

非負曲率等質空間への安定離散写像の非存在

東京理科大学・梶ヶ谷徹¹

Toru Kajigaya

Department of Mathematics, Faculty of Science,
Tokyo University of Science

1. イントロダクションと主結果

(X, m_E) を重み付き有限グラフ, (M, g) を滑らかなコンパクトリーマン多様体とする. 以下, 区分的に C^2 級の写像 $f: X \rightarrow M$ を考え, 単に**離散写像**と呼ぶことにする. 例えば, 曲面上の三角形分割 (あるいは多角形分割) や高次元空間内の網状の図形 (net) と言ったものを実現する写像である. 離散写像 $f: (X, m_E) \rightarrow (M, g)$ に対し, その**(重み付き)長さ** $\mathbf{L}(f)$ および**エネルギー** $\mathbf{E}(f)$ を

$$\mathbf{L}(f) := \sum_{e \in E} m_E(e) \int_0^1 \|\dot{f}_e\|_g dt, \quad \mathbf{E}(f) := \frac{1}{2} \sum_{e \in E} m_E(e) \int_0^1 \|\dot{f}_e\|_g^2 dt,$$

と定義する². ここで, E は (向きのついた) 辺全体の集合で, $f_e = f|_e$, $\dot{f}_e = df_e/dt$ である (なお, e を閉区間 $[0, 1]$ と同一視している). これは, 閉曲線に対する長さおよびエネルギー汎関数の自然な拡張であって, 従ってまた, 汎関数 $\mathbf{L}$ と $\mathbf{E}$ の臨界点として現れる写像は, **閉測地線**の一般化とみなせる.

エネルギー汎関数 $\mathbf{E}$ の臨界点は, **離散調和写像**と呼ばれ, Colin de Verdière [6] によって曲面上の測地線による三角形分割を考えるために導入された. 一般次元の平坦トーラス T^n への離散調和写像は小谷-砂田によって深く研究されていて, 特に「標準実現」と呼ばれる T^n への特別な離散調和写像の存在が適切な条件のもとで示され ([16]), また最近, 一般の種数の双曲閉曲面への標準実現の存在 (と一意性) も筆者と田中亮吉氏によって証明されている ([14]). 概して標準実現は, 対称性を持つグラフの実現を与え, この意味でグラフの1つの“良い”実現の仕方を与える. 他にも離散調和写像はいろいろな文脈で現れ, 興味深い研究がいくつもある.

長さ汎関数 $\mathbf{L}$ に関する臨界点もよく研究されていて, その臨界点であってかつはめ込み³となるものは, “stationary geodesic net” とか “minimal geodesic net” などと呼ばれている. 例えば, 一般のコンパクトリーマン多様体内の stationary geodesic net の存在定理は, Liokumovich-Staffa [18] や Nabutovsky-Rotman [20] らによって与えられている. 本稿では, $\mathbf{L}$ の臨界点であってはめ込みとなる写像のことを**離散極小はめ込み**と呼ぶことにする. なお, 重み関数 m_E を固定している限りは, 一般に $\mathbf{L}$ の臨界点が $\mathbf{E}$ の臨界点になるとは限らないが, 重み関数の付け替えを許せば, この2つの臨界点たちは実は非常に近い関係にある (第2節を参照)

¹E-mail: kajigaya@rs.tus.ac.jp

日付: 2023年12月17日. RIMS 研究集会「部分多様体論と群作用の幾何」講演予稿.

²この $\mathbf{L}(f)$ の定義だと, 各辺 e の長さ $|e|$ と逆向きの辺 $\bar{e}$ の長さ $|\bar{e}|$ を重複して足していることになっているが, $\mathbf{L}$ と $\mathbf{E}$ をまとめて扱うにはこの定義の方が都合が良いので, あえてそうしてある.

³離散写像 f がはめ込みであるとは各辺 $e \in E$ に対し, f_e がはめ込みとなるものを言う. $\mathbf{L}$ の臨界点を特徴づけるには, はめ込みという条件がある方が都合が良い. 一方で, 離散調和写像ははめ込みである必要はない.

ターゲットのリーマン多様体 (M, g) の断面曲率が「非正」である場合, そのような M の中への任意の離散調和写像は, そのホモトピー類の中でエネルギーを最小化することが知られている (cf. [6, 16]). 一方で, (M, g) の断面曲率が非正とは限らない場合, 状況は異なる. 例えば, 古典的な Synge の定理によれば, (M, g) が正の断面曲率を持つ偶数次元の向き付け可能な閉リーマン多様体なら, M の中には長さおよびエネルギーを最小化する非自明な閉測地線は存在しない. この事実の帰結として (一般に $\pi_1(M)$ の非自明な元は長さあるいはエネルギーを最小化する閉測地線を含むから) そのような M は単連結であることも従う.

M が単連結の場合, M の中への任意の離散写像は定値写像にホモトピックになるので, ホモトピー類の中では汎関数 $F = L$ あるいは E を最小化する非自明な写像は存在しないが, 「与えられた離散写像が汎関数 F に対して極小値を取り得るか?」と言う問題は非自明な問題である. F の臨界点 f は, $f = f_0$ の任意の区分的に滑らかな変形 $\{f_s\}_s \in (-\epsilon, \epsilon)$ に対し, $d^2F(f_s)/ds^2|_{s=0} \geq 0$ を満たすとき, **安定**と呼ぶ. 定義から, F の極小値を取る写像は, 安定写像である.

Synge の定理の証明を見直せば, (M, g) が正の断面曲率を持つ偶数次元の向き付け可能な閉多様体ならば, M の中には安定な閉測地線でさえも存在しないことが分かる. 一方で, このような非存在は奇数次元多様体では成立しないということも知られていて, 実際, ある Berger 球面 S^{2n+1} の中には安定な閉測地線が存在する ([32, 33]). ここで Berger 球面は正の断面曲率を持つ単連結等質多様体であることに注意しておく.

さらに最近, Cheng[7] は, $\mathbb{R}^{n+1} (n \geq 2)$ 内に「正の断面曲率を持ち, かつ S^n と同相な, ある凸超曲面 M であって, 長さ汎関数に関して安定なブーケットグラフを含むものが存在する」という興味深い結果を示した. 従って特に, 対象を閉曲線から離散写像に拡張すると, (M, g) が Synge の定理と同じ仮定を満たすリーマン多様体であったとしても, その中への安定な離散写像の非存在は一般には成立しない.

このような(複雑な)状況の中で, 「与えられた単連結かつ正あるいは非負の曲率を持つコンパクトリーマン多様体 (M, g) に対し, その中への安定な離散写像が存在するか?」と問うことは自然である. この問いに対して, 論文[13]において, まず次の非存在定理を示した.

定理 1.1 ([13]). (M, J, g) を単連結なコンパクト等質ケーラー多様体であって正の正則断面曲率を持つものとする. このとき, 重み付き有限グラフ (X, m_E) から (M, g) への安定な離散極小はめ込みおよび非自明な安定離散調和写像は存在しない.

この定理の仮定を満たす典型的な例はコンパクトエルミート対称空間である. また, 単連結なコンパクト等質ケーラー多様体は, ケーラー C 空間とも呼ばれ, 複素多様体としてはあるコンパクトリー群の随伴軌道に標準的な複素構造を定義したものとして得られることが知られているが, 定理 1.1 はその上の任意の正の正則断面曲率を持つケーラー計量に対して成立することに注意する. 実はケーラー C 空間はいつでも正の正則断面曲率を持つであろうと予想されていて, エルミート対称空間以外にも, 伊藤[12]や Lohove[19]によって, いくつかのケーラー C 空間でこの予想が確かめられている.

これとは別に, 非負曲率を持つもう1つの自然な空間のクラスであるコンパクトリーマン対称空間に対しても, 部分的に非存在定理を示した.

定理 1.2 ([13]). (M, g) を単連結かつ既約なコンパクトリーマン対称空間とする.

- (1) M が強不安定なリーマン対称空間, エルミート対称空間, または $\text{rank } M \leq 3$ かつ $M \neq SO(q+3)/SO(q) \times SO(3)$ ($q \geq 4$) のいずれかのとき, 重み付き有限グラフ (X, m_E) から (M, g) への安定な離散極小はめ込みは存在しない.
- (2) M が強不安定なリーマン対称空間, エルミート対称空間または例外型リー群 G_2 のいずれかのとき, 重み付き有限グラフ (X, m_E) から (M, g) への非自明な安定離散調和写像は存在しない.

(M, g) が強不安定 (strongly unstable) であることの定義は3節を参照して頂きたい. (M, g) が強不安定ならば, 任意の滑らかなコンパクトリーマン多様体 (N, h) から (M, g) への安定な調和写像すらも存在しない. また, 強不安定な単連結既約コンパクト型リーマン対称空間は, Howard-Wei[11] および大仁田[23] による完全な分類がある.

同様の非存在定理は, 任意の単連結かつ既約コンパクトリーマン対称空間に対して成り立つと予想しているが, 今回用いた方法では一般の証明は難しく, 残された問題となっている.

本稿は次の構成からなる. 第2節では, 離散極小はめ込みと離散調和写像についての基本的な事項を簡潔にまとめる. 第3節では, 主定理の証明の基本的なアイデアである「平均化の方法」について大まかに説明し, 平均化の方法により得られる滑らかな極小部分多様体や調和写像の不安定性に関するいくつかの先行研究について紹介する. 第4節で, 主定理の証明の概略を述べる.

2. 離散極小はめ込みと離散調和写像

この節では, 離散極小はめ込みおよび離散調和写像に関する基本的な事項についてまとめる. 詳細は[13, 16]などを参照して頂きたい.

以下, $X = (V, E)$ を有限グラフとする (正確な定義は[16]を参照). ここで V は頂点の集合, E は向き付けられた辺の集合である. E 上の**重み関数** $m_E : E \rightarrow \mathbb{R}$ とは E 上の正値関数であって, $m_E(e) = m_E(\bar{e})$ (ここで $\bar{e}$ は e の逆向きの辺) が成り立つものとする. 組 (X, m_E) のことを**重み付き有限グラフ**と呼ぶ. また, $f : (X, m_E) \rightarrow (M, g)$ を重み付き有限グラフから (コンパクト) リーマン多様体への区分的に C^2 級の離散写像とする. (M, g) の Levi-Civita 接続を ∇ , 曲率テンソルを R とかく.

2.1. 臨界点の特徴付け

まず, 長さ汎関数 $\mathbf{L}$ とエネルギー汎関数 $\mathbf{E}$ をまとめて扱うために, 自然数 p に対して次の汎関数を用意しておく:

$$\mathbf{E}^p(f) := \frac{1}{p} \sum_{e \in E} m_E(e) \int_0^1 \|\dot{f}_e\|_g^p dt.$$

$p = 1$ の場合 (つまり長さ汎関数の場合) のみ, 技術的に, f がはめ込みであるという仮定をつければ, $\mathbf{E}^p$ の臨界点は次のような特徴付けを持つ.

命題 2.1 (cf. [13]). $f : (X, m_E) \rightarrow (M, g)$ を離散写像とする. 以下, $T_e := \dot{f}_e$ と書く.

- (1) f がはめ込みであると仮定する. このとき, f が $\mathbf{E}^1 = \mathbf{L}$ の臨界点であるための必要十分条件は, 以下の2条件を満たすことである.

- (i) 各 $e \in E$ に対して, $f_e : [0, 1] \rightarrow (M, g)$ は $(\nabla_{T_e} T_e)^{\perp_e} = 0$ を満たす. ここで $\perp_e$ は f_e に沿った法方向への射影を表す. これは f_e の像が測地線の一部に含まれることを意味する.
- (ii) X の各頂点 x において, 次が成り立つ.

$$\sum_{e \in E_x} m_E(e) \|T_e\|^{-1} T_e(x) = 0.$$

ここで, E_x は x を始点とする辺の集合である.

- (2) $p \geq 2$ とする (この場合 f ははめ込みである必要はない). このとき, $f : (X, m_E) \rightarrow (M, g)$ が $\mathbf{E}^p$ の臨界点であるための必要十分条件は, 以下の2条件を満たすことである.

- (i) 各 $e \in E$ に対して, $f_e : [0, 1] \rightarrow (M, g)$ は測地写像, つまり $\nabla_{T_e} T_e = 0$ を満たす.
- (ii) X の各頂点 x において, 次が成り立つ.

$$\sum_{e \in E_x} m_E(e) \|T_e\|^{p-2} T_e(x) = 0.$$

いずれの場合も, 条件 (ii) を **平衡条件** と呼ぶことにする.

(1) の条件 (i), (ii) を満たす離散はめ込みを **離散極小はめ込み** と呼び, (2) の条件 (i), (ii) を満たす離散写像を **離散 p -調和写像** と呼ぶことにする ($p = 2$ のときが通常の離散調和写像である).

条件 (i) の違いが分かりづらいが, (1) では f_e のパラメーター t が弧長パラメーターに比例する必要はない⁴. しかし, (1) の場合でも, 適当にパラメーターを取り替えれば, (長さを変えずに) f_e を測地線にすることができるので, 以下では簡単のため, 各 $e \in E$ に対し, $f_e : [0, 1] \rightarrow (M, g)$ は測地線であると仮定する.

各 f_e が測地写像であったとしても, 平衡条件の違いにより, 離散極小はめ込み $f : (X, m_E) \rightarrow (M, g)$ が離散 p -調和写像であるとは限らない (その逆もまたそうである). しかし, $f : (X, m_E) \rightarrow (M, g)$ を各 f_e が測地線となる離散極小はめ込みとすると, $f^p : (X, m_E^p) \rightarrow (M, g)$ を

$$f^p := f, \quad m_E^p(e) := m_E(e) \|T_e\|^{1-p}$$

と定めれば, f^p は命題 2.1 の (2) の性質を満たし, 従って離散 p -調和写像になる (逆に f が離散 p -調和写像でかつはめ込みとなるものを与えれば, 重みの付け替えによって離散極小はめ込みを得る). つまり, 重み関数の付け替えを許すなら, $f : X \rightarrow M$ は離散極小はめ込みとも離散 p -調和はめ込みとも思える.

離散調和写像 ($p = 2$) の場合には次の存在定理が知られている.

⁴ この違いは, 長さ $\mathbf{L}$ がパラメーターの取り方によらずに定まる量であるのに対して, エネルギー $\mathbf{E}^p$ ($p \geq 2$) はパラメーターの取り方にも依存する量であることに起因する. このような違いは証明においても技術的な違いとなって現れる.

定理 2.2 ([6, 16]). (M, g) をコンパクトなリーマン多様体とし, $f : (X, m_E) \rightarrow (M, g)$ を重み付き有限グラフからの任意の離散写像とする. このとき, f のホモトピー類 $\mathcal{C} = [f]$ の中に少なくとも 1 つ離散調和写像が存在する.

この定理で存在が保証される $\mathcal{C}$ に含まれる離散調和写像ははめ込みとは限らないことに注意する (例えば, 退化する辺, つまり f_e が定値写像になる辺 e を許す).

もしさらに (M, g) の断面曲率が至るところ負なら, $\mathcal{C}$ に含まれる離散調和写像は写像として一意であることも証明できる ([6, 16]). 一方で, (M, g) の断面曲率が非負の場合には, 必ずしも $\mathcal{C}$ における一意性は成立しない (ただし (M, g) が平坦トーラスであれば, 平行移動の違いを除き, $\mathcal{C}$ において一意であることは証明できる).

この他, 離散極小はめ込みの存在についての結果は [17, 20], 離散調和写像のより具体的な例については [13, 14, 16] などを参照して頂きたい.

2.2. 第二変分公式

この節では常に $f : (X, m_E) \rightarrow (M, g)$ を離散極小はめ込み ($p = 1$) または離散 p -調和写像 ($p \geq 2$) とする. ただし, 簡単のため, $p = 1$ のときは f_e が測地線であると追加で仮定しておく.

f の Hessian を

$$\text{Hess}_f^p(V, V) := \left. \frac{d^2 \mathbf{E}^p(f_s)}{ds^2} \right|_{s=0}$$

と書く. ここで $V \in \Gamma(f^{-1}TM)$ は $f = f_0$ の変形 $\{f_s\}_{s \in (-\epsilon, \epsilon)}$ から定まる変形ベクトル場である. f が安定であるとは, $\text{Hess}_f^p \geq 0$ となることとして定義する.

直接計算により, ヘシアンは次の形で与えられる.

$$\begin{aligned} \text{Hess}_f^p(V, V) = \sum_{e \in E} m_E(e) \int_0^1 \left\{ \|\nabla_{T_e} V_e\|^2 - g(R(V_e, T_e)T_e, V_e) \right. \\ \left. + (p-2) \|(\nabla_{T_e} V_e)^{\top_e}\|^2 \right\} \|T_e\|^{p-2} dt. \end{aligned}$$

特に次の事実がすぐに従う.

命題 2.3. もし, (M, g) の断面曲率が非正ならば, (M, g) への任意の離散極小はめ込みおよび離散 p -調和写像は安定である.

離散調和写像 ($p = 2$) の場合は, より強いことが知られていて, 「 (M, g) の断面曲率が非正なら, (M, g) への任意の離散調和写像はそのホモトピー類の中でエネルギー最小」になる (cf. [6, 16]). 例えば, (M, g) が平坦トーラスや双曲閉曲面が典型的な例を与えるが, これらの例の場合にはさらに「標準実現」と呼ばれる特別な離散調和写像の存在が知られている (詳しくは [14, 16] を参照して頂きたい).

一方で, (M, g) の断面曲率が「非正」とは限らない場合, 離散写像の安定性は全く非自明な問題になる. 以下では常に, そのような状況を想定する.

部分積分を使えば, ヘシアンは次のように書き直せることに注意しておく.

$$\text{Hess}_f^p(V, W) = \sum_{e \in E} m_E(e) \int_0^1 g(\mathcal{J}_{f,e}^p(V_e), W_e) dt + 2 \sum_{x \in V} \sum_{e \in E_x} m_E(e) g(\mathcal{B}_{f,e}^p(V_e), W_e)_x.$$

ここで, $\mathcal{J}_{f,e}^p$ および $\mathcal{B}_{f,e}^p$ は次で定義される.

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{f,e}^p(V_e) &:= \{-\nabla_{T_e} \nabla_{T_e} V_e - R(V_e, T_e)T_e - (p-2)(\nabla_{T_e} \nabla_{T_e} V_e)^{\top_e}\} \|T_e\|^{p-2}. \\ \mathcal{B}_{f,e}^p(V_e) &:= \{-\nabla_{T_e} V_e - (p-2)(\nabla_{T_e} V_e)^{\top_e}\} \|T_e\|^{p-2}.\end{aligned}$$

例えば $p=2$ の場合, $\mathcal{J}_{f,e}^2$ は $f_e: [0, 1] \rightarrow (M, g)$ に対する通常のヤコビ作用素に他ならない. しかし, 滑らかな場合とは異なり, 離散写像の場合, ヤコビ作用素自体が各辺に依存しているのに加えて, 境界(各頂点)にも依存する項がヘシアンの中に現れることに注意しておく. このような形のヘシアンをどのようにして解析するかという問題は非常に興味深い問題である.

この点に関して, $p=2$ の場合に限っては, 次の合理的なベクトル場のクラスがあることに注意しておく. 離散調和写像 $f: (X, m_E) \rightarrow (M, g)$ に対して,

$$\Gamma_{bal}(f^{-1}TM) := \left\{ V \in \Gamma(f^{-1}TM) \mid \sum_{e \in E_x} m_E(e) \nabla_{T_e} V_e(x) = 0 \text{ for any vertex } x \right\}.$$

とおく. 幾何学的には, $\Gamma_{bal}(f^{-1}TM)$ は, X から M への区分的に滑らかな離散写像であって, $p=2$ の場合の平衡条件を満たすもの全体のなすバナッハ空間の, f における接空間とみなせるものである (cf. [14]). もし, $V \in \Gamma_{bal}(f^{-1}TM)$ であれば(つまり, 平衡条件を保つような変形を考えるなら), ヘシアンの中の頂点に関する項は消えてしまって,

$$\text{Hess}_f^2(V, V) = \sum_{e \in E} m_E(e) \int_0^1 g(\mathcal{J}_{f,e}^2(V_e), V_e) dt$$

という単純な公式になる. この事実は後で定理 1.1 を証明する際にも大事になる.

3. 平均化による方法

この節では, 本論とは独立に, 体積汎関数やエネルギー汎関数に関する不安定性を証明するためによく用いられる方法(「平均化による方法」とここでは呼ぶ)について大まかに説明する. なお, ロジックの説明なので細かい設定はあえて書かない.

(M, g) を与えられたリーマン多様体とする. この中への写像 $f: X \rightarrow M$ であって考えたい汎関数 $\mathbf{F}$ の臨界点になるものを取り, f の Hessian を

$$\text{Hess}_f(V, V) := \left. \frac{d^2 \mathbf{F}(f_s)}{ds^2} \right|_{s=0}$$

と書く. ここで V は $f = f_0$ の変形 $\{f_s\}_{s \in (-\epsilon, \epsilon)}$ から定まる変形ベクトル場である. f が安定であるとは, $\text{Hess}_f \geq 0$ となることを言う. 従って, 不安定であることを示すには, 何か1つでも $\text{Hess}_f(V, V) < 0$ となる V を見つければ良いのだが, そのような V を具体的に構成することは一般には難しい. そこで, 適当な有限次元の内積空間 $\mathcal{V}$ と f に沿うベクトル場の集合 $\Gamma(f^{-1}TM)$ への線型写像

$$\varphi: \mathcal{V} \rightarrow \Gamma(f^{-1}TM)$$

をうまく作り, $\mathcal{V}$ 上の二次形式

$$q_f(v, v) := \text{Hess}_f(\varphi(v), \varphi(v))$$

を考えて, この二次形式の $\mathcal{V}$ 上でのトレース $\text{Tr} q_f$ を計算する. このとき, その値によって次の3つの場合に分かれる:

- (i) $\text{Tr}q_f < 0$ のとき: ある $V = \varphi(v)$ であって, $\text{Hess}_f(V, V) < 0$ となるので不安定性が直ちに従う.
- (ii) $\text{Tr}q_f = 0$ のとき: $q_f(v, v) = 0$ ($\forall v \in \mathcal{V}$) でない限り不安定である. $q_f(v, v) = 0$ ($\forall v \in \mathcal{V}$) であってかつ f が安定であると仮定すれば, $\text{Hess}_f \geq 0$ ということからコーシー・シュワルツの不等式が適用できて

$$\text{Hess}_f(\varphi(v), W)^2 \leq \text{Hess}_f(\varphi(v), \varphi(v)) \cdot \text{Hess}_f(W, W) = 0$$

となつて, $\text{Hess}_f(\varphi(v), W) = 0$ ($\forall v \in \mathcal{V}, W \in \Gamma(f^{-1}TM)$) が成り立つ. もしさらに適当な微分作用素 (ヤコビ作用素) $\mathcal{J}$ を用いて

$$\text{Hess}_f(V, W) = \int_X \langle \mathcal{J}(V), W \rangle d\mu_X$$

と書けると仮定すれば, 以上のことから結局, f に沿って

$$\mathcal{J}(\varphi(v)) = 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

という恒等式が成立しなくてはならない. これが f が安定であるための障害を与える. 特にもしこの恒等式が満たされなければ, f は不安定と分かる.

- (iii) $\text{Tr}q_f > 0$ のときは安定も不安定も結論づけられない.

この方法は最初, Lawson-Simons [17] が標準球面内の極小部分多様体の不安定性を示す際に用いられた. 平均化の方法を用いることで得られる幾つかの先行結果を紹介しておく. なお, 以下の定理を証明するには, 平均化の方法が1つの鍵になっているが, さらにそれぞれ別の議論を加える必要があることを注意しておく.

最初に紹介する2つの定理は滑らかな調和写像に関する結果である.

定理 3.1 (Howard-Wei [11]). (M^n, g) をイソトロピー既約な n 次元コンパクトリーマン等質空間とする. (M, g) のラプラシアン Δ の第一固有値を λ_1 とする. このとき, 以下の3つは同値である.

- (1) $\lambda_1 < 2\text{scl}(M)/n$.
- (2) 恒等写像 $Id: M \rightarrow M$ はエネルギー汎関数に関して不安定である.
- (3) (M, g) はエネルギー汎関数に関して**強不安定** (strongly unstable) である. つまり次の性質を持つ (cf. [11]):
 - (a) 任意のコンパクトリーマン多様体 (N, h) に対して, (M, g) への非自明な安定調和写像 $f: (N, h) \rightarrow (M, g)$ が存在しない.
 - (b) 任意のコンパクトリーマン多様体 (N, h) に対して, (M, g) からの非自明な安定調和写像 $f: (M, g) \rightarrow (N, h)$ が存在しない.

このような調和写像の「不安定性」が (M, g) の内在的な性質で特徴付けられてしまうと言う事実は面白い.

イソトロピー既約なコンパクトリーマン等質空間の典型例は、単連結既約コンパクト対称空間である。この場合には大仁田 [23] も独立に上の定理を証明している。さらに λ_1 の条件を満たすものを分類することで、強不安定な単連結既約コンパクト対称空間を完全に分類している。以下がそのリストである (Howard-Wei [11] にもリストがあるが不正確である)。

- (1) S^n ($n \geq 3$) (2) ケーリー射影平面 (3) 四元数グラスマン多様体
 (4) $SU(2n)/Sp(n)$ ($n \geq 3$) (5) E_6/F_4 (6) $SU(n)$ ($n \geq 2$)
 (7) $Spin(5)$ (8) $Sp(n)$ ($n \geq 3$)

一方で、強不安定ではない対称空間の典型的な例はエルミート対称空間である。この場合には、 (M, g) への安定な調和写像が存在するが、別の平均化の方法を用いることで、次のことが示せる。

定理 3.2 (Burns-Burstall-Bartolomeis-Rawnsley [5], 大仁田-宇田川 [25]). (M, g) を既約コンパクトエルミート対称空間とする。このとき、閉リーマン面 Σ から (M, g) への安定な調和写像は、正則写像または反正則写像である。

次に紹介する 2 つの定理は極小部分多様体 (あるいは rectifiable current) に関する結果である。

まずはじめに、Lawson-Simons [17] は標準球面 S^n ($n \geq 2$) の中に安定な極小部分多様体が存在しないことを示したが、一般のコンパクトリーマン対称空間に対してはこのような非存在は必ずしも成立せず、安定なものもあれば不安定なものもあり得ることに注意しておく：

例 3.3. 次のものは体積汎関数に関して安定な極小部分多様体の例である。

- コンパクト型エルミート対称空間 (あるいはより一般のコンパクトケーラー多様体) の中の**複素部分多様体**。これはキャリブレート部分多様体 (ホモロジー類内で体積最小) としても知られている。
 さらに実射影空間 $\mathbb{C}P^n$ の場合には安定な極小部分多様体は複素部分多様体に限る (Lawson-Simons [17])。
- コンパクト型エルミート対称空間内の単連結な**実形** (全測地的なラグランジュ部分多様体)。さらに既約エルミート対称空間の実形が安定になるのは単連結のときに限る (竹内 [30])。
- 実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ 内の全測地的 $\mathbb{R}P^p$, 四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ 内の全測地的 $\mathbb{H}P^{4l}$, ケーリー射影平面 $\mathbb{O}P^2$ 内の全測地的ケーリー射影直線 $\mathbb{O}P^1 = S^8$ 。
 さらに、 $M \neq S^n, \mathbb{C}P^n$ の場合の階数 1 コンパクトリーマン対称空間 $\mathbb{R}P^n, \mathbb{H}P^n, \mathbb{O}P^2$ 内の安定極小部分多様体は以上のものに限る (大仁田 [22])。
- ($\mathbb{R}P^n$ 以外の) 既約コンパクト型リーマン対称空間 M 内の余次元 1 以上の**Helgason 球面** (大仁田 [24])。ここで、Helgason 球面とは、 M 内の全測地的部分多様体であって、断面曲率一定かつその値が M の断面曲率の最大値に一致するようなもののうち、最大次元のもの (M 自身でもよい) のことを言う。このようなものは常に存在し合同の違いを除き一意である。また、 $M \neq \mathbb{R}P^n$ の場合は球面に同相に

なる (Helgason [10]).

さらに M がリー群のときには, Helgason 球面はそのホモロジー類内で体積最小であることも示されている (田崎 [29]).

このような複雑な状況の中で「与えられたコンパクトリーマン対称空間内の安定な極小部分多様体を分類せよ」と言う問題は面白い問題である. この問題に関連して, 定理 3.1 と同様の平均化の方法を用いることにより, 次の非存在定理が証明されている.

定理 3.4 (K. [13], 大仁田 [24]). (M, g) を以下のいずれかの単連結既約コンパクト対称空間とする.

- (1) S^n (2) ケーリー射影平面 $\mathbb{O}P^2$ (3) 四元数グラスマン多様体 (4) $Sp(n)$
- (5) $SU(3)/SO(3)$ (6) $SU(3)$ (7) $SU(6)/Sp(3)$ (8) E_6/F_4 (9) $G_2/SO(4)$
- (10) エルミート対称空間.

$\dim M = n$, M に含まれる Helgason 球面の次元を m とする. このとき, $1 \leq p \leq m-1$ または $n-m+1 \leq p \leq n-1$ を満たす自然数 p に対し, 安定な rectifiable p -current は存在しない.

なお, Helgason 球面の次元 m はそれぞれ具体的に決定されている (cf. [24]). また, [24] では「同じ主張は任意の単連結既約コンパクト対称空間でも成り立つだろう」と予想されている⁵. また, 単連結でない場合にはこのような非存在は成立しない ($\pi_1(M)$ の非自明な元が長さを最小化する閉測地線を含む).

一般に極小部分多様体のヤコビ作用素 $\mathcal{J}$ の負の固有値の数を重複度込みで数えたものを極小部分多様体の**指数**と言う. おおよそ指数は不安定性の度合いを測っているものだが, 超曲面の場合には, 「リッチ曲率正のコンパクトリーマン多様体 M 内の任意の極小閉超曲面 Σ に対して, その指数を Σ の第一ベッチ数 $b_1(\Sigma)$ の定数倍によって下から評価できるだろう」と言う Schoen-Marques-Neves の予想がある. この予想に対して最近, Ros [26] と Savo [27] による平均化の方法を一般化する形で, 次の結果が示されている.

定理 3.5 (Ambrozio-Carlloto-Sharp [2], Gorodski-Mendes-Radeschi [9]). (M, g) を次のいずれかのコンパクト対称空間とする.

- (1) 階数 1 コンパクト対称空間 ($S^n, \mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n, \mathbb{H}P^n, \mathbb{O}P^2$)
- (2) 四元数グラスマン多様体 (3) $Sp(n)$ (4) $SU(n)$ ($n \leq 17$).

また, Σ を (M, g) に埋め込まれた極小閉超曲面とする. Σ のヤコビ作用素 $\mathcal{J}$ の指数を $\text{ind}(\Sigma)$, 第一ベッチ数を $b_1(\Sigma)$ と書く. このとき, M の次元にのみ依存するある定数 C が存在して,

$$\text{ind}(\Sigma) \geq C b_1(\Sigma)$$

が成り立つ.

⁵ 定理 3.4 における筆者の貢献は (9) $G_2/SO(4)$ の場合を示したことだけであるが, その証明だけでも緻密な計算が必要になる. その証明は, 定理 1.2 を $G_2/SO(4)$ の場合に証明する際の計算を援用することで得られる (詳しくは [13] を参照して頂きたい).

この他にも、この定理の主張はいくつかの等径超曲面とその焦部分多様体などの場合にも正しいことが確認されている (cf. [2, 9]).

以上の定理の証明の中で使われている平均化の方法は、枠組みとしては同じだが、それぞれ異なる $\varphi: \mathcal{V} \rightarrow \Gamma(f^{-1}TM)$ の取り方をしていることに注意する (次の節で離散写像に対して具体的な φ の取り方を与える). いずれにしても、この $\varphi: \mathcal{V} \rightarrow \Gamma(f^{-1}TM)$ をうまく取る必要があって、ここで“うまく”と言ったのはおおよそ、「 $\text{Tr} q_f \leq 0$ であることを M の情報だけで決定できる」という意味である. つまり、そのような状況であれば、 M の情報だけで全ての臨界点 f をまとめて議論できることになり、この意味で (うまく φ を見つけることができれば) 強力な方法になり得る.

4. 主定理の証明の概略

以下、定理 1.1 と 1.2 の証明のあらすじについて述べる. いずれの証明も、滑らかな極小部分多様体や調和写像に対して用いられた平均化の方法を離散写像に適用すると言うだけだが、グラフが“1次元”である言う特殊性などを利用して若干改良した点があることに注意しておく. 詳しいことは論文 [13] を参照して頂きたい.

まず、与えられたコンパクトリーマン多様体 (M, g) に対し、考えたいのは以下の性質である.

(N₁) 任意の有限グラフ (X, m_E) に対し、 (X, m_E) から (M, g) への安定離散極小はめ込みは存在しない.

(N_p) 任意の有限グラフ (X, m_E) に対し、 (X, m_E) から (M, g) への非自明な安定離散 p -調和写像は存在しない.

性質 (N₁) および (N_p) をもつコンパクトなリーマン多様体は単連結であることに注意する. また、ヘシアン of 形に注意して見れば、離散写像に対しては次の事実が成り立つことにも注意しておく.

命題 4.1 ([13]). (M, g) が性質 (N_p) を持つならば、 p 以下の全ての p' に対し、性質 (N_{p'}) も成り立つ.

注意 4.2. この逆が成り立つかは分かっていない⁶.

4.1. 定理 1.1 の証明の概略

(M, J, g) を正の正則断面曲率をもつ単連結なコンパクト等質ケーラー多様体とする. 命題 4.1 により、性質 (N₂) を示せば十分である. そこで $f: (X, m_E) \rightarrow (M, g)$ を任意の離散調和写像とし、これに対し、次のようにして平均化の方法を適用する (これは Burstall-Bartolomeis-Rawnsley [5] と大仁田-宇田川 [25] による方法の拡張である).

まず、よく知られている事実として、 M はあるコンパクトリー群 G の随伴軌道として得られ (cf. [4]), g は M 上の G -不変なリーマン計量である. G はコンパクトなので、そのリー環 $\mathfrak{g}$ に適当な $\text{Ad}(G)$ -不変内積を 1 つ定めることができ、その上で線型写像 φ を

$$\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \Gamma(f^{-1}TM), \quad \varphi(v) := Jv^*|_f$$

⁶ 滑らかな多様体間の全測地的な調和写像の場合、ある意味で逆が成立することが知られているが、同じ論理は離散写像では使えない (論文 [13] を参照のこと).

と定める. ここで v^* は v の生成する M 上の基本ベクトル場 (キリングベクトル場), J は M 上の複素構造である. この場合に, $\mathfrak{g}$ 上の二次形式 $q_f(v, v) := \text{Hess}_f(\varphi(v), \varphi(v))$ の $\text{Ad}(G)$ -不変内積に関するトレースを計算する.

次の事実, 離散写像でもこの方法がうまくいくための1つの鍵になっている.

補題 4.3. 任意の $v \in \mathfrak{g}$ に対し, $\varphi(v) \in \Gamma_{\text{bal}}(f^{-1}TM)$.

特に, 第2節で述べたように, 二次形式 q_f は

$$q_f(v, v) = \sum_{e \in E} m_E(e) \int_0^1 g(\mathcal{J}_{f,e}^2(\varphi(v)_e), \varphi(v)_e) dt$$

と言う (頂点に関わる項のない) 単純な形になる. その上でトレースを計算すると, (滑らかな場合 [5, 25] と同様に) 次の非自明な事実が従う.

補題 4.4. 任意の離散調和写像 $f : (X, m_E) \rightarrow (M, g)$ に対し, $\text{Tr} q_f = 0$.

今, f が安定であると仮定する. すると, 前節で述べた議論によって,

$$\mathcal{J}_{f,e}^2(\varphi(v)_e) = -\nabla_{T_e} \nabla_{T_e} Jv_e^* - R(Jv_e^*, T_e)T_e = 0, \quad \forall e \in E, \forall v \in \mathfrak{g}$$

が成り立っていないと分る. ここで, ケーラー性 $\nabla J = 0$ と v^* が M 上のキリング場であることを使えば, この恒等式は, テンソルの恒等的

$$JR(v_e^*, T_e)T_e - R(Jv_e^*, T_e)T_e = 0$$

と同値になる. 特に任意に点 $p \in f(e)$ を固定して, p において $v_e^* = JT_e$ となるように $v \in \mathfrak{g}$ をとれば, $R(JT_e, T_e)T_e = 0$ が得られる. 従ってもし, $T_e(p) \neq 0$ なら $\{T_e, JT_e\}$ に関する正則断面曲率は0であり, これは正の正則断面曲率をもつと仮定したことに反する. よって, 任意の $e \in E$ に対して, $T_e = \dot{f}_e = 0$ となって, f は定値写像であることが従う.

注意 4.5. この方法は $p \geq 3$ の離散 p -調和写像に対しては有効ではない.

4.2. 定理 1.2 の証明の概略

まず, 与えられたリーマン多様体 (M, g) を適当な次元のユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+k}$ に等長的にはめ込み, その上で次のようにして平均化の方法を適用する (これは Lawson-Simons [17], Howard-Wei [11], 大仁田 [23] らの方法の拡張である).

$F : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ を等長的なはめ込みとする. ベクトル $v \in \mathbb{R}^{n+k}$ を1つとり, これを $\mathbb{R}^{n+k}$ 上に平行なベクトル場として拡張する (それもまた v と書く). これを F に沿って M の接平面に射影したものを $v^{\top_F}$ と書く. その上で, 次の線型写像を考える:

$$\varphi_F : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \Gamma(f^{-1}TM), \quad \varphi_F(v) := v^{\top_F}|_f.$$

この φ_F の取り方は等長はめ込み F に依存することに注意する (つまり, F によって異なる平均化の方法があり得る). $\mathbb{R}^{n+k}$ の標準的な内積に関して $q_f^p := \text{Hess}_f^p(\varphi_F(v), \varphi_F(v))$ のトレースを計算すると, 離散写像に対しては, 次の公式を得る.

命題 4.6. (M, g) をコンパクトリーマン多様体とし, M は写像 $F : (M, g) \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ によって $\mathbb{R}^{n+k}$ に等長的にはめ込まれていると仮定する. F の第二基本形式を B , 平均曲率を H とかき, また, M 上の対称 2-テンソルを

$$Q_F(X, Y) := g(H, B(X, Y)) - 2\text{Ric}(X, Y),$$

と定める. ここで Ric は M のリッチテンソルである.

このとき, M への離散極小はめ込み ($p = 1$) または離散 p -調和写像 ($p \geq 2$) $f : (X, m_E) \rightarrow (M, g)$ に対し

$$\text{Tr} q_f^p = \sum_{e \in E \setminus E_{deg}} m_E(e) \int_0^1 \{Q_F(T_e, T_e) + (p-2)\|B(\tilde{T}_e, \tilde{T}_e)\|^2\|T_e\|^2\} \|T_e\|^{p-2} dt,$$

が成り立つ. ここで, $E \setminus E_{deg}$ は退化しない辺全体を表し, $\tilde{T}_e = T_e/\|T_e\|$ である.

この命題から, $\text{Tr} q_f^p < 0$ となるための十分条件を次のように導出できる. いま, $\mathcal{S}_F := \{\|B(Z, Z)\|_w^2 \mid w \in M, Z \in T_w M \text{ with } \|Z\| = 1\}$ とおき, 次の量を定義しておく.

$$\beta_F := \min \mathcal{S}_F, \quad \gamma_F := \max \mathcal{S}_F.$$

系 4.7. 次が成り立つ.

- (1) もし $Q_F < \beta_F g$ ならば, (M, g) への任意の離散極小はめ込み f に対して $\text{Tr} q_f^1 < 0$. 特にこのとき, (M, g) は性質 $(\mathbf{N}_1)$ を持つ.
- (2) もし $Q_F < -(p-2)\gamma_F g$ ならば, (M, g) への任意の離散 p -調和写像 f に対して $\text{Tr} q_f^p < 0$. 特にこのとき, (M, g) は性質 $(\mathbf{N}_p)$ を持つ.

さらに, $\text{Tr} q_f^p = 0$ という特殊な場合であれば, 3節に述べた議論を用いて, 安定な離散写像に対する障害を次のような形で導くことができる.

補題 4.8. $F : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ を等長的なはめ込みとする.

- (1) もし $f : (X, m_E) \rightarrow (M, g)$ が安定な離散極小はめ込みかつ $\text{Tr} q_f^1 = 0$ を満たすならば, すべての辺 e 上で,

$$K(N \wedge \tilde{T}_e) = \|B(N, \tilde{T}_e)\|^2$$

が成立する. ここで $N \in T_w M$ は T_e に直交する任意の単位ベクトルで, K は M の断面曲率を表す.

- (2) もし $f : (X, m_E) \rightarrow (M, g)$ が安定な離散 p -調和写像かつ $\text{Tr} q_f^p = 0$ を満たすならば, 非退化な辺 e 上で,

$$K(N \wedge \tilde{T}_e) = 0$$

が成立する. ここで $N \in T_w M$ は T_e に直交する任意の単位ベクトルである. しかもこのとき, $F \circ f : (X, m_E) \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ はまた離散 p -調和写像になる.

以上の判定法の良いところは, (M, g) への (任意の) 離散写像の不安定性を「 (M, g) の内在的性質および等長はめ込み $F: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ の外在的性質」によって結論付けられるという点にある. 例えば, $F: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ を単位球面の標準的な埋め込みとすれば, 簡単な計算により $Q_F = -(n-2)g$ かつ $\beta_F = \gamma_F = 1$ であることがわかる. 特に,

- 系 4.7 (1) を適用すれば, 「 $n \geq 2$ となる標準球面 S^n は性質 (N_1) を持つこと」がわかる.
- 系 4.7 (2) を適用すれば, 「 $n \geq p+1$ となる標準球面 S^n は性質 (N_p) を持つこと」もわかる.
- 系 4.7 を用いるだけだと, $p=2$ のとき (離散調和写像のとき) に, S^2 が性質 (N_2) を持つことを示せないが, $p=2$ かつ $n=2$ のときは, $Q_F = 0$ かつ $\text{Tr} q_f^2 = 0$ となって, 補題 4.8 (2) を適用できる. つまり, $f: (X, m_E) \rightarrow S^2$ が安定と仮定すると, 非退化な辺に沿って $K(N \wedge \tilde{T}_e) = 0$ となる必要があるが, S^2 の断面曲率は正なので, これは起こり得ない. よって f は定値写像だとわかる (なお, $S^2 \simeq \mathbb{C}P^1$ だから, 性質 (N_2) が成り立つことは定理 1.1 から分かる).

この方法を一般の単連結既約コンパクト対称空間 (M, g) に適用することを考える. そのためにはまず, コンパクト対称空間を $\mathbb{R}^{n+k}$ に等長的にはめ込む写像 F を与える必要がある. 以上の議論は F に依存するので, どのような F を選ぶかは大事な点であるが, ここでは ([11, 23] でも考えられているように) 1 つの合理的方法として **標準等長はめ込み** (standard isometric immersion) を取ることを考える.

4.2.1. 標準等長はめ込み

「標準等長はめ込み」と呼ばれるイソトロピー既約な等質空間のユークリッド空間への等長はめ込みについて簡単にまとめておく. 詳細は例えば [3] などが参考になる.

(M, g) をコンパクトリーマン多様体であって, 等長変換群のある閉部分群 G が M に推移的に作用すると仮定する. このとき, 適当な点 o における固定部分群 K を用いて, M は等質空間 G/K と微分同相になるので, 以下 $M = G/K$ と同一視する.

G -不変リーマン計量 g に関するラプラシアン Δ の (正の) 第 i 固有値を λ_i とかき, その $L^2(M)$ における固有空間を V_i と表す. このとき, V_i の L^2 -直交基底 $\{f_1, \dots, f_{m_i}\}$ を用いて, 写像 $\Phi_i: M \rightarrow V_i \simeq \mathbb{R}^{m_i}$ を

$$\Phi_i := \alpha(f_1, \dots, f_{m_i})$$

(ここで, α はある正の定数) と定めるとこれははめ込みを与える (しかし一般に等長的とは限らない). また, ある G の表現 $\rho: G \rightarrow O(V_i)$ に関して Φ_i は G -同変であることも従う.

今, $M = G/K$ のイソトロピー表現が既約であると仮定すると, Schur の補題により, M 上の G -不変リーマン計量は, スケーリングの違いを除き一意に定まる (しかもそれはアインシュタイン計量になる). Φ_i の G -同変性から Φ_i によって M に誘導されるリーマン計量は G -不変になるので, 特にこの誘導計量は g の定数倍になることが分かる. 従って, 適当な定数 α を取れば, Φ_i を等長的なはめ込みにすることができる. この等長はめ込みを $M = G/K$ の **第 i 標準等長はめ込み** と呼ぶ.

Φ_i は表現 $\rho: G \rightarrow O(V_i)$ に関して G -同変なので, 特に適当な半径 r の球面 $S^{m_i-1}(r)$ に含まれる. すると, 有名な高橋の定理によって次のことがわかる.

定理 4.9. M をイソトロピー既約なリーマン等質空間とする. このとき, 等長はめ込み $\tilde{\Phi}_i : M \rightarrow S^{m_i-1}(r)$ は球面への極小はめ込みを与える. さらにその半径は $r = \sqrt{\dim M / \lambda_i}$.

標準等長はめ込みは**対称 R-空間の標準埋め込み**と呼ばれる埋め込みとも関連がある. 主定理の証明には直接必要としないが, 少しだけ触れておく.

$N = L/G$ を n 次元既約非コンパクト型対称空間とする. このとき, 原点 o における固定部分群 G は接空間 $T_o M \simeq \mathbb{R}^n$ に等長的に作用し, その軌道は **R-空間** と呼ばれる $\mathbb{R}^n$ のコンパクト等質部分多様体 $M = G/K$ を与える. R-空間は非常に調べやすく, 第二基本形式や主曲率, 平均曲率と言った幾何学量を M の (制限) ルート系を用いて詳細に記述できる (cf. [3, 13, 28]). 例えば, 主軌道として現れる R-空間は等径部分多様体の典型例を与える.

R-空間が誘導計量に関して対称空間になるとき, **対称 R-空間** と呼ばれ, その埋め込みを対称 R-空間の標準埋め込みと言う. 対称 R-空間は完全に分類されていて, エルミート対称空間かその中の実形として実現できるものであることが知られている (cf. [30]). 従ってまた, 全ての対称空間が対称 R-空間として $\mathbb{R}^n$ の中に実現できるわけではないが, 経験的に言って, 対称空間 M が対称 R-空間として実現されるとき, その埋め込みは M の1つの「よい」埋め込みを与える (この点は例えば [1] でも強調されている). 例えば, L が単純リー群のとき, 対称 R-空間の標準埋め込み $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ は, 球面への等長はめ込み $\tilde{\Phi} : M \rightarrow S^{n-1}$ を与える (竹内-小林 [31]). また, 対称 R-空間の標準埋め込み $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ の第二基本形式 B は常に平行 ($\nabla^\perp B = 0$) であるということも知られている (Ferus [8]).

M のイソトロピー表現が既約な場合, 対称 R-空間の標準埋め込みと第 i 標準等長はめ込みは次のように関係している.

定理 4.10 (大仁田 [21]). $M = G/K$ を対称 R-空間とし, M のイソトロピー表現が既約であると仮定する. このとき, 対称 R-空間の標準埋め込みは M の第一標準等長はめ込みと同値である.

4.2.2. コンパクトリーマン対称空間の場合

元の話に戻る. 以下, (M^n, g) を n 次元の単連結既約コンパクトリーマン対称空間とする. このときイソトロピー表現は既約になるので, $\Phi_i : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ を第 i 標準等長はめ込みが取れる. この Φ_i にこの節で述べた平均化の方法を適用してみる. 議論としてはおおよそ同じなので, 以下では $p = 1$, つまり $f : (X, m_E) \rightarrow (M, g)$ を離散極小はめ込みとして概要をまとめる.

まず, 標準的に g を $\text{Ric} = \frac{1}{2}g$ となるように取っておく. このとき, $\tilde{\Phi}_i : M^n \rightarrow S^{(n+k-1)}(\sqrt{n/\lambda_i})$ が極小はめ込みであるという事実を用いると,

$$Q_{\Phi_i} = (\lambda_i - 1)g$$

となっていることがわかる. また, $\tilde{\Phi}_i : M \rightarrow S^{n+k-1}(r)$ の第二基本形式を $\tilde{B}$ と書けば, $\Phi_i : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ との第二基本形式 B との関係は, $B(X, Y) = \tilde{B}(X, Y) - \frac{1}{r}g(X, Y)\nu$ (ν は $S^{n+k-1}(r)$ の単位法ベクトル場) であるから, 系 4.7 (1) における性質 (N₁) を持つための十分条件は,

$$Q_{\Phi_i} < \beta_{\Phi_i} g \iff \lambda_i < \frac{n}{n-1}(1 + \beta_{\tilde{\Phi}_i})$$

とかくことができる. ここで $\beta_{\tilde{\Phi}_i} := \min\{\|\tilde{B}(Z, Z)\|_w^2 \mid w \in M, Z \in T_w M \text{ with } \|Z\| = 1\}$ である. 一般に $\beta_{\tilde{\Phi}_i}$ は 0 になり得るが, いずれにせよ, この $\beta_{\tilde{\Phi}_i}$ を決定することはそれほど簡単なことではないことに注意しておく. しかし, 上の不等式から, $\lambda_1 < n/(n-1)$ を満たせば, 性質 (N_1) が成立することがわかる. もしさらに対称空間 M の階数が 2 以上の場合であれば, この不等式は補題 4.8 を用いてわずかに改善できて, 等号込みの不等号

$$\lambda_1 \leq \frac{n}{n-1} \quad (1)$$

を満たせば, 性質 (N_1) を持つことを示せる.

単連結既約コンパクトリーマン対称空間のラプラシ안의第一固有値 λ_1 は全て計算されていて (cf. [15]), この計算結果と照らし合わせて不等式 (1) を満たすものを分類することで, 以下の (i)–(iii) のクラスの対称空間に対して性質 (N_1) を持つことを示せる.

- (i) 強不安定な単連結既約コンパクトリーマン対称空間 (完全なリストは前節を参照).
これは $\lambda_1 < 1$ と同値.
- (ii) コンパクトエルミート対称空間または例外型リー群 G_2 . これは $\lambda_1 = 1$ と同値.
- (iii) $SU(3)/SO(3)$, $SU(4)/SO(4) (\simeq SO(6)/SO(3) \times SO(3))$, $\text{Spin}(7)$.

このうち, $SU(4)/SO(4)$ と $\text{Spin}(7)$ (いずれも階数 3) については, 等号 $\lambda_1 = n/(n-1)$ が成立する場合であることに注意しておく.

以上の (i)–(iii) のリストに入っていないのは次の対称空間である.

- (iv) 階数 2 の例外型対称空間 $G_2/SO(4)$.
- (v) 階数 3 の有向実グラスマン多様体 $SO(q+3)/SO(q) \times SO(3)$ (ただし $q \geq 4$).
- (vi) 階数 4 以上かつ (i), (ii) に属さないもの.

次節に詳しく述べるように, (iv) の $G_2/SO(4)$ に対しては, 系 4.7 に述べた条件を直接示すことで, 性質 (N_1) を持つことを示せる. これで定理 1.2 (1) の証明は終わる.

残る (v), (vi) の場合については, 今回用いた方法 (標準等長はめ込みに対する平均化法) で性質 (N_1) を導くのは難しいように思われる (例えば, (v) の多くの場合, 第一標準等長はめ込みが系 4.7 の条件を満たさないことが計算でわかる. 詳細は [13] を参照して頂きたい). 性質 (N_2) については, ヘシアンの違いから, さらに弱いことしか今のところ言えていない (定理 1.2(2)).

4.2.3. $G_2/SO(4)$ の場合

階数 2 の例外型対称空間 $G_2/SO(4)$ が性質 (N_1) を持つことを示すには, うまい等長はめ込み $F: G_2/SO(4) \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ を取って, 系 4.7(1) にあげた十分条件 $Q_F < \beta_{Fg}$ を満たすことを見る. 前節の議論と違って技術的に難しいのは,

$$\beta_F = \min\{\|B(Z, Z)\|_w^2 \mid w \in M, Z \in T_w M \text{ with } \|Z\| = 1\}$$

の値を具体的に決定して初めて性質 (N_1) を導くことができる, という点である.

$G_2/SO(4)$ のユークリッド空間への等長はめ込みを具体的には次のように構成する⁷.

- まず, 階数6の27次元非コンパクト型対称空間 $SL(7, \mathbb{R})/SO(7)$ を考える. そのイソトロピー表現の軌道 (R-空間) の中には, 対称 R-空間として無向実グラスマン多様体 $G_3(\mathbb{R}^7)$ が現れる. この埋め込みを $\varphi: G_3(\mathbb{R}^7) \rightarrow \mathbb{R}^{27}$ と書く.
- 例外型リー群 G_2 は $SO(7)$ の部分群として実現できるので, G_2 は有向実グラスマン多様体 $\tilde{G}_3(\mathbb{R}^7)$ に自然に作用する. この作用の原点軌道は全測地的な部分多様体となり, それは対称空間 $G_2/SO(4)$ に等長的になる (“associative Grassmannian” と呼ばれている). 二重被覆写像 $\pi: \tilde{G}_3(\mathbb{R}^7) \rightarrow G_3(\mathbb{R}^7)$ を介せば, 全測地的なはめ込み $\iota: G_2/SO(4) \rightarrow G_3(\mathbb{R}^7)$ が得られる.
- $G_2/SO(4)$ から $\mathbb{R}^{27}$ への等長はめ込み Φ を

$$\Phi := \varphi \circ \iota: G_2/SO(4) \rightarrow \mathbb{R}^{27}$$

と定める. 定義の仕方からこれは同変な写像になっていて, 特に適当な半径 r の球面 $\tilde{\Phi}: G_2/SO(4) \rightarrow S^{26}(r)$ への等長はめ込みも与える.

なお, $G_2/SO(4)$ は対称 R-空間ではないことを強調しておく. この等長はめ込み Φ は次に述べるような顕著な性質を持っている.

命題 4.11 ([13]). 次が成り立つ.

- (1) $\tilde{\Phi}: G_2/SO(4) \rightarrow S^{26}(r)$ は極小はめ込みである.
- (2) $\Phi: G_2/SO(4) \rightarrow \mathbb{R}^{27}$ の第二基本形式 B は**等方的** (isotropic) である. つまり, 任意の $w \in G_2/SO(4)$ と任意の単位接ベクトル $v \in T_w(G_2/SO(4))$ に対して, $\|B(v, v)\|_w$ は一定値になる.

注意 4.12. 竹内-小川の定理 ([31]) によれば, 対称 R-空間の埋め込み $\varphi: G_3(\mathbb{R}^7) \rightarrow \mathbb{R}^{27}$ も球面への極小はめ込みを与えるが, (1) の性質はこの事実の直接的な帰結ではない⁸. また, $\varphi: G_3(\mathbb{R}^7) \rightarrow \mathbb{R}^{27}$ は等方的ではない.

命題 4.11 の証明には, 対称 R-空間の幾何を基礎とした注意深い計算が必要になる. 詳細は [13] を参照して頂きたい.

第二基本形式の等方性により, $\beta_\Phi = \|B(v, v)\|_w^2$ となるので, この値は比較的容易に決定できる. この具体的な値を用いて $Q_\Phi < \beta_\Phi g$ であることを確かめることができ, その結果として $G_2/SO(4)$ が性質 (N₁) を持つことを示すことができる.

Acknowledgement. This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP18K13420, 23K03122 and the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

⁷ 筆者はこの構成を佐々木優さん (宇都宮大) から示唆してもらった. 対称 R-空間の全測地的部分多様体を対称 R-空間の標準埋め込みを経由してユークリッド空間にはめ込むこの方法は, [21] の中でも使われている.

⁸ Φ が $G_2/SO(4)$ の第一標準はめ込み Φ_1 に一致しているかどうかは興味深い (筆者はそうだと信じているが確かめていない. 原理的には [21] の方法で確かめられると思う).

参考文献

- [1] 阿賀岡芳夫, リーマン多様体の等長埋め込み論外史. 部分多様体論湯沢 2014. 報告集.
- [2] L. AMBROZIO, A. CARLOTTO AND B. SHARP, *Comparing the Morse index and the first Betti number of minimal hypersurfaces*. J. Differential Geom. 108 (2018), no. 3, 379–410.
- [3] J. BERNDT, S. CONSOLE AND C. OLMOS. *Submanifolds and holonomy*. Second edition. Monographs and Research Notes in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 2016.
- [4] BESSE ARTHUR L. *Einstein manifolds*. Reprint of the 1987 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [5] D. BURNS, F. BURSTALL, P. DE BARTOLOMEIS AND J. RAWNSLEY, *Stability of harmonic maps of Kähler manifolds*, J. Differential Geom. **30** (1989) 579–594.
- [6] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Comment rendre géodésique une triangulation d’une surface?*, Enseign. Math. (2), 37(3-4):201–212, 1991.
- [7] H.Y. CHENG, *Stable geodesic nets in convex hypersurfaces*, arXiv:2109.09337v1.
- [8] D. FERUS, *Immersionen mit paralleler zweiter Fundamentalform: Beispiele und Nicht-Beispiele*. Manuscripta Math. 12 (1974), 153–162.
- [9] C. GORODSKI, R. MENDES AND M. RADESCHI, *Robust index bounds for minimal hypersurfaces of isoparametric submanifolds and symmetric spaces*. Calc. Var. Partial Differential Equations 58 (2019), no. 4, Paper No. 118, 25 pp.
- [10] S. HELGASON. *Totally geodesic spheres in compact symmetric spaces*, Math. Ann. **121** (1966) 160–186.
- [11] R. HOWARD AND S.W. WEI, *Nonexistence of stable harmonic maps to and from certain homogeneous spaces and submanifolds of Euclidean space*. Trans. Amer. Math. Soc. 294 (1986), no. 1, 319–331.
- [12] M. ITOH, *On curvature properties of Kähler C-spaces*. J. Math. Soc. Japan, 30 (1978), no. 1, 39–71.
- [13] T. KAJIGAYA, *Nonexistence of stable discrete maps into some homogeneous spaces of nonnegative curvature*, Ann. Math. Pura Appl. (2023), 41 pages.
- [14] T. KAJIGAYA AND R. TANAKA, *Uniformizing surfaces via discrete harmonic maps*, Ann. H. Lebesgue. 4 (2021) 1767–1807.
- [15] S. KOBAYASHI, Y. OHNITA AND M. TAKEUCHI, *On instability of Yang–Mills connections*. Math. Z. **193** (1986), no. 2, 165–189.
- [16] M. KOTANI AND T. SUNADA, *Standard realizations of crystal lattices via harmonic maps*. Trans. Amer. Math. Soc., 353(1):1–20, 2001.
- [17] H.B.LAWSON JR. AND J. SIMONS, *On stable currents and their application to global problems in real and complex geometry*, Ann. of Math. (1973), 427–450.
- [18] Y. LIOKUMOVICH AND B. STAFFA, *Generic Density of Geodesic nets*, arXiv:2107.12340.
- [19] S. LOHOVE, *Holomorphic curvature of Kähler-Einstein metrics on generalised flag manifold*, Ph.D. Thesis. Univ. Florence, 2019.
- [20] A. NABUTOVSKY AND R. ROTMAN, *Shapes of geodesic nets*, Geometry & Topology **11** (2007), no. 2, 1225–1254.
- [21] Y. OHNITA, *The first standard minimal immersions of compact irreducible symmetric spaces*. Differential geometry of submanifolds (Kyoto, 1984), 37–49, Lecture Notes in Math., 1090, Springer, Berlin, 1984.
- [22] Y. OHNITA, *Stable minimal submanifolds in compact rank one symmetric spaces*. Tohoku Math. 38 (1986), no. 2, 199–217.
- [23] Y. OHNITA, *Stability of harmonic maps and standard minimal immersions*. Tohoku Math. J. (2) 38 (1986), no. 2, 259–267.

- [24] Y. OHNITA, *On stability of minimal submanifolds in compact symmetric spaces*. Compositio Math. **64** (1987), no. 2, 157–189.
- [25] Y. OHNITA AND S. UDAGAWA, *Stable harmonic maps from Riemann surfaces to compact Hermitian symmetric spaces*, Tokyo J. Math. **10** (1987) 385–390.
- [26] A. ROS, *One-sided complete stable minimal surfaces*. J. Differential Geom. **74** (2006), no. 1, 69–92.
- [27] A. SAVO, *Index bounds for minimal hypersurfaces of the sphere*. Indiana Univ. Math. J. **59** (2010), no. 3, 823–837.
- [28] R. TAKAGI AND T. TAKAHASHI, *On the principal curvatures of homogeneous hypersurfaces in a sphere*, in: Differential Geometry (in Honor of Kentaro Yano), Kinokuniya, Tokyo, 1972, pp.469–481.
- [29] H. TASAKI, *Certain minimal or homologically volume minimizing submanifolds in compact symmetric spaces*, Tsukuba J. Math. **9** (1985), no. 1, 117–131.
- [30] M. TAKEUCHI, *Stability of certain minimal submanifolds of compact Hermitian symmetric spaces*, Tohoku Math. J. **36** (1984), 293–314.
- [31] M. TAKEUCHI AND S. KOBAYASHI, *Minimal embeddings of R-spaces*, J. Differential Geom. **2** (1968), 203–216.
- [32] F. TORRALBO AND F. URBANO *Index of compact minimal submanifolds of the Berger spheres*. Calc. Var. Partial Differential Equations **61** (2022), no. 3, Paper No. 104, 35 pp.
- [33] W. ZILLER, *Closed geodesics on homogeneous spaces*. Math. Z. **152**, 67–88 (1976).