

氏 名	小 林 貞 一 こ ばやし てい いち
学 位 の 種 類	理 学 博 士
学 位 記 番 号	論 理 博 第 164 号
学位授与の日付	昭 和 42 年 1 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 5 条 第 2 項 該 当
学 位 論 文 題 目	Non-immersion theorems for lens spaces (レンズ空間の挿入不能定理)
論文調査委員	(主 査) 教 授 戸 田 宏 教 授 小 松 醇 郎 教 授 永 田 雅 宜

論 文 内 容 の 要 旨

m 次元可微分多様体 M から r 次元可微分多様体 R (通常 r 次元ユークリッド空間 R^r をとる) の中への可微分写像が存在して, そのヤコビアン⁽¹⁾の階数が M の各点で m であるとき, M は R の中へ挿入可能であるという。さらに, この写像が 1 対 1 かつ極限点をもたぬときには, M は R の中へ埋め込み可能であるという。

主論文において, 申請者は多様体 M を p を法とするレンズ空間にとり, その挿入不能性を論じた。レンズ空間 $L^n(p)$ は $2n+1$ 次元可微分多様体であり, $p=2$ のときは実射影空間と一致するが, 主論文では p が奇素数の場合が考察される。その結果, $p=3$ と $p \geq 5$ の場合の間には, 若干の相異点がみとめられる。

挿入不能性の証明については, 主として, 特性類を用いるコホモロジー論的方法と, K -理論を用いる総括的な方法とがある。申請者は, これら両者を Thom 複体の理論によって結びつけることを考え, さらに精密な結果の期待される理論を展開した。すなわち, まず $L^n(p)$ が R^{2n+1+k} に挿入可能であるための必要十分条件を K -理論を用いて表現し (定理 1), 次に $L^n(p)$ がある法バンドル ν をもって R^{2n+1+k} に挿入可能ならば, $L^n(p)$ の ν に関する Thom 複体の懸垂はある簡約レンズ空間と同相であることを示し (定理 2), さらに ν のオイラー類が自明でないときには, 二種類の簡約レンズ空間のコホモロジー群の間に自然な同型対応の存在することを証明した (定理 3)。

これら一連の定理, とくに定理 3 の同型対応がコホモロジー作用素の自然性をみたすこと, から種々の場合に $L^n(p)$ が R^{2n+1+k} に挿入不能であることが導き出される。たとえば, 定理 4 においては, $p \geq 5$, $n = \alpha p^l + \beta p^k$ のとき, α, β, k, l が次の条件 (I) または (II) をみたすならば $L^n(p)$ は R^{3n+1} に挿入不能であることが示される: (I) α, β は $0 \leq \alpha \leq (2p-2)/3$, $0 < \beta \leq (2p-2)/3$ をみたす偶数, かつ k, l は $\alpha > 0$ のとき $l > k \geq 0$ を, $\alpha = 0$ のときは $k > 1$ をみたす整数: (II) α, β は $0 < \alpha \leq (2p-1)/3$, $0 < \beta \leq (p-2)/3$ をみたす奇数, かつ k, l は $\alpha > 1$ のとき $l > k \geq 0$, $l > 1$ を, $\alpha = 1$ のときは $l > k \geq 0$, $l > 2$ を

みたす整数。定理 5 においては、 α が奇数 β が偶数のときに (I), (II) と類似な条件 (III), (IV) の下に $L^n(p)$ は R^{3^n} に挿入不能であることが示される。さらに、 n を p 進表示した場合の結果が定理 5', 定理 6' に述べられている。これらの挿入不能定理は $p=3$ の場合に適用出来ないが、定理 6 で $n=3^k$ ならば $L^n(3)$ は R^{3^n} に挿入不能、定理 7 で $n=3^l+3^k$, $l-1>k\geq 0$, ならば $L^n(3)$ は $R^{3^{n-1}}$ に挿入不能であることが示される。

参考論文 1 では $L^n(3)$ の埋め込み不能性を論じ、上記の定理 6, 7 に対応する結果を得ている。参考論文 2, 4 は Dold-Thom 型同型定理の一般化を、参考論文 3 は弱ホモトピー同値性について、論じたものである。

論文審査の結果の要旨

与えられた m 次元可微分多様体 M が何次元のユークリッド空間に挿入可能（埋め込み可能）または挿入不能（埋め込み不能）であるかを論じる、いわゆる挿入（埋め込み）問題は、微分幾何学における問題とも密接に関連する微分位相幾何学における一つの主要問題である。Whitney によれば、 $m>1$ のとき、 M は R^{2m-1} (R^{2m}) に挿入（埋め込み）可能であることが一般に成立するが、これを精密化しようとするとき、とくに t -連結性 ($t\geq 1$) の仮定のないときは、多くの困難を伴う。レンズ空間とくに実射影空間は 1-連結でない多様体の重要な例である。実射影空間の挿入問題については多くの学者の研究があるが、レンズ空間についてはよくわかっていない。レンズ空間の挿入不能性を論ずるとき、特性類による方法はあまり見るべき結果がないが、 K -理論を用いる方法によって最近上部恒和が一般的な結果を得ている。申請者は、これら両者の方法を Thom 複体の理論によって結びつけることに成功し、レンズ空間の挿入問題を高次の簡約レンズ空間の弱ホモトピー同値問題に転化したものとして、その理論に見るべきものがある。実際、個々の n に対する挿入不能性の結果は、上記の上部氏の結果より優秀なもので、挿入問題を実質的に一步前進させたものである。また参考論文 1 は埋め込み問題においても、同様の進展が可能であることを $p=3$ の場合に示している。他の参考論文は、申請者のこの方面でのすぐれた研究能力と広い知識を立証している。

以上のように、本論文は挿入問題を中心とした微分幾何学の分野の進展に寄与するところがすくなくない。したがって、本論文は理学博士の学位論文として価値のあるものと認められる。