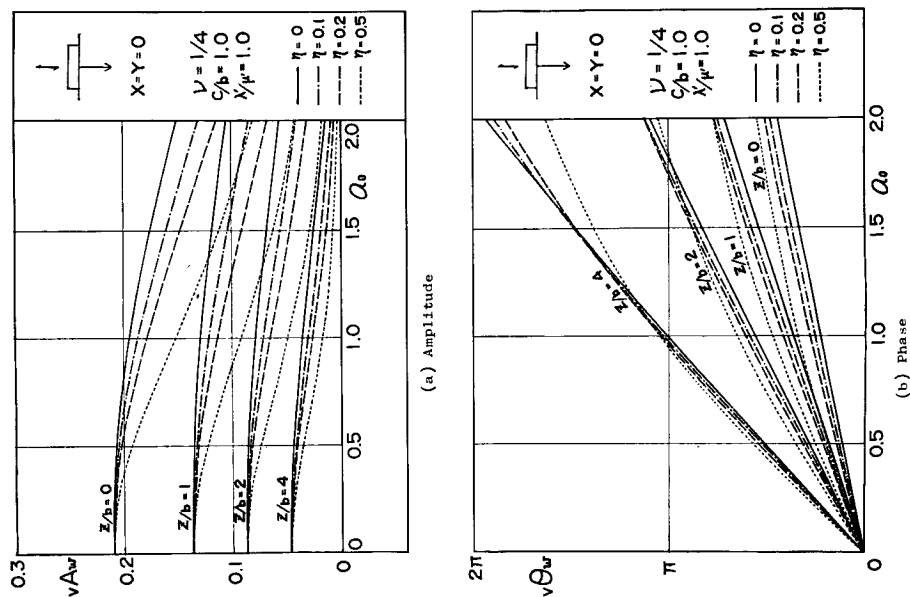


Fig. 9. Vibrational characteristics for vertical excitation.

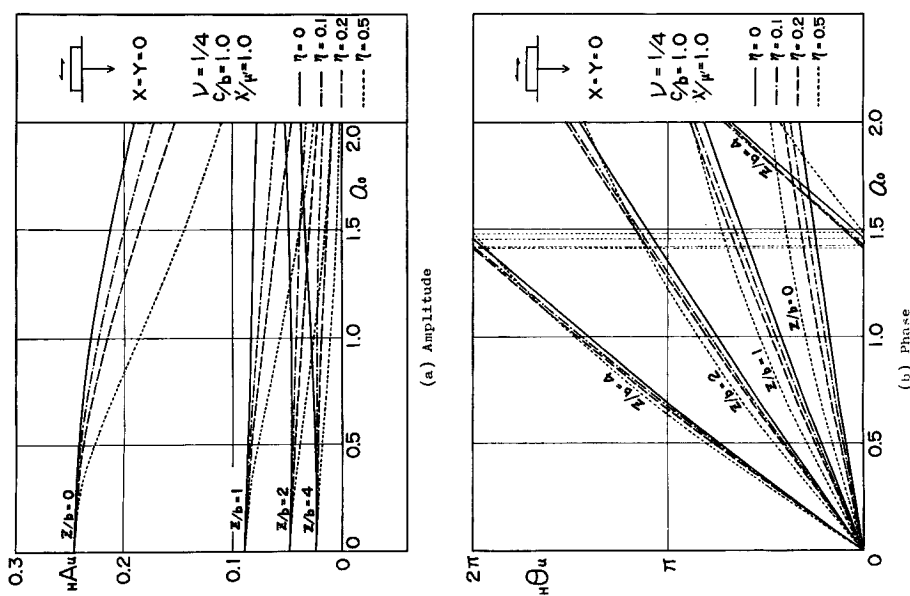


Fig. 10. Vibrational characteristics for horizontal excitation.

$$\begin{aligned} {}_V A_w &= \left| \frac{\mathcal{F}_t\{w\}}{P_V \mathcal{F}_t\{Q(t)\}} b\mu \right|, \quad {}_V \theta_w = -\text{Arg} \left(\frac{\mathcal{F}_t\{w\}}{P_V \mathcal{F}_t\{Q(t)\}} b\mu \right) \\ {}_H A_u &= \left| \frac{\mathcal{F}_t\{u\}}{P_H \mathcal{F}_t\{Q(t)\}} b\mu \right|, \quad {}_H \theta_u = -\text{Arg} \left(\frac{\mathcal{F}_t\{u\}}{P_H \mathcal{F}_t\{Q(t)\}} b\mu \right) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4.2)$$

すなわち、 A および θ はそれぞれ無次元変位の振巾と調和加振力に対する位相遅れを表わし、左側の添字は加振型の種類（ V ：垂直加振、 H ：水平加振）、右側の添字は変位成分を表わす。たとえば、 ${}_V A_w$ は垂直加振による z 方向の変位の振巾特性を意味する。

Fig. 3 は完全弾性体（ $\eta=0$ ）で、弾性体のポアソン比 $\nu=1/4$ および基礎底面辺長比 $c/b=1.0$ （正方形基礎）に対して垂直方向の加振力を与えた場合で（**a**）は横軸に振巾 ${}_V A_w$ を縦軸に深さ z/b をとり、基礎中心下の ${}_V A_w$ と z/b の関係を振動数 a_0 をパラメータとして示したものであり、（**b**）は位相遅れ ${}_V \theta_w$ と z/b の関係を表わしたものである。この図より、これらのパラメータの範囲では振巾に関しては a_0 を一定とすると z/b が大きくなるほど ${}_V A_w$ は減少し、また z/b を一定とすると、 a_0 が増すほど ${}_V A_w$ は減少することを示している。位相遅れ ${}_V \theta_w$ は z/b および a_0 の増加関数となっている。一方、進行波の局部的な無次元速度は $\frac{a_0}{d} \frac{d\theta}{d(z/b)}$ で与えられ、それを有次元化すると $\frac{a_0 c_2}{d} \frac{d\theta}{d(z/b)}$ となるから、これを ${}_V \theta_w$ の図に適用して z/b が 3～4 の間の平均速度 c を求めると、このパラメータ範囲では a_0 が増加するほど速度も増し、 $a_0=0.4$ では $c=1.36c_2$ （ c_2 ：剪断波の速度）、 $a_0=2.0$ では $c=1.55c_2$ となった。**Fig. 4** は **Fig. 3** と同じパラメータに対する水平加振の場合の加振方向の振巾 ${}_H A_u$ と位相遅れ ${}_H \theta_u$ であり、ここでも振巾 ${}_H A_u$ は z/b の増加とともに減少しているが、 a_0 に関しては $z/b \approx 2$ 前後を境にして、 z/b の小さいところでは z/b を一定にすると ${}_H A_u$ は a_0 の減少関数となるが、 z/b の大きいところでは a_0 が大きいほど ${}_H A_u$ も大きくなっている。しかし図のパラメータ範囲を越えて z/b が大きくなると、 ${}_V A_w$ および ${}_H A_u$ の a_0 に関する変動は複雑になる。位相遅れ ${}_H \theta_u$ はここでも z/b と a_0 の増加関数となっているが、 ${}_V \theta_w$ よりも ${}_H \theta_u$ の方が z/b に対する変化がやや急になる。これは水平加振の場合の深さ方向の進行波の速度が垂直加振の場合よりも遅いことを意味しており、この場合の z/b が 3～4 の間の速度 c を求めると、 $a_0=0.4$ で $c=0.92c_2$ 、 $a_0=2.0$ で $c=1.06c_2$ であり、このパラメータ範囲では a_0 が増すほど速度も増しているが、ほぼ剪断波の速度に近い値を示している。

Fig. 5 はポアソン比 $\nu=1/4$ および基礎底面辺長比 $c/b=1.0$ に対して垂直加振を与えた場合で、 $a_0=1.0$ と $a_0=2.0$ のときの振巾 ${}_V A_w$ および位相遅れ ${}_V \theta_w$ と深さ z/b の関係を減衰係数 η をパラメータ（ $\lambda'/\mu'=1.0$ とする）として示したもので、比較のため、 $a_0=0$ （static）のときの振巾 ${}_V A_w$ を破線にて示した。この場合、減衰機構を Voigt type としているため、 $a_0=0$ のときは減衰がないので、パラメータ η は関与しない。ここで、 $\nu=1/4$ （ $\lambda'/\mu'=1.0$ ）かつ $\lambda'/\mu'=1.0$ は剪断波に対する減衰と疎密波に対する減衰とが等しいことを意味している。この図より、 η が増加するほど ${}_V A_w$ は減少し、 ${}_V \theta_w$ では z/b に対する変化の割合は η が増すほど緩やかになっている。これは、振巾は減衰が増すほど小さくなり、進行波の速度は減衰とともに増加することを示している。**Fig. 6** は **Fig. 5** と同じパラメータで水平加振のときの振巾 ${}_H A_u$ と位相遅れ ${}_H \theta_u$ を深さ z/b に対して示したもので、傾向的には垂直加振の場合と同じである。

Fig. 7 は **Fig. 5** の振巾特性を対数目盛で表わしたもので、深さ z/b の大きい範囲までの傾向が示されている。この図より $a_0=0$ （static）のときは ${}_V A_w$ は z/b に関して単調減少を示し、かつ、 $z/b \approx 2$ 以上では ${}_V A_w$ と z/b は逆比例の関係を示している。 $a_0 \neq 0$ （dynamic）の場合、 ${}_V A_w$ は $\eta=0$ のとき、多くの極大および極小を持ちながら ${}_V A_w$ の上限と下限の包絡線は z/b に関して減少しており、平均的には dynamic のときも ${}_V A_w$ と z/b とはほぼ逆比例の関係にあると思われる。そして、この極大、極小の起る位置は波長に比例して、基礎巾との関係は少ないと思われ、かなり規則的な間隔をもって現われてくる。 $\eta \neq 0$ のときは、極大、極小を持つ傾向は η が増加するにつれ薄れてくる。これは、 η が大きくなると深さ方向の減衰の影響が強くなり、極値は明瞭には現われないことを示している。また、 ${}_V A_w$ と z/b との

間の関係は基礎巾と同程度の深さ ($z/b \approx 2$) までは z/b に対する vA_w の変化は $\eta=0$ のときとあまり異ならないが、 z/b が2より大きくなると、 vA_w は z/b に対して急激に減少し、 vA_w は z/b の数乗に逆比例をしている。また、dynamic の場合の vA_w は同じ深さに対して static のときの vA_w よりも小さい。

Fig. 8 は **Fig. 6** の振巾特性を対数目盛で表わしたもので、 $a_0=0$ (static) の場合は垂直加振と同じく $H A_u$ も z/b に関して単調減少を示し、かつ、 $z/b \approx 1$ 以上では $H A_u$ と z/b とは逆比例の関係を示している。 $a_0 \neq 0$ (dynamic) の場合は垂直加振の場合と異なり、 $\eta=0$ のとき $z/b \approx 2$ 前後で $H A_u$ は static な場合の値よりも大きくなる。また、 $H A_u$ は z/b の増加とともに緩やかな変動を示しながら減少しており、垂直加振のときのような明瞭な極値は認められない。そして、 η が大きくなるにつれて $H A_u$ は z/b に関して急激に減少している。また z/b の非常に大きいところでの進行波の速度を調べるために、**Fig. 11** (垂直加振) および **Fig. 12** (水平加振) に $\nu=1/4$, $c/b=1.0$, $\eta=0$ および $\lambda'/\mu'=1.0$ のときの位相遅れと深さの関係に対数目盛で、 a_0 を1.0および2.0の場合に対してそれぞれ●印と○印で示し、かつ、 z/b の十分大きいところでの平均的な勾配を実線で示した。前述の進行波の速度の表現式を用いれば、これらの線は z/b が十分大きいところで、垂直加振の場合にはその速度はほぼ $1.72c_2$ で疎密波の速度に対応し、また、水平加振ではおよそ $1.0c_2$ で剪断波の速度に対応していることを示している。すなわち、加振方向の変位に関しては基礎に垂直加振を与えた場合、深さ方向に対して十分遠いところでは疎密波が卓越しており、水平加振の場合には剪断波が卓越していることを示している。

Fig. 9 (垂直加振) および **Fig. 10** (水平加振) は $\nu=1/4$, $c/b=1.0$, $\lambda'/\mu'=1.0$ の場合の加振方向の振巾および位相遅れを、横軸に a_0 をとって z/b および η をパラメータとして示したものである。この図より、 a_0 が小さい範囲 (約 $a_0 < 0.2$) では振巾は a_0 および η に殆んど独立であると見做し得るが、 a_0 が少し大きくなると ($a_0 > 0.2$) vA_w および $H A_u$ は a_0 と η の関数となり、 η が増加するほど vA_w , $H A_u$ は減少する。位相遅れに関しては $\eta=0$ のとき $v\theta_w$ および $H\theta_u$ は a_0 にほぼ比例するが、 η が増加すると a_0 の小さいところでは $v\theta_w$, $H\theta_u$ の a_0 に対する勾配は $\eta=0$ のときよりも大きい、 a_0 が増加するにつれ、その勾配は小さくなっている。

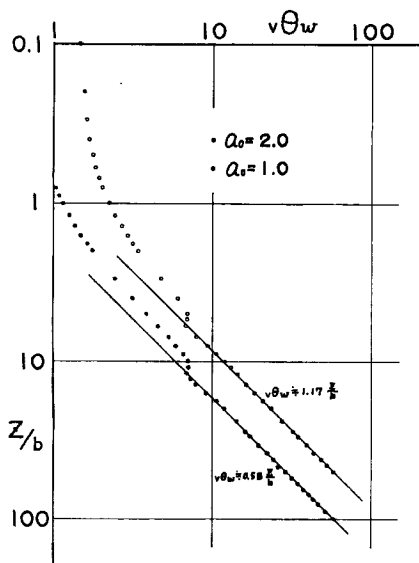


Fig. 11. Phase characteristics for vertical excitation.

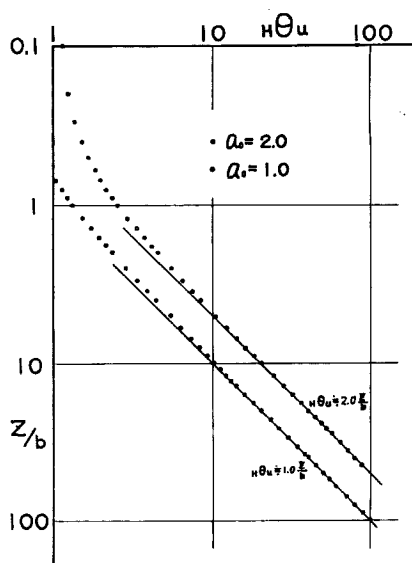


Fig. 12. Phase characteristics for horizontal excitation.

5. む す び

以上の結果より、表面上の加振による半無限 Voigt 型粘弾性地盤内の力一変位伝達特性の分布は入力としての加振の種類および地盤の媒質がもつ dissipative な減衰作用により異なった性状を示すことが明らかになった。それらは次のようにまとめられよう。

1. 静的な荷重が加わる場合

垂直および水平の両載荷に対し、基礎中心の鉛直下方における載荷方向の変位振巾は、基礎巾と同程度の深さ ($z/b \approx 2$) を越えると深さにほぼ逆比例する。

2. 動的な荷重が加わる場合

(a) 地盤の媒質に減衰のない場合、すなわち完全弾性体の場合は、振巾特性の分布は同一の加振振動数に対し、ある程度以上の深さになると平均的な傾向としては変位と深さとは逆比例の関係にあるが、局部的にはかなりの変動が現われている。

基礎に垂直方向の加振力を与える場合は静的な場合よりも常に振巾は小さくなるが、振巾と深さの関係はかなり規則的な間隔をもった極大、極小が現われる。しかし、深さが増すほどこの変化は小さくなる。そして極大、極小を生じる深さ方向の間隔は波長に關係して基礎巾にはあまりよらない。また、波動の進行速度はある程度以上の深さ、すなわち、疎密波ではほぼ2波長になると疎密波に近い速さで伝播していく。水平加振のときは基礎巾と同程度の深さを越えると静的な場合よりも振巾は大きくなるが、振巾の深さ方向の変動に関しては垂直加振のときほど明瞭な極値を示さない。この場合も、進行波の速度は剪断波ではほぼ2波長以上の深さになると剪断波の速さに近くなる。

(b) 地盤の媒質に減衰がある場合、変位振巾と深さとの関係は垂直、水平両加振とも深さが基礎巾と同程度までは定量的には異なるけれども定性的には無減衰のときと似た性状を示す。しかし、基礎巾よりも深くなると、深さが増すにつれ変位振巾は無減衰の場合に較べて急激に減少する。

本報では、表面加振を受ける粘弾性地盤の振動特性として基礎中心の鉛直下方における力一変位伝達特性の分布についての数値計算結果を示したが、これをもって、この方面の研究の全てとすることは勿論できないし、また、伝達関数の鉛直下方分布と地表面での分布とでは波動の伝播形態に異なる機構があると考えられるので、より詳しい検討を行なう必要がある。

なお、数値計算には、京都大学の digital 電子計算機 “KDC-II” (HITAC 5020) を使用したことを記し、最後に、本稿の作成にあたり、多大の協力を得た研究室の諸兄に深く感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 小堀鐸二, 南井良一郎, 鈴木 有, 日下部馨: 長方形基礎の Dynamical Ground Compliance (その1)——半無限弾性地盤の場合——, 京都大学防災研究所年報, 第10号 A, 昭和42.3, pp. 283-314.
- 2) 小堀鐸二, 南井良一郎, 鈴木 有: 長方形基礎の Dynamical Ground Compliance (その2)——基盤上に弾性層のある場合——, 京都大学防災研究所年報, 第10号 A, 昭和42.3, pp. 315-341.
- 3) 小堀鐸二, 南井良一郎, 鈴木 有: 長方形基礎の Dynamical Ground Compliance (その3)——基盤上に弾性層のある場合(続)——, 京都大学防災研究所年報, 第11号 A, 昭和43.3, pp. 331-347.
- 4) 小堀鐸二, 南井良一郎, 鈴木 有, 日下部馨: 長方形基礎の Dynamical Ground Compliance (その4)——半無限粘弾性地盤の場合——, 京都大学防災研究所年報, 第11号 A, 昭和43.3, pp. 349-367.
- 5) 小堀鐸二, 南井良一郎, 鈴木 有: 弾性地盤上の構造物の動特性について, 京都大学防災研究所年報, 第9号, 昭和41.3, pp. 193-224.

- 6) 小堀鐸二, 南井良一郎, 井上 豊: Ground Compliance を考慮した構造物の地震応答, 京都大学防災研究所年報, 第7号, 昭和39.3, pp. 179-194
- 7) 小堀鐸二, 南井良一郎, 井上 豊: Ground Compliance を考慮した構造物の地震応答 (第2報), 京都大学防災研究所年報, 第8号, 昭和40.3, pp. 193-218.
- 8) 小堀鐸二, 南井良一郎, 井上 豊, 鎌田輝男: Ground Compliance を考慮した構造物の地震応答 (第3報), 京都大学防災研究所年報, 第10号 A, 昭和42.3, pp. 261-281.