

2 階算術の諸体系

— モデル論的手法による分析 第2 —

東北大学 理学部 数学科

田中 一之 (Kazuyuki Tanaka)

この論文は、下記論文の続編として書かれたものである。

2 階算術の諸体系—モデル論的手法による分析—, 数理解析研講究録 771 (1991 年 12 月) pp. 118–156.

上の論文は、以下のような構成になっていた。

§0. 準備

§1. AC, DC, SP, TI

§2. WKL₀ に関する Harrington の結果

§3. WKL₀ に関する Friedman の結果

これに続いて、本文の構成は次の通り。

§4. WKL₀ の自己埋め込み定理

§5. PRA について

§6. 補遺, 訂正

§4. WKL₀の自己埋め込み定理

本節では、WKL₀の任意の可算超準モデル (M, S) が自らと同型になる接頭部 $(I, S \upharpoonright I)$ を持つことを示す。ここで、 I は M の接頭部、つまり I に関して閉じた M の真部分集合であり、 $S \upharpoonright I = \{X \cap I : X \in S\}$ である。

PAの可算超準モデルが自分と同型の接頭部を持つことは、H. Friedman (in *Lec. Notes in Math.* 337 (1973)) によって初めて示され、その後 Dimitracopoulos (in *ZML* 31 (1985)) が $B\Sigma_2$ のモデル、そして Dimitracopoulos-Paris (in *ZML* 34 (1988)) が IS_1 のモデルに一般化させた。以下の証明は、 IS_1 の自己埋め込みにさらに集合を扱う機構を加えて WKL₀ の自己埋め込みを作るというものである。Dimitracopoulos-Paris の定理の証明は、Hájek-Pudlák の本 (*Metamath. of First-Order Arith.*, Springer 1993) にも載っているもので、ここではその改良点、つまり集合を扱う手続きの部分を中心に述べる。

最初に、WKL₀の可算超準モデル $V = (M, S)$ を1つ固定しておく。以下の議論を簡単にするため、 V は $+$, $\cdot$ と関数ではなく、関係として持っていることとする。つまり、 $+(a, b, c)$ は $a + b = c$ を表す関係である。このようにすると、 M の接頭部が $+$ や $\cdot$ に関して閉じていない場合にも数学的構造として扱うことができる。そして、 $+(a, b, c)$ を満たす c が存在するとき

にそれを $a+b$ と書くことと約束しておけば、実際上言語の違いを意識する必要はない。・についても同様。

次に、広義の Σ_1^0 式 (G式 と呼ぶ) を定義する。以下の定義は簡単な recursion によるもので、G式の集合の存在は RCA。でいえるから、それは V の中にも存在する。

定義 4.1. 有限個の原子式またはその否定形を *disjunction* $\vee$ で結んでできる式を G₀式 と呼び、その集まりを G_0 と書く。各(超)自然数 e に対し、

$$G_{4e+1} = \{ \exists x \phi : \phi \text{ は有限個の } G_{4e} \text{ 式の conjunction} \} \cup G_{4e},$$

$$G_{4e+2} = \{ \forall x < y \phi : \phi \text{ は有限個の } G_{4e+1} \text{ 式の disjunction} \} \cup G_{4e+1},$$

$$G_{4e+3} = \{ \exists X \phi : \phi \text{ は有限個の } G_{4e+2} \text{ 式の conjunction} \} \cup G_{4e+2},$$

$$G_{4e+4} = \{ \forall X \phi : \phi \text{ は有限個の } G_{4e+3} \text{ 式の disjunction} \} \cup G_{4e+3},$$

とおき、最後に

$$G = \bigcup_e G_e$$

とする。 G, G_e に属する式をそれぞれ G式, G_e式 という。 $\square$

我々は、この G式に対する充足関係を定義したい。そのためには、次のような概念をまず導入する。 $p \in M \times I$ で、 $M_p = \{ a \in M : M \models a < p \}$, $S_p = \{ X \cap M_p : X \in S \}$, $V_p = (M_p, S_p)$ とおく。 V_p 上の充足関係 $Tr^p(z, \bar{x})$ は、(G式に限らない)任意の式 ϕ のコード z と、 ϕ の自由変数に $M_p \cup S_p$ の値を代入する評価関

数 ξ について (V において) Δ^0_1 関係として定義できる。ここで、 S_p の要素は 2^p 以下の数で code できることに注意したい。従って、 V_p における量化詞の解釈は、 V における有界量化詞になる。

定義 4.2. G 式のコード z についての充足関係 $Tr(z, \xi)$ を次のように定める:

$$Tr(z, \xi) \Leftrightarrow \exists p \, Tr^p(z, \xi). \quad \square$$

補題 4.3. $Tr(z, \xi)$ は G 式について Tarski の真理条件を満たす。

(証明) 集合を扱う場合の本質的なケースは以下の通り,

$$\begin{aligned} Tr(\forall x z, \xi) &\Leftrightarrow \exists p \, Tr^p(\forall x z, \xi) && \because Tr \text{ の定義} \\ &\Leftrightarrow \exists p \, \forall u \, Tr^p(z, \xi \cup \{(x, u)\}) && \because Tr^p \text{ の性質} \\ &\Leftrightarrow \forall u \, \exists p \, Tr^p(z, \xi \cup \{(x, u)\}) && \because \text{コンパクト性} \\ &\Leftrightarrow \forall u \, Tr(z, \xi \cup \{(x, u)\}) && \because Tr \text{ の定義} \end{aligned}$$

ここで、 $\xi \cup \{(x, u)\}$ は変数 x に値 u を割当てるように ξ を拡張したもの。 \(\square\)

補題 4.4. 各 e と有限評価関数 ξ に対し、ある p が存在し、 ξ で評価できる任意の G_e 式 z について、

$$Tr(z, \xi) \Leftrightarrow Tr^p(z, \xi).$$

(証明) ξ を有限評価関数, つまり ξ が評価できる変数が有限個であるとする. G_e 式は e 個の束縛変数をもつので, ξ が評価する変数に e 個の変数を加えた集合 X を考え, G_e 式の変数はすべて X に属するとしてよい. X の変数だけを持つ原子始式は有限個しかないから (関数記号がないことに注意), X の変数だけを持つ G_0 式も本質的には ($A \vee A$ を A と同一視すれば) 有限個しかない. あとは帰納法で, そのような G_e 式も有限個しかないことがいえる. そうすれば, 条件を満足する p の存在は, Σ_1 induction (又は $S\Sigma_1$) より明らか. $\square$

定義 4.5. 定義域の等しい有限評価関数 ξ, ξ' に対し,

$$\text{Ref}_e^p(\xi, \xi') \Leftrightarrow [\xi \text{ で評価される } G_e \text{ 式 } Z \text{ について, } \text{Tr}(Z, \xi) \Rightarrow \text{Tr}^p(Z, \xi')]$$

補題 4.6. $\text{Ref}_e^p(\xi, \xi')$ を仮定する.

- (1) $e = 4d+1$ のとき, $\forall a \exists a' < p \text{ Ref}_{e-1}^p(\xi \cup \{(y, a)\}, \xi' \cup \{(y, a')\})$,
- (2) $e = 4d+2$ のとき, $\forall a' < \xi'(x) \exists a < \xi(x) \text{ Ref}_{e-1}^p(\xi \cup \{(y, a)\}, \xi' \cup \{(y, a')\})$,
- (3) $e = 4d+3$ のとき, $\forall U \exists U' \text{ Ref}_{e-1}^p(\xi \cup \{(Y, U)\}, \xi' \cup \{(Y, U')\})$,
- (4) $e = 4d+4$ のとき, $\forall U' \exists U \text{ Ref}_{e-1}^p(\xi \cup \{(Y, U)\}, \xi' \cup \{(Y, U')\})$,

但し, y や Y は ξ で評価されない新しい変数とする.

(証明) (1) a を固定し, $Z = \{z \in G_{e-1} : \text{Tr}(z, \xi \cup \{(y, a)\})\}$ とおく.

補題 4.4 の証明と同様にして, Z は有限集合と考えられる.

従って、その存在は Σ_1^0 induction (又は finite (Σ_1^0 -CA)) からいえる。

そこで、 $z' = \exists y \bigwedge_{z \in Z} z$ とおくと、 $z' \in G_e$ かつ $\text{Tr}(z', \xi)$ となる。

仮定により $\text{Tr}^P(z', \xi')$ となるから、ある $a' < p$ が存在して、各 $z \in Z$ に対し、 $\text{Tr}^P(z, \xi' \cup \{(y, a')\})$ となって、(1) が証明された。

(2) $a' < \xi'(x)$ とする。 $\forall a < \xi(x) \exists z \in G_{e-1} [\text{Tr}(z, \xi \cup \{(y, a)\}) \wedge \neg \text{Tr}^P(z, \xi' \cup \{(y, a')\})]$ と仮定して、矛盾を導く。 $Z = \{z \in G_{e-1} : \neg \text{Tr}^P(z, \xi' \cup \{(y, a')\})\}$ とおくと、(1) と同様にして Z は有限集合として存在する。すべての $a < \xi'(x)$ に対し、 $\text{Tr}(z, \xi \cup \{(y, a)\})$ となる $z \in Z$ が存在するから、 $z' = \forall y < x \bigvee_{z \in Z} z \in G_e$ とおけば、 $\text{Tr}(z', \xi)$ 。仮定から $\text{Tr}^P(z', \xi')$ となり、すべての $a' < \xi'(x)$ に対し、 $\text{Tr}^P(z, \xi' \cup \{(y, a')\})$ となる $z \in Z$ が存在することになるが、これは Z の定義と矛盾する。

(3) (1) と同様。

(4) U' を固定する。 $Z = \{z \in G_{e-1} : \neg \text{Tr}^P(z, \xi' \cup \{(Y, U')\})\}$ とし、 $z' = \forall Y \bigvee_{z \in Z} z \in G_e$ とおく。(4) を否定すると、各 U に対して、 $\text{Tr}(z, \xi \cup \{(Y, U)\})$ となる $z \in Z$ が存在するので、 $\text{Tr}(z', \xi)$ 。仮定から $\text{Tr}^P(z', \xi')$ となって、 Z の定義と矛盾する。 $\square$

自己埋め込み定理 4.7. $V = (M, S)$ を WKL₀ の可算超準モデルとし、 $g \in M$ とする。このとき、 g を含む M の接頭部 $I (\neq M)$ が存在し、 V と $V \upharpoonright I = (I, S \upharpoonright I)$ の間には V_g の要素を移かさない同型写像 f がある。

(証明) $g \in M$ に対し, $M_g = \{a \in M : M \models a < g\}$, $S_g = \{X \cap M_g : X \in S\}$ とおき, $V_g = (M_g, S_g)$ と定義した. V においては, M_g も S_g も有限集合だから, それらの要素をすべて異なる変数に割当てるような評価関数 ε_0 が考えられる. 次に, 超自然数 $e \in M$ を一つ選んで固定する. 補題 4.4 から, ある $p \in M$ が存在して, ε_0 で評価される G_e 式 z について, $Tr(z, \varepsilon_0) \Leftrightarrow Tr^p(z, \varepsilon_0)$.

以下では, 補題 4.6 を繰返し使って (back-and-forth argument), 2つの評価関数列 $\varepsilon_0 \subset \varepsilon_1 \subset \dots \subset \varepsilon_k \subset \dots$ と $\varepsilon'_0 \subset \varepsilon'_1 \subset \dots \subset \varepsilon'_k \subset \dots, k \in \omega$, を作り, 各 $k \in \omega$ について $Ref_{e-k}^p(\varepsilon_k, \varepsilon'_k)$ で, かつ

$$\bigcup_k \text{range}(\varepsilon_k) = V, \quad \bigcup_k \text{range}(\varepsilon'_k) = V \upharpoonright I$$

となるようにする. この作業のため, $M = \{a_i : i \in \omega\}$, $S = \{U_i : i \in \omega\}$ と書く. また, $\varepsilon'_0 = \varepsilon_0$ とする.

Case 1: $e-k = 4d+1$. a を $\text{range}(\varepsilon_k)$ に含まれない M の最初の要素 a_i とし, $a' < p$ を補題 4.6 で与えられるものとする. そして, $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k \cup \{(y, a)\}$, $\varepsilon'_{k+1} = \varepsilon'_k \cup \{(y, a')\}$ とおく.

Case 2: $e-k = 4d+2$. $\varepsilon'_k(x)$ の最大値を $\varepsilon'_k(x_0)$ とする. a' を $\text{range}(\varepsilon'_k)$ に含まれず $a' < \varepsilon'_k(x_0)$ となる M の最初の要素 a_i とし, a は補題 4.6 で与えられるものとして, $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k \cup \{(y, a)\}$, $\varepsilon'_{k+1} = \varepsilon'_k \cup \{(y, a')\}$ とおく.

Case 3: $e-k = 4d+3$. $\text{range}(\varepsilon_k)$ に属する各集合とは $\text{range}(\varepsilon_k)$ に属する数のどれかによって異なる最初の $U_i \in S$ を U とする.

補題 4.6 で与えられる U' を 1 つ選んで, $\xi_{k+1} = \xi_k \cup \{(Y, U)\}$,
 $\xi'_{k+1} = \xi'_k \cup \{(Y, U')\}$ とおく.

Case 4: $e-k = 4d+4$. U' は, $\text{range}(\xi'_k)$ に属する各集合に対し,
 $\text{range}(\xi'_k)$ に属するどれかの数において異なるような最初の
 $U_i \in S$ である. そして, 補題 4.6 の U に対し, $\xi_{k+1} = \xi_k \cup$
 $\{(Y, U)\}$, $\xi'_{k+1} = \xi'_k \cup \{(Y, U')\}$ とおく.

上の構成から, 各 $k \in \omega$ について, $\text{Ref}_{e-k}^p(\xi_k, \xi'_k)$ となるの
 は明らか. また, Case 1 より $M \subseteq \bigcup_k \text{range}(\xi_k)$ も明らか. 次に,
 $S \subseteq \bigcup_k \text{range}(\xi_k)$ を示そう. $U_i \notin \bigcup_k \text{range}(\xi_k)$ が存在するとして,
 U_i をそのようなもので, index i が最小のものとする. いま,
 k を十分大きくすれば, 各 $j < i$ について, U_i と U_j は $\text{range}(\xi_k)$
 の数の上で異なり, かつ $U_j \in \text{range}(\xi_k)$ となる. このとき,
 $\text{range}(\xi_k)$ の上で U_i と一致するような U_l , $l > k$, がすでに range
 (ξ_k) に属していることはありえない. なぜなら, U_l を選んだ
 とき, それより index の小さな U_l が選べるはずであるから.

従って, Case 3 より $\xi_{k+1} = \xi_k \cup \{(Y, U_i)\}$, つまり $U_i \in \bigcup_k \text{range}(\xi_k)$ となり矛盾.
 以上から, $\bigcup_k \text{range}(\xi_k) = V$ である.

次に, $I = \{a' \in M : a' \in \bigcup_k \text{range}(\xi'_k)\}$ とおくと, Case 2 より I は
 M の接頭部になる. Case 4 より $\bigcup_k \text{range}(\xi'_k) = V \cap I$ を示すのは,
 上の Case 3 の場合と同様である.

最後に, V と $V \cap I$ の間の同型写像 f を定義する. その前に,

各 k について, $\varepsilon_k, \varepsilon'_k$ が単射になることをみる。まず, $\varepsilon_0 = \varepsilon'_0$ は単射である。Case 1 では, 最初に単射 ε_k を単射 ε_{k+1} に拡張し, 単射 ε'_k に対しては $\text{Ref}_{e-k-1}^p(\varepsilon_{k+1}, \varepsilon'_{k+1})$ を満たす写像 ε'_{k+1} がとられた。このとき, ε_{k+1} が単射であることは G_0 式で表わせるので, その式は ε'_{k+1} についても成立し, 結局 ε'_{k+1} も単射になる。他のケースも同様にしていえ, $\varepsilon_k, \varepsilon'_k$ はすべて単射である。従って, $\bigcup_k \varepsilon_k, \bigcup_k \varepsilon'_k$ も単射となり, $f = (\bigcup_k \varepsilon'_k) \circ (\bigcup_k \varepsilon_k)^{-1}$ は V から V/I の上の全単射になっている。 f が V_0 上で恒等写像になっているのは明らか。すべての k について $\text{Ref}_0^p(\varepsilon_k, \varepsilon'_k)$ だから, f が同型写像になることも直ちにいえる。 $\square$

§5. PRA について

PRA は, すべての原始帰納的関数 (の定義) に対して関数記号を持ち, その定義式を公理として持つ. その他に, 帰納法に関する公理または推論規則が付け加わり, それによりいくつかのバリエーションがある. §3 では Σ_0^0 -ind をもったが, 量化詞なし (quantifier free, g.f. と略す) の式についての induction axiom 或は rule を仮定しても証明能力は変わらない. Σ_0^0 式は prim. rec. 関数を表わしているので, PRA で (g.f. ind. rule に基づくものでも) 原子式と同値になるからである. (厳密な証明はとても複雑である. (Girard の本 (Proof Theory and Logical Complexity) の pp. 67-8, p. 81, pp. 123-5 などと参照) また, g.f. ind. axiom を g.f. 式で表わすことも可能で, 従って PRA は g.f. axiom だけで定義できる. このことは, PRA のモデルのクラスが substructure に関して閉じていることからモデル論的にも証明できる.

定理 5.1. $R(x, y)$ を g.f. 式として, $\text{PRA} \vdash \forall x \exists y R(x, y)$ ならば,
prim. rec. 関数 f が存在して, $\text{PRA} \vdash \forall x R(x, f(x))$.

(証明) PRA は g.f. axiom だけで定義できるから, Herbrand の定理により, prim. rec. 関数 $f_1, \dots, f_n$ が存在して,

$$\text{PRA} \vdash R(x, f_1(x)) \vee R(x, f_2(x)) \vee \dots \vee R(x, f_n(x)).$$

$F(x) = \max \{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$ とし, $f(x) = \mu y \leq F(x) R(x, y)$ とおけば,

$$\text{PRA} \vdash \forall x R(x, f(x)).$$

□

定理5.1のPRAを IZ_1 に置き換えた命題はParsonの定理として知られる。Parsonの定理は、定理5.1とFriedmanの定理3.4から導けるが、Parsonの証明はFriedmanとは独立である。また、Friedmanの定理が、Parsonの定理とHarringtonの定理2.7から導けることも注目したい。

定理5.2. $PRA \vdash \Sigma_1^0\text{-ind. rule}$. すなわち、 $\varphi(x)$ を Σ_1^0 式として、 $PRA \vdash \varphi(0) \wedge \forall x (\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1))$ ならば $PRA \vdash \forall x \varphi(x)$.

(証明) $R(x, y)$ をg.f.式とし、 $PRA \vdash \exists y R(0, y) \wedge \forall x (\exists y R(x, y) \rightarrow \exists y R(x+1, y))$ と仮定する。 $\forall x (\exists y R(x, y) \rightarrow \exists y R(x+1, y))$ ならば $\forall x \forall y \exists y' (R(x, y) \rightarrow R(x+1, y'))$. 定理5.1より、prim. rec. f があって、

$$PRA \vdash R(x, y) \rightarrow R(x+1, f(x, y)).$$

いま、 $PRA \vdash R(0, a)$ とし、

$$\begin{cases} g(0) = a \\ g(x+1) = f(x, g(x)) \end{cases}$$

と定義すれば、

$$PRA \vdash \forall x R(x, g(x)) \quad \therefore PRA \vdash \forall x \exists y R(x, y) \quad \square$$

定理5.3. $PRA \vdash \Sigma_1^0\text{-ind.}$

(証明) 補題3.3の注のように J を定義する。すなわち、non-standard $c \in J$ が prim. rec. 関数で閉じた最小の cut である。 $\{g_n\}$ を命題3.1の証明で作った prim. rec. 関数の列として、 $B(x, y, z) \leftrightarrow g_x(y) \leq z$

とおくと, $J \models \sim \exists y B(c, c, y)$. $J \models \Sigma_1^0\text{-ind}$ とすれば, $J \models \sim \exists y B(a, c, y)$ となる最小の a があり, よって $J \models \exists y B(a-1, c, y)$, つまりある standard n について $g_{a-1}(c) < g_n(c)$ となることを意味する。 a は non-standard だから $a-1$ も non-standard となり, これはありえない。従って, $J \not\models \Sigma_1^0\text{-ind}$ 。故に, $\text{PRA} \not\models \Sigma_1^0\text{-ind}$ 。

□

注: Aczel 他編の Proof Theory (Cambridge Univ. Press, 1992) に載っている Wainer-Wallen の論文と Pohlers の論文に, $\Sigma_1^0\text{-ind. rule}$ の Π_2^0 -Skolem 関数が prim. rec. になることの証明がある。

§6. 補遺, 訂正

1. 定義 0.3 の基本算術公理に " $0+1=1$ " を加える.
2. §1 のまとめのダイアグラム (p.138) に 次の関係を加える.

$$WKL_0 \equiv \Sigma_1^0\text{-}SP_0 \equiv \Pi_1^0\text{-}AC_0 \equiv \Pi_1^0\text{-}DC_0.$$

(証) $\Sigma_1^0\text{-}SP_0 \subseteq \Pi_1^0\text{-}AC_0 \subseteq \Pi_1^0\text{-}DC_0$ は, 補題 1.2 と同様に証明できる. あとは, $WKL_0 \vdash (\Pi_1^0\text{-}DC)$ をいえばよい. $\varphi(x, X, Y)$ を任意の Π_1^0 式とし, $\forall x \forall X \exists Y \varphi(x, X, Y)$ を仮定する. $\exists Z \forall x < m \varphi(x, (Z)_x, (Z)_{x+1})$ が任意の m について成立することを帰納法で示す. WKL_0 でこの式は Π_1^0 式と同値になることがいえるので, 必要な帰納法は $\Pi_1^0\text{-}ind$ であり, WKL_0 で証明が遂行できる. 最後にコンパクト性を用いて, $\exists Z \forall x \varphi(x, (Z)_x, (Z)_{x+1})$ がいえるので, $WKL_0 \vdash (\Pi_1^0\text{-}DC)$ となる. $\square$

3. §3 の前書き (p.147) で, 上から 10 行目の " $\Sigma_1^0 ind$ " は " $\Sigma_1^0 ind. rule$ " に直す. 下から 3 行目の () の中に, "1977" を入れる.