

On Elliptic Threefolds

東大・数理 中山 昇

§0. 3次元複素多様体は elliptic fibration を持つ時、elliptic threefold と呼ばれる。elliptic fibration とは normal complex analytic space の間の proper morphism π 一般 fiber が elliptic curve となるものである。elliptic threefold は 曲面論において elliptic surface がそうであった様に、3次元多様体論でも重要な class である。elliptic surface と比べて elliptic threefold が研究しやすい点には、fibration が flat とは限らない、base surface が nonsingular とは限らない、fibration が locally projective とは限らない等 いくつかある。しかし、最近の 3次元極小モデル理論 (analytic space の間の projective morphism に対する minimal model theory + flip theorem + flop theorem etc.) [Ni] [Mi] [Ka] により少し見通しが明るくなった。

§1. standard elliptic fibration.

与えられた elliptic threefold に対し、base surface を適当に blow-up すれば、fibration を flat にするこができる。すると、fiber が 1次元であることから、これが locally projective morphism になることがわかる。

定義。 $f: Y \rightarrow T$ を normal surface T 上の elliptic fibration とする。 f が以下の条件を満たすとき、 f は standard elliptic fibration と呼ぶ。

- (1) Y は高々 terminal sing. を持つ。
- (2) Y は高々 $\mathbb{Q}$ -factorial singularity を持つ。
- (3) f は locally projective morphism
- (4) f のすべての fiber は 1-次元
- (5) ある effective $\mathbb{Q}$ -divisor Δ が T 上にあり、
 - (a) (T, Δ) は log-terminal
 - (b) $K_Y \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_T + \Delta)$

上記の定理を得る。

定理 1 $\pi: X \rightarrow S$ を surface S 上の locally projective elliptic fibration とする。このときある standard elliptic fibration $f: Y \rightarrow T$ が存在して、以下の条件を満たす。

- 1) bimeromorphic morphism $\mu: T \rightarrow S$ が存在する
- 2) $\pi \circ \mu$ は S 上 bimerorphically equivalent
- 3) K_Y は $\mu \circ f$ -semi-ample.

証明のあきじ。 π は locally projective なので、 S の各点 p に対しある近傍 U をとれば $\pi^{-1}(U) \rightarrow U$ は projective morphism

となる。 $N^1(\pi^*(U)/U, p)$ についての minimal model program [M1] を実行すると、(flip 存在定理 [M2] により実行可能)、relative minimal model $Z_U \rightarrow U$ が得られる。この minimal model は flop の差を除いて unique に定まるが、flop があろうかろうと base surface の点 p は discrete である。従って、この $Z_U = S$ を取りあわせることができて、locally projective な minimal model $Z \rightarrow S$ が得られる。この段階では K_Z は relatively nef といえただけで relatively numerically trivial にはなっていない。しかし base point free theorem により K_Z は relatively semi-ample になるので、ある $\mu: T \rightarrow S$ bimeromorphic morphism と、 $h: Z \rightarrow T$ があって合成 $Z \rightarrow T \rightarrow S$ が元の morphism、 K_Z は μ -numerically trivial になる。すると [N2] により T 上に effective $\mathbb{Q}$ -divisor Δ が存在し (T, Δ) log-terminal, $K_Z \sim_{\mathbb{Q}} h^*(K_T + \Delta)$ とできる。次に $\mu: Z \rightarrow T$ のある fiber が irreducible component E を含んでいる場合を考える。この時 Z 上に effective divisor D をとって $D + kE$ ($k > 0$) が T 上の effective Cartier divisor の引きもととして存在する。ここで log terminal pair $(Z, \varepsilon D)$ ($0 < \varepsilon < 1$) の $N^1(Z/T, \mu^*(p))$ ($p = \mu \cdot h(E)$) における log-minimal model program を実行する。 K_Z が relatively trivial なので flip にあたると必ず flop の存在 [Ka] によりうまく移れる。もし $-E$ が μ -nef となれば、 $K_Z + \varepsilon D$ についての log-extremal ray が存在し、その contraction morphism がある、ここで E はその contraction によって縮められる。divisorial contraction

や flop をいかにすると つか $-E'$ は T 上 nef になる。ここで E' は E の proper transform. すると再び base point free theorem により, $-E'$ は T 上 semi-ample. 従って ある birational morphism $\mu_1: T_1 \rightarrow T$ と morphism $V_1 \rightarrow T_1$ ($T=T_1$ 上 V_1 は contraction かつ flop で最後に与えられた variety) が存在し E' は T_1 上の divisor の pullback になる。 V_1 は 高次元 canonical singularity (を消して平坦の T に変える) crepant な partial resolution $Z_1 \rightarrow V_1$ を取りとることができる。この $Z_1 \rightarrow T_1$ について fiber の次元が 1 かどうか check する。もしそうではないならば今の操作をくりかえす。 Z と Z_1 は flop でつながる $N^1(Z/T; \mu(p)) = N^1(Z_1/T; \mu(p))$ となるのでこの操作はいつかはあわる。従って Z の fiber が 1 次元になるような $Z \rightarrow T$ がとれる。ここで Z の $\mathbb{Q}$ -factorialization $Y \rightarrow Z$ をとる ([Ka]). 今 $Y \rightarrow T$ の各 fiber も 1 次元となるので $Y \rightarrow T$ は再び locally projective となり、これが求める standard model となる。

§2. Compact elliptic Kähler three fold

定理 2. X は compact Kähler 3-fold で elliptic fibration $f: X \rightarrow S$ を持つとする。すると X は uni-ruled であるか。そうでなければ good minimal model を持つ。

ここで X が uniruled ならば ある compact surface Y があって dominant meromorphic mapping $Y \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow X$ が存在するからである。good minimal model V ならば V が高々 terminal sing.のみしか持たない analytic variety で K_V が semi-ample なるものである。定理の証明には Torsion free theorem for higher direct images of dualizing sheaves, Abundance theorem on surfaces, a lemma on uniruledness が必要となる。

定理 (Torsion free theorem) $\pi: X \rightarrow V$ $\in$ complex manifold X の complex analytic variety V への elliptic fibration, $f: V \rightarrow W$ $\in$ complex analytic variety W への surjective な projective morphism, $A \in f$ -ample invertible sheaf on V とする。このとき以下が成立する。

1) $R^i \pi_* (\omega_X)$ ($i \geq 0$) は torsion free sheaves. もし V が nonsingular で π が V 上の normal crossing divisor の外は π が smooth ならば、

$R^i \pi_* (\omega_{X/V})$ は π が定める variation of Hodge structure の canonical extension から成る locally free sheaf と同型になる。

2) $R^p f_* (R^i \pi_* (\omega_X \otimes A)) = 0$ for $p > 0, i \geq 0$.

この定理は [K0][Mw][S] 等に示す π が projective morphism の場合には証明されていた (ただし elliptic fibration である必要はない)。elliptic fibration の場合、flattening を用いて locally projective morphism とする

ことで、canonical bundle formula により、projective case の結果と

vanishing theorem [N1] により示される。次の locally projectivity であるための criterion は minimal model program の うまく機能するために必要である。

命題3. $\pi: X \rightarrow V$ は complex manifold X から complex analytic variety V への proper surjective morphism である。ある点 $p \in V$ に対して $(R^2\pi_*\mathcal{O}_X)_p = 0$ となることを示す。このとき π が p 上で projective morphism となることを示す。このとき p にある近傍 U があり $\pi^{-1}(U)$ が Kähler metric をもつことを示す。

証明は V が 1 点のときと同様に relative な Kähler cone である。

$(R^2\pi_*\mathcal{O}_X)_p$ の open cone であることは示すことができる。

系4. $f: Y \rightarrow S$ は complex Kähler manifold Y から complex manifold S への elliptic fibration である。 S 上の normal crossing divisor の外側で smooth である。このとき f は locally projective morphism である。

また Torsion free theorem に $\mathbb{Q}$ -divisor の vanishing theorem 等を含めると以下の定理も得る。

定理5. $f: X \rightarrow Y$ は elliptic fibration, $g: Y \rightarrow Z$ は projective morphism, X, Y, Z は normal complex variety である。以下の2条件を仮定すると、 $R^2(g \circ f)_*\mathcal{O}_X = 0$ である：

(1) $(X, 0)$ は log-terminal

(2) Y 上にある g -ample な $\mathbb{Q}$ -divisor L があって $-K_X \sim_{\mathbb{Q}} f^*L$.

Abundance theorem for surfaces とは次の結果である。

定理 6. T が class $\mathcal{C}$ に属する (compact Kähler manifold と bimeromorphically equivalent) normal compact complex surface、 Δ が T 上の effective な $\mathbb{Q}$ -divisor で (T, Δ) は log-terminal であるとする。もし T 上の任意の irreducible curve C に対して $(K_T + \Delta) \cdot C \geq 0$ ならば $K_T + \Delta$ は semi-ample である。

T が Moishezon のときは [F] によって示されているし、その時のほうが難しい。algebraic dimension $a(T)$ が 1 以下のときは、big な divisor が存在するので、簡単に証明できる。uniruledness をいう時には次の補題を使う。

補題 7. $f: X \rightarrow M$ が complex manifolds の間の proper surjective morphism で、general fiber は $\mathbb{P}^1$ と同型である。 X 上には相異なる prime divisors D_1, D_2 があって、さらに D_1 上には Cartier divisor D_3 があって

(1) D_1, D_2 は共に M に bimeromorphically dominate している。

(2) $\mathcal{O}_{D_1}(D_1) \cong \mathcal{O}_{D_1}(D_3)$

ならば f は projection $M \times \mathbb{P}^1 \rightarrow M$ と bimeromorphically equivalent.

定理 2 の証明のあとで: algebraic dimension $a(X) = 3$ のときは

X は projective なので [Mr.] により 定理 2 は示されている。従って $\rho(X) \leq 2$ としてよい。ここで $X, S \in \text{blow-up}$ における S も complex manifold で S 上の normal crossing divisor の外側で f は smooth とできる。すると系 4 により、 f は locally projective morphism となる。従って 定理 1 により f と bimeromorphically equivalent な standard elliptic fibration $h: Y \rightarrow T$ が存在し、 $K_Y \sim_{\mathbb{Q}} h^*(K_T + \Delta_T)$ となる。もし $K_T + \Delta_T$ が T 上の任意の irreducible curve C に対して $(K_T + \Delta_T) \cdot C \geq 0$ とならないならば、定理 6 により、 $K_T + \Delta_T$ は semi-ample 従って K_Y も semi-ample となり Y は good minimal model となる。もし T 上に irreducible curve C が $(K_T + \Delta_T) \cdot C < 0$ かつ $C^2 < 0$ となるとき C の contraction $T \xrightarrow{\delta} T'$ を考えることが出来る。このとき $-(K_T + \Delta_T)$ は δ -ample である。命題 3、定理 5 により、 $Y \rightarrow T'$ (合成) は ^{locally} projective morphism と bimeromorphically equivalent になる。よって 定理 1 の様に $Y \rightarrow T'$ なる minimal elliptic fibration を作る事が出来るが、今十分大きな $m > 0$ に対して $\delta_* \mathcal{O}_T(m(K_T + \Delta_T)) \cong \mathcal{O}_{T'}(m(K_{T'} + \Delta_{T'}))$ (ただし $\Delta_{T'} = \delta_* \Delta_T$) となりたつので、 T' 上の minimal model $h': Y' \rightarrow T'$ について $K_{Y'} \sim_{\mathbb{Q}} h'^*(K_{T'} + \Delta_{T'})$ となりたつ。もし $(K_{T'} + \Delta_{T'}) \cdot C' \geq 0$ が任意の T' 上の irreducible curve C' についてなりたてば、定理 6 により $K_{T'} + \Delta_{T'}$ は semi-ample。よって Y' が good minimal model となる。従って $(K_T + \Delta_T) \cdot C < 0$ かつ $C^2 < 0$ なる curve が存在しない限り contract して、 $Y \xrightarrow{h} T$ を model change してゆける。よって最終的に $h: Y \rightarrow T$ は次の条件を満たすとしてよい。

- 1) π は standard elliptic fibration であり, $K_Y \sim_{\mathbb{Q}} \pi^*(K_T + \Delta_T)$
- 2) $(K_T + \Delta_T) \cdot C < 0$ となる irreducible curve C が T 上にある。
- 3) $(K_T + \Delta_T) \cdot C < 0$ かつ $C^2 < 0$ となる irreducible curve C は存在しない。

ここで $\alpha(T) < 2$ であると, 命題3 (Vが1点のcase) により $p_g(T) \neq 0$.

よって $K_T + \Delta_T$ と $\mathbb{Q}$ -linearly equivalent な effective $\mathbb{Q}$ -divisor がある。よって

2) を満たす C は常に $C^2 < 0$ であるといける。従って $\alpha(T) = 2$ 。 T

は projective と仮定できる。2) により $K_T + \Delta_T$ は T 上の extremal ray の contraction $\sigma: T \rightarrow Z$ に対応する。すると $-(K_T + \Delta_T)$ が σ -ample

なので, 命題3, 定理5 により 合成 $Y \rightarrow Z$ は locally projective morphism と birationally equivalent。もし Z が 1 点 だとすると,

$\alpha(Y) = \alpha(X) = 3$ であることに反する。よって Z は smooth curve。 $F \in Y \rightarrow$

Z の general fiber であると, $-K_F$ は semi-ample であり $K_F^2 = 0$ である。もし

$g(F) = 0$ ならば, $R^1(\sigma_0^* \mathcal{O}_Y) = 0$ であり, $H^2(\mathcal{O}_F) = 0$ となる。

すると 命題3 (Vが1点のcase) により $\alpha(Y) = 3$ となる矛盾。ゆえに F は

elliptic curve E 上の $\mathbb{P}^1$ -bundle である。 $Y \rightarrow Z$ の minimal model program

を考えると Z 上の meromorphic mapping $\gamma: Y \dashrightarrow N$ である。

1) N は normal non-projective surface

2) $N \rightarrow Z$ は elliptic fibration

3) general fiber F 上で γ は $F \rightarrow E$ を induce する

という性質をもつものがある。

ここで $H_1, H_2 \in T$ の general ample divisors とし $D_1, D_2 \in \pi^* Y$ の pullback とする。 D_1, D_2 は $N \in \text{dominate}$ する。 5.2 補題 7 により どのように finite covering $N' \rightarrow N$ をとれば Y が $N' \times \mathbb{P}^1$ で dominate されるようにできる。 中に X は uniruled である。 $\square$

証明の詳細は [N3] を参照。

参考文献

- [F] T. Fujita, Fractionally logarithmic canonical maps of algebraic surfaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo IA 30 (1983), 685-695.
- [Ka] Y. Kawamata, Crepant blowing-up of 3-dimensional canonical sing., Ann. Math. 127 (1988), 93-163
- [Ko] J. Kollar, Higher direct images of dualizing sheaves I, II, Annals of Math., 123 (1986) 11-42, ibid. 124 (1986), 171-202.
- [Mr] S. Mori, Flip theorem and the existence of minimal models ..., J. AMS. 1 (1988), 117-253.
- [Mw] A. Moriwaki, Torsion freeness of higher direct images ..., Math. Ann. 276 (1987), 385-398
- [N1] N. Nakayama, The lower semi-continuity of the plurigenera ..., Adv. Stud. Pure Math. 10 (1987) 551-590
- [N2] —, On Weierstrass Models, in Algebraic Geom. and Commutative Alg. in honor of M. Nagata (1987) 405-431
- [N3] —, Local structure of an elliptic fibration, preprint Univ. Tokyo (1991)
- [S] M. Saito, Modules de Hodge polarisables, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 24 (1988), 849-995.