

On Essential Mappings

山口大・教育 服部 泰直 (Yasunao Hattori)

次元論において、essential mappings の概念は、基本的であり、重要である。ここでは、essential mappings に関する最近の結果をふまえながら、この分野の未解決問題を若干の説明を加えながら、述べていきたい。

我々は、主に、2つの話題を考える。その1つは、多様体の積への essential mappings についてであり、もう1つは、essential mappings と無限次元空間の関係についての話題である。前者は、J. Krasinkiewicz [6] に、そして、後者は、P. Borst [1] に、主に、依っている。この2つの話題を、節を分けて述べていく。このとき、§1と§2における essential mappings の定義は、その値域となる空間族が、異なるために、それぞれについて、与えられているので、注意されたい。(最も、代表的な値域である n -次元立方体 I^n については、両者は、等しい。)

我々が、考える空間は、すべて metrizable spaces であり、mappings は、すべて、continuous である。

§ 1. Essential mappings onto products of manifolds.

ここでいう manifolds とは、境界を持つ、そして、continuum である topological manifolds である。この節で使われる記号等について、説明する。

I は、unit closed interval $[0, 1]$ を表わす。
また、 M, N (または $M_j, N_j, j \in J$) により、 $1 \leq \dim < \infty$ なる manifolds を表わす。そして、manifold M について、 ∂M を、 M の境界とする。

J は、高々可算な index set とする。

mapping $f: X \rightarrow \prod_{j \in J} X_j$ に対して、 f を j -th coordinate mappings $f_j, j \in J$ を用いて、 $f = (f_j)$ と表わすことがある。

そして、 $K (\neq \emptyset) \subset J$ に対して、

$$f_K = (f_j)_{j \in K} : X \rightarrow \prod_{j \in K} X_j$$

とする。

1.1. 定義. f を space X から manifold M への mapping とする. mapping $g: X \rightarrow M$ について $H_0 = f$, $H_1 = g$ をみたす homotopy $H: (X, f^{-1}(\partial M)) \times I \rightarrow (M, \partial M)$ が存在するとき, g を f の admissible deformation という。

同様の概念が, manifolds の積への mappings についても定義できる。即ち, $f: X \rightarrow \prod_{j \in J} M_j$, $g: X \rightarrow \prod_{j \in J} M_j$ とするとき, 任意の $j \in J$ に対して, g_j が f_j の admissible deformation となっている時, g を f の admissible deformation という。

1.2. 定義. mapping $f: X \rightarrow \prod_{j \in J} M_j$ について, f のすべての admissible deformation が, surjective なとき, f を essential mapping という。

さて, essential mappings の基本的な性質に, 関わる問題として, 次の二つがある。

1.3. 問題 ([6, Problem 1]). $|J| = \infty$, $f: X \rightarrow \prod_{j \in J} M_j$ を essential mapping とし, $h: \prod_{j \in J} M_j \rightarrow \prod_{k \in K} N_k$ を homeomorphism とする。 $h \circ f$ は, essential か?

1.4. 問題 ([6, Problem 2]). $f: X \rightarrow M$ を space X から manifold M への essential mapping とし. N を M の submanifold とする. このとき $\bar{f} = f|_{f^{-1}(N)} : f^{-1}(N) \rightarrow N$ は essential か?

問題 1.4 に関して. もし N が $\dim N = \dim M$ を満たすならば. この問題は. 肯定的である. 実際. より強く. 次のことがわかる.

1.5. 定理 ([6, Theorem 1.6]). $f: X \rightarrow \prod_{j \in J} M_j$ を essential mapping とし. 任意の $j \in J$ に対し. N_j を M_j の $\dim N_j = \dim M_j$ を満たす submanifold とする. このとき $\bar{f} = f|_{f^{-1}(\prod_{j \in J} N_j)} : f^{-1}(\prod_{j \in J} N_j) \rightarrow \prod_{j \in J} N_j$ は essential である.

次に. essential mappings の積について考える. 最も一般的な問題は. 「2つの essential mappings $f: X \rightarrow M$, $g: Y \rightarrow N$ について. $f \times g: X \times Y \rightarrow M \times N$ が essential mapping になるか?」であるが. これは. 成立しない. 実際. 次の例がある.

1.6. 例 ([7, Remark 4.5], [5]). compact space X , X から I^2 への essential mapping f , そして I^2 からそれ自身への essential mapping g で $f \times g : X \times I^2 \rightarrow I^2 \times I^2$ が essential になるものが存在する。

他方 W. Holztyński は次を示した。

1.7. 定理 ([4]). $f : X \rightarrow I^n$ を space X から I^n への essential mapping とし $\dim X = n$ とする。このとき $f \times id : X \times I \rightarrow I^n \times I$ は essential mapping である。

そこで次の問題が提起される。

1.8. 問題 ([6, Problem 3]). $f : X \rightarrow I^2$ を essential mapping とするとき $f \times id : X \times I \rightarrow I^2 \times I$ は essential か？

mappings の積については次の問題も未解決である。

1.9. 問題 ([7, Problem 2]). $f: X \rightarrow I^m$,
 $g: Y \rightarrow I^n$ を $f \times g: X \times Y \rightarrow I^m \times I^n$ が essential
 であるような mappings とする。そして, $p_1: I^m \times I^n \rightarrow I^m$,
 $p_2: I^m \times I^n \rightarrow I^n$ を projections とする。このとき,

$p_1 \circ \varphi$ が f の admissible deformation,

$p_2 \circ \psi$ が g の admissible deformation

であって, しかも $\varphi(X) \cap \psi(Y) = \emptyset$ となる mappings
 $\varphi: X \rightarrow I^m \times I^n$, $\psi: Y \rightarrow I^m \times I^n$ が存在するか?

次に, membranes の概念を, 導入する。

1.10. 定義. A を space X の部分集合とし, $f: X \rightarrow$
 $\prod_{j \in J} M_j$ を mapping とする。このとき, A が X の閉集合で,
 かつ, $f|_A: A \rightarrow \prod_{j \in J} M_j$ が essential であるとき, A を
 f の membrane といいう。

1.11. 定義. X の部分集合 A が, mapping $f: X \rightarrow$
 $\prod_{j \in J} M_j$ の weak membrane であるとは, A の任意の近傍が,
 f の membrane を含むときをいう。

A が X の閉集合のときは, membrane と weak membrane

の概念が、一致すること、知られている。membranes に関して、次の問題が提起されている。

1.12. 問題 ([6, Problem 4]). $f: X \rightarrow M$ を space X から manifold M への essential mapping とし、 A を f の weak membrane とする。このとき、 $f|_A: A \rightarrow M$ は essential か？

1.13. 問題 ([7, Problem 1]). X を compact space とし、 $(f_1, f_2): X \rightarrow I^2 \times I^2$ を essential mapping とする。このとき、 $A \cap B = \emptyset$ となる f_1 の compact membrane A と、 f_2 の compact membrane B が存在するか？

compact space X から $I^m \times I^n$ への mapping $(f_1, f_2): X \rightarrow I^m \times I^n$ について、交わりなき f_1 と f_2 の compact membranes が存在するか、という問題についての詳細は、[8] と [7] を参照されたい。

この節では、[6] に挙げられている問題を、主に、とりあげた。[6] においては、essential mappings についての、この種の詳しい議論と、その応用（特に、次元論への）が、

述べられてゐる。それらを、知りたり読者は、[6]を、読まれたり。[6]では、無限次元空間に関する問題も、述べられてゐるが、ここでは、それらを、省略した。この分野では、多くの未解決問題が、残されており、研究の余地も、多く残されてゐるように、思われる。

§2. Essential mappings and infinite-dimensional spaces.

この節では、"essential mappings" による "次元" の特徴付けについて考える。有限次元の場合には、space X の次元が、 $\dim X \geq n$ であることが、 X から、 I^n への essential mapping の存在によつて、特徴付けられることは、よく知られてゐる。D. W. Henderson は、large transfinite dimension Ind を、essential mappings の存在によつて特徴付けることを、試みた。彼の結果を、述べるために、 I^n の拡張である transfinite cubes H^α , $\alpha < \omega_1$, を定義する必要がある。

2.1. 定義 ([3]). α を、 $\alpha < \omega_1$ なる順序数とする。このとき、 H^α , T^α として、 p^α を次のように、定義

する。

$$(0) \quad H^0 = \{0\}, \quad T^0 = H^0 \quad \text{として,} \quad p^0 = 0$$

とする。

$$(1) \quad \alpha = \beta + 1 \text{ であるとき,}$$

$$H^\alpha = H^\beta \times I, \quad T^\alpha = (T^\beta \times I) \cup (H^\beta \times \{0, 1\}),$$

$$\text{として, } p^\alpha = (p^\beta, 0) \quad \text{とする。}$$

$$(2) \quad \alpha \text{ が limit number であるとき,}$$

$\beta < \alpha$ なるすべての順序数に対し, $A_\beta \in$

$$H^\beta \cap A_\beta = \{p^\beta\} \quad \text{で, } p^\beta \text{ が } A_\beta \text{ の end point}$$

であるような half-open arc とする。そして

$$H^\alpha \text{ は discrete sum } \bigoplus \{H^\beta \cup A_\beta \mid \beta < \alpha\}$$

の one-point compactification,

$$T^\alpha = H^\alpha - \bigcup_{\beta < \alpha} (H^\beta - T^\beta), \quad \text{とし}$$

$p^\alpha \in$ compactifying point とする。

H^α は compact metric AR-space である。しかし H^α は manifold ではない。そこで H^α 上の essential mappings を次のように定義する。

2.2. 定義 ([3]). $f: X \rightarrow H^\alpha$ を space X から H^α への mapping とする。このとき $f^{-1}(T^\alpha)$ 上では f は一

致する任意の mapping $f: X \rightarrow H^\alpha$ が, surjective であるとき, f は, essential mapping と呼ばれる。

D. W. Henderson は, 上の定義のもとで, 次を示した。

2.3. 定理 ([3]). 任意の順序数 α ($\alpha < \omega_1$) に対して, 次の成り立つ。

$$(1) \quad \text{Ind } H^\alpha = \alpha,$$

(2) X から H^α への essential mapping が, 存在するならば, $\text{Ind } X \geq \alpha$.

そして, D. W. Henderson は, 上の (2) の逆が, 成立するか, i.e., large transfinite dimension Ind が, essential mappings で, 特徴付けられるか, 問うた。しかし, 最近, この問題は, R. Pol [10] と, P. Borst & J. J. Dijkstra [2] により, 独立に, 否定的に, 解決された。従って, 次の問題を, 考えることは, 大変興味深い。

2.4. 問題 (cf. [9, Question 1], [10, §3]). 任意の $\alpha (< \omega_1)$ に対して, H^α の代わりに, 新たに, compact metric AR-space B^α を定義し, space X が, $\text{Ind } X \geq$

α であることも、 X から B^α への "essential mapping" の存在で、特徴付けることが、できるか？ ここで、考慮する空間を compact spaces に、制限して考えても、興味深い。

ところで、space X が H^α への essential mapping を持つというのは、どのようなことであろうか、最近、P. Borst [1] は、covering dimension $\dim$ を、無限次元へ拡張することにより、そのことを調べたので、それを紹介する。

$\{(A_i, B_i)\}_{i=1}^n$ を space X の disjoint closed sets の pair からなる有限列とする。このとき、 $A_i \subset U_i \subset \bar{U}_i \subset X - B_i$ であつ $\bigcap_{i=1}^n \text{cl } U_i = \emptyset$ を満たす X の開集合 U_i が存在するとき、 $\{(A_i, B_i)\}_{i=1}^n$ は inessential family と呼ばれる。そして、 $\{(A_i, B_i)\}_{i=1}^n$ は、inessential でないとき、essential family と呼ばれる。

集合 L に対して、 L のすべての空ならざる有限部分集合全体からなる集合を、 $\text{Fin } L$ で表わす。 $M \subset \text{Fin } L$, $\sigma \in \{\emptyset\} \cup \text{Fin } L$ とするとき、

$M^\sigma = \{\tau \mid \tau \in \text{Fin } L, \sigma \cup \tau \in M \text{ and } \sigma \cap \tau = \emptyset\}$ とする。そして、次のように、 $\text{Ord } M \in$ inductive に定義する：

$$\text{Ord } M = 0 \quad \text{if} \quad M = \emptyset$$

$\alpha > 0$ に対し.

$\text{Ord } M \leq \alpha \Leftrightarrow$ 任意の $a \in L$ に対し.

$$\text{Ord } M^{[a]} < \alpha.$$

2.5. 定義 ([1, Definition 3.1.2.]). space X に対し
 $L(X) = \{ (A, B) \mid A, B \text{ は } X \text{ の disjoint closed sets } \}$ とし.

$M_{L(X)} = \{ \sigma \mid \sigma \in \text{Fin } L(X) \text{ and } \sigma \text{ は } X \text{ の essential family } \}$ とする. したがって, X の transfinite covering dimension $\dim X$ は.

$$\dim X = \text{Ord } M_{L(X)}$$

により, 定義する.

(transfinite covering dimension $\dim X$ についての詳しい議論は, [1] を見ればよい.)

H^α への essential mapping は, large transfinite dimension Ind により, さらに, transfinite covering dimension $\dim$ と深く関係している. 即ち, P. Borst は, 次を示した.

2.6. 定理 ([1, Theorem 4.1.13]). space X から H^α

への essential mapping が存在するならば、 $\dim X \geq \alpha$ である。

2.7. 定理 ([1, Theorem 4.2.3]). space X が $\dim X \geq \alpha$ を満たすならば、 $X \times C$ から H^α への essential mapping が存在する。ただし、ここで C は Cantor set を表わすものとする。

逆に、

2.8. 定理 ([1, Theorem 4.2.1]). X を locally compact space とする。このとき、 $X \times C$ から H^α への essential mapping が存在するならば、 $\dim X \geq \alpha$ である。

2.9. 問題. 定理 2.8 において、space X の条件 "local compactness" は、本質的か？

$X \times C$ から H^α への essential mapping が存在するならば、定理 2.6 より $\dim X \times C \geq \alpha$ である。従って、問題 2.9 は、次に帰着される。

2.10. 問題 ([1, Question 3.1.9]). 任意の space X に対して, $\dim X \times C = \dim X$ が成立するか?

この問題に, 関係して, 次の問題も, 提起されている。

2.11. 問題 ([1, Question 3.1.10]). compact space X と, 有限次元空間 Y に対し, $\dim(X \times Y) \leq \dim X + \dim Y$ が成立するか?

特に, $\dim(X \times I^n) = \dim X + n$ であるか?

さて, 定理 2.7 と 2.8 より, locally compact spaces に, おいては, $\dim X \geq \alpha$ ということと, $X \times C$ から H^α への essential mapping が, 存在するということとは, 同値であることが, わかる。ここで, Cantor set C の積を考へることは, 本質的である。実際, $\dim X = \omega_0 + 1$ であり, H^{ω_0+1} への essential mapping が, 存在しない compact space X が, 存在する。([1, Example 5.2.1])。従って, 問題 2.4 と, 同様に, 次の問題も, 提起される。

2.12. 問題. 順序数 α ($\alpha < \omega_1$) に対して, H^α の代りに, 新たに compact metric AR-space C^α を定義し,

それへの "essential mapping" によって, (compact) space X の transfinite covering dimension $\dim X$ を特徴付けることが出来るか?

References

1. P. Borst, Transfinite classifications of weakly infinite-dimensional spaces, Free University Press, 1986.
2. P. Borst and J. J. Dijkstra, Essential mappings and transfinite dimension, Fund. Math. 125 (1985), 41-45.
3. D. W. Henderson, A lower bound for transfinite dimension, Fund. Math. 63 (1968), 167-173.
4. W. Holsztyński, Universality of the product mappings onto products of I^n and snake-like spaces, Fund. Math. 64 (1969), 147-155.
5. W. Holsztyński, On the composition and products of universal mappings, Fund. Math. 64 (1969), 181-188.
6. J. Krasinkiewicz, Essential mappings onto products of manifolds, preprint.
7. J. Krasinkiewicz and K. Lorentz, Disjoint membranes in cubes, preprint.
8. D. McCullough and L. R. Rubin, Intersections of separators and essential submanifolds of I^n , Fund. Math. 116 (1983), 131-142.
9. J. Nagata, Topics in dimension theory, General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra (Proc. Fifth Prague Topology Symposium 1981), Heldermann Verlag, Berlin (1982), 497-506.
10. R. Pol, On classification of weakly infinite-dimensional compacta, Fund. Math. 116 (1983), 169-188.