

という意味ではないことに注意)で確定値をもつものである。

したがって、超選択則を観測機械の系に仮定するのは、それが巨視的であるが故に、古典的な力学量を持つと仮定することに他ならない。町田・並木の理論でも、そのような物理量が超選択則の具体例として使われている。

文 献

- 1) E.P. Wigner, Am. J. Phys. **31** (1963), 6.
- 2) A. Fine, Phys. Rev. **D2** (1970), 2783.
- 3) S. Machida & M. Namiki, Prog. Theor. Phys. **63** (1980), 1833.
- 4) G.C. Wick, E.P. Wigner, A.S. Wightman, Phys. Rev. **88** (1952), 101.
- 5) H. Araki, Prog. Theor. Phys. **64** (1980), 719.

交 換 関 係 の 拡 張

広大・理論研 山 田 一 夫

□ 量子力学における交換関係 $[q, p] = i$ に現われる p は、Diracにより直線上の無限小のずれの演算子と解釈されてきたが、これを一般化し無限小回転の演算子を含むような交換関係は作れないものであろうか。非相対論的な量子力学の具体的計算を見ればわかるとおり、スピンに関するものを別とすれば量子化の規則とは上の交換関係に他ならない。

その理由はおそらく物理的に問題にする系の振舞いが、その系を構成する微小部分のさまざまな並進運動の積重ねとして理解される場合が多いことによるものであろう。ここに言う並進運動とは無限小の場合であって、たとえ質点が曲線運動をするとしてもこれらの積重ねで表わされると考える。従って軌道角運動量も $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ のように直線上のずれの演算子を使って表わされる。

一方、高エネルギー物理学の対象となる様々な現象にはアイソスピンなどの内部自由度が重要な役割をはたしている。この場合には $SU(2)$ 又はこれに関連した非可換群が使われるが、通常の量子力学の場合とは異なり、無限小変換の演算子がある場合でも、内部空間における物理的意味の付けられるような「並進運動」には帰着されない。そこで、このような時にも量子化の規則を適用できるようにしたいために、最初に述べた問がでてくる。

以下ではこの問題に対するごく自然な答があることを具体的に示し、さらに簡単な場合にその物理的意味を不確定性関係の立場から調べてみたい。

II 拡張

通常の三次元空間での剛体の回転を考えて見よう。軸を一つに決めると適当な力学変数は古典的には回転角 φ と角運動量 L_Z である。量子論的にも物理的意味のある量は角度 φ の周期関数であると仮定するのが自然であろう。

このような周期条件を考える上で、はじめの $[q, p] = i$ のかわりに、Weyl¹⁾に従って

$$e^{i\sigma p} e^{i\tau q} e^{-i\sigma p} e^{-i\tau q} = e^{i\sigma\tau} \quad (\sigma, \tau \text{ は実数}) \quad (1)$$

を仮定するのが便利である。

$$S(\sigma, \tau) \equiv e^{i\sigma p} e^{i\tau q} e^{-\frac{i}{2}\sigma\tau} = e^{\frac{i}{2}\sigma\tau} e^{i\tau q} e^{i\sigma p} \quad (2)$$

を用いて、 p と q の関数である物理量を

$$f(p, q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma d\tau \xi(\sigma, \tau) S(\sigma, \tau) \quad (3)$$

で定義すれば、 $\xi(\sigma, \tau)$ は Fourier 係数 ($= \xi^*(-\sigma, -\tau)$) と見なすことができる。 φ と L_Z の場合の交換関係は色々な形に提唱されてきたが、ここでは二つのエルミート演算子 $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ を導入して

$$\begin{aligned} [L_Z, \sin\varphi] &= -i \cos\varphi \\ [L_Z, \cos\varphi] &= i \sin\varphi \end{aligned} \quad (4)$$

を仮定する。²⁾

$$e^{i\varphi} \equiv \cos\varphi + i \sin\varphi \quad (5)$$

を導入して上の関係を

$$e^{i\theta L_Z} (e^{i\varphi})^l e^{-i\theta L_Z} (e^{i\varphi})^{-l} = e^{i\theta l} \quad (6)$$

と書くことができる。ただし $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ としてよい。(1)との違いは、 θ 及び l のとりうる値が、 σ, τ (任意の実数) に比較して制約されている点である。これを別にすれば(1)と(6)は同じである。(6)の表現の一つは $L_Z = -i\partial/\partial\varphi$ で与えられるが、群を SU(2)又は O(3)に広げる場合にも、このような特定の表現から出発して交換関係を類推するのが都

合がよい。それにはまず

$$e^{i\theta L_z} \rightarrow e^{i\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}} \equiv e^{i\varphi J_z} e^{i\theta J_y} e^{i\psi J_z} \quad (7)$$

のおきかえをし、さらに $[J_x, J_y] = i J_z$ (cycl.) をみたすような表現：

$$\begin{aligned} J_x &= i \left\{ \cos \alpha \cot \beta \frac{\partial}{\partial \alpha} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial r} \right\} \\ J_y &= i \left\{ \sin \alpha \cot \beta \frac{\partial}{\partial \alpha} - \cos \alpha \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial r} \right\} \\ J_z &= -i \frac{\partial}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (8)$$

を考えて見よう。 $(e^{i\varphi})^l$ に対応するものは様々なものが可能であるが、例えば $\exp \{ i[l\alpha + m\beta + nr] \}$ (ただし m, n, l は整数) のような形の函数をとることができるが、この場合には交換子が簡単な形にならないことがわかる。一方(6)を

$$e^{i\theta L_z} (e^{i\varphi})^l e^{-i\theta L_z} = (e^{i\theta} e^{i\varphi})^l \quad (6')$$

と書き直して見ると、角度 φ の函数が有限回転により、 $\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi + \theta$ の函数に変換されることを表わしていると思なすことができる。したがって群論的考察から、SU(2)又は O(3)の場合には

$$e^{i\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}} \mathcal{D}^{(j)}(\alpha, \beta, r) e^{-i\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}} = \mathcal{D}^{(j)}(\alpha', \beta', r') \quad (9)$$

$$\mathcal{D}^{(j)}(\alpha', \beta', r') = \mathcal{D}^{(j)}(\psi\theta\varphi) \mathcal{D}^{(j)}(\alpha\beta r)$$

となるはずである。ここで (ψ, θ, φ) はオイラー角であり、(6)の θ と同様に C-number と見なされるべきものである。(9)をひとつにまとめれば、求めている関係が得られる。

$$e^{i\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}} \mathcal{D}^{(j)}(\alpha\beta r) e^{-i\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}} \mathcal{D}^{(j)}(\alpha\beta r)^{-1} = \mathcal{D}^{(j)}(\psi\theta\varphi). \quad (10)$$

$$(j = 0, 1/2, 1, \dots)$$

ここで $\mathcal{D}^{(j)}$ は行列であって(8)の表現を使うと実際に、(10)式が確かめられる。具体的には、 $j = 1/2$ の時には、

$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\alpha\beta r) = \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}(\alpha+r)} \cos \frac{\beta}{2} & e^{\frac{i}{2}(\alpha-r)} \sin \frac{\beta}{2} \\ -e^{\frac{i}{2}(-\alpha+r)} \sin \frac{\beta}{2} & e^{-\frac{i}{2}(\alpha+r)} \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \quad (11)$$

で与えられる。(10)は明らかにもっと広いクラスの群に対しても成立するが、これ以上立ち入らない。

Ⅲ 不確定性関係

交換関係の物理的意味を調べるには不確定性関係について考察するのが適している。通常の $[q, p] = i$ の場合に最小の不確定さを実現する状態はガウス型であるが、(4)の時にはどちらか一方の不確定さを最小にする状態が知られている。²⁾ このうちガウス型の波動関数は、(3)の形の要素の作る代数に現われる簡単な射影演算子の固有状態としても特長づけられることが、von Neuman の仕事により知られている。³⁾ この観点から見ると、最小の不確定さの状態は(1)の場合でも、又(6)の場合でも、統一的に理解されることを示すのがこの章の目的である。まず(3)において $\xi(\sigma, \pi)$ としてガウス型を選ぶとき、すなわち

$$A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma d\tau e^{-\frac{1}{4}(\sigma^2 + \tau^2)} S(\sigma, \tau) \quad (12)$$

は $A^\dagger = A$, $A^2 = A$ を満すので射影演算子である。この A の固有状態は Schrödinger の表示では一次元、すなわち

$$Af = f \longrightarrow f = \text{const.} \times e^{-q^2/2} \quad (13)$$

となる。(12)において重みの函数は他にも無限に可能であり

$$e^{-\frac{1}{4}\eta\alpha^2 - \frac{1}{4\eta}\beta^2 + i(\alpha u + \beta v)} \quad (\eta \neq 0, \quad \eta, u, v \text{ は実数})$$

は、ほんの一例である。

さて(6)の場合にも

$$S(\theta, l) = e^{i\theta L_z} (e^{i\phi})^l e^{-\frac{i}{2}\theta l} \quad (14)$$

を定義すると、

$$E = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} d\theta \xi(\theta, l) S(\theta, l) \quad (15)$$

が射影演算子となるのは、

$$\begin{aligned} \xi^*(\theta, l) &= \xi(-\theta, -l), \quad \xi(\theta + 2\pi, l) = (-1)^l \xi(\theta, l) \\ \xi(\alpha, k) &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} d\theta e^{\pm \frac{i}{2}(\theta k - \alpha l)} \xi(\theta, l) \xi(\alpha - \theta, k - l) \end{aligned} \quad (16)$$

を満すことが必要十分である。そのとき明らかに $\xi' = i^l \xi(\theta, l)$ も (16) の解であるために、 E は対で現われる。解の一つは

$$\xi(\theta, l) = \frac{1}{I_0(c')} I_l(c' \cos \frac{\theta}{2} - i c \sin \frac{\theta}{2}) \quad (17)$$

で与えられる。 (c', c) は任意の実数)。 I_l は変形ベッセル函数である。Schrödinger 表示を仮定すると、 $\xi(\theta, l)$ 及び $i^l \xi(\theta, l)$ の固有状態は、

$$f(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi I_0(c')}} \begin{cases} e^{\frac{ic}{2} \sin \varphi + \frac{c'}{2} \cos \varphi} & (a) \\ e^{\frac{ic}{2} \cos \varphi - \frac{c'}{2} \sin \varphi} & (b) \end{cases} \quad (18)$$

であり、共に一次元の基底を Hilbert 空間に作るために、この場合の Schrödinger 表示 ($L_z = -i\partial/\partial\varphi$) の一意性も証明される。興味深いことは $c=0$ の場合の $f(\varphi)$ は、それぞれ

$$\begin{aligned} \frac{(\Delta L_z)^2 (\Delta \cos \phi)^2}{|\langle \sin \phi \rangle|^2} &= \frac{1}{4} & (a) \\ \frac{(\Delta L_z)^2 (\Delta \sin \phi)^2}{|\langle \cos \phi \rangle|^2} &= \frac{1}{4} & (b) \end{aligned} \quad (19)$$

を満すことが確かめられる。したがって最小の不確定性の状態は、拡張された交換関係(6)の場合にも、非常に簡単な重み函数

$$\xi(\theta, l) = \frac{I_l(c' \cos \frac{\theta}{2})}{I_0(c')}$$

を持つ射影演算子の固有状態であることがわかる。このように(2)又は(14)で定義される S の一次結合の作る代数の性質を調べることは交換関係の物理的意味を知る上で、大変有用であるが、詳しくは別の機会に述べたい。⁴⁾

文 献

- 1) H. Weyl, Theory of Groups and Quautum Mechanics (Dover, 1932), Chap4.
- 2) P. Carruthers and M.M. Nieto, Rev. Mod. Phys. **40**, 411 (1968)
- 3) J. v. Neumann, Math. Ann. **104**, 570 (1931)
- 4) K. Yamada, in preparation.