

弱電離プラズマにおける 非線形波動

京大 理 佐藤 哲也

§ 1. 序

連続体媒質中の非線形波の伝播を記述する簡単なモデル方程式のなかで、分散性を有する場合の代表的な方程式として、いわゆる Korteweg-de Vries 方程式があり、散逸性を有する場合として Burgers 方程式がある。前者に対しては定常解（例えばソリト＝解）が知られており、その Cauchy 問題に対する解の大域的存在定理が作られている（高橋氏の参考文献）。これに対して Burgers 方程式は、その正確な解の型が求められている。しかしながら一般の現象では分散性及び散逸性と同時に有する場合が多く、単純にソリト＝解あるいは衝撃波で表わすことができない。問題とプラズマに限った場合、適当な条件の下では方程式系と KdV 方程式や Burgers 方程式に帰することが可能であるが（例えば Taniuchi and Wei, J. Phys. Soc. of Japan, 24, 941, 1968）、こ

れも かなり限らした条件に対してである。

ここでのべる話は 線形的にも分散性及び散逸性を同時に
もたえた不安定波動 (弱電離プラズマ中に発生する超低周波
の縦波) の非線形的振舞いの数値解についてである。結論か
ら先にのべると 散逸効果が大きい場合には 同期条件の下
で 鋸歯状波的存在常解 ($n(x-ct)$ 型) が存在し、散
逸効果が小さくあるにつれて 波束的 (packet-like) 局在
波にあるということである。

§ 2. 系の記述

今、磁場 (均一) B_0 の存在する弱電離プラズマ中の低周波
モード (縦波) を考える。この場合、系を記述する方程式系
は 連続の式及び流れの式を準中性条件 ($n^+ \approx n^- \equiv n$) の下
で連立させることにより得られる。これらの式を結合する
ことにより次のような非線形 2 階連立偏微分方程式を得る

$$\frac{\partial n}{\partial t} \pm \mu^\pm T_{ij}^\pm \frac{\partial}{\partial x_i} (n E_j) - D^\pm T_{ij}^\pm \frac{\partial^2 n}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad (1)$$

ここに n は電子密度 (正イオン密度)、 E_j は電場の j -
成分を示す。添字の "+"、"-" はそれぞれ電子及び (正)
イオンに対する量と表わす。 $\mu^\pm T_{ij}^\pm$ 及び $D^\pm T_{ij}^\pm$ は電子及

イオンの移動度テンソル及び拡散テンソルを表わす。(1)式は3次元(空間座標に關し)表示であるが、今簡単のため、系の配位を次のように定める。即ち[図1]のような直交座標系を考え、磁場 B_0 が z 軸に、直流の外部電場 E_A 及びプラズマの密度勾配(不均一性) $\nabla n_0(z)$ が z 軸に沿ってのみ存在し、波(擾乱波)は y 軸に沿ってのみ伝播する場合を考えることにする(問題を一次元化)。

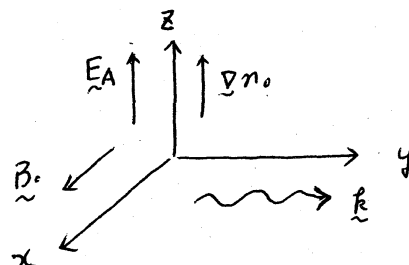
まず、擾乱が存在しない場合の平均場($\frac{\partial}{\partial t} = 0$)の解を考える。(1)式において、 x, y 方向に対しては均一($\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} = 0$)であることからこの式は z に關する常微分方程式となる。一つの解として次のような解を得ることもできる。即ち

$$\frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dz} = \kappa \quad (\text{定数}), \quad \text{即ち} \quad n_0(z) = n_0(0) e^{\kappa z} \quad (2)$$

$$\text{即ち} \quad E_0 = \frac{D_L^+ - D_L^-}{\mu_L^+ + \mu_L^-} \kappa + E_A \quad (3)$$

$$\text{即ち} \quad \mu_L^\pm = \mu^\pm T_{33}^\pm, \quad D_L^\pm = D^\pm T_{33}^\pm.$$

次に(2), (3)式で示される平均場には y 方向に伝播する擾

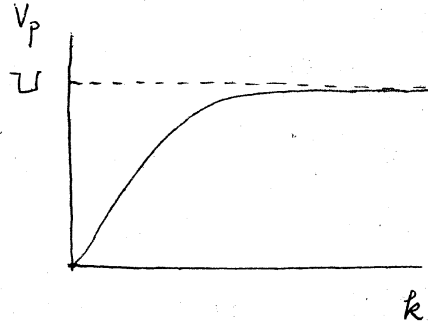


[図 1]

乱を加えた場合の波の線形分散関係について考える。結果のみを示すと、[図1]の配位の下での線形解析の結果

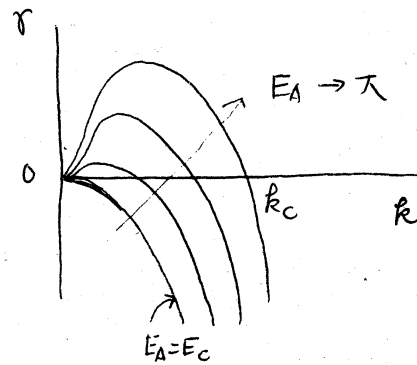
果、微小振巾波の位相速度 V_p 対 波数 k の関係は [図 2] の如くなる。図中の U はプラズマの代表的な流れの速度 ($\underline{E}_0 \times \underline{B}_0$ によるドリフト速度) である。

$$U = \frac{\mu_1^+}{\mu_1^+ + \mu_1^-} \mu_H E_0$$



[図 2]

で示される。ここは μ_H は Hall 移動度を示す。この図より波の Mach 数 $M = U/V_p$ は 1 より大となり波は衝撃波的な振舞いをすることが期待される。



[図 3]

次に波の成長率 γ (減衰率 $-\gamma$) に図 1 2 は 外部電場 E_A がある臨界値 E_c 以上の場合には [図 3] のように ある波数領域 ($k \leq k_c$) で不安定 ($\gamma > 0$) となり $k > k_c$ では減衰 (散逸性) である。図に示すように E_A を E_c より大きくするに従って k_c は大きくなり散逸領域が狭くなる。これかえると E_A が E_c に近づくにつれ 系はより散逸的となり、 E_A が逆に E_c より小さくなるにつれ 散逸効果は小さくなることを示している。従って 衝撃波的な性格が少なくなることを予想される。

この波動は Kadomtsev 方程式や Burgers 方程式の波と異なり、外場というエネルギー供給源に与えられているため方程式に非斉次項 (source term) が加わり、そのために波は不安定 (成長モード) となる。プラズマという立場からは正にこのことが問題を面白くし、この成長する波がどのような非線形相互作用によって制御されるのが興味の対象であるがここではこの効果の解析についてはおかれたいことにして次節では数値解析で得た波の振舞いの例を簡単に紹介することにとどめる。

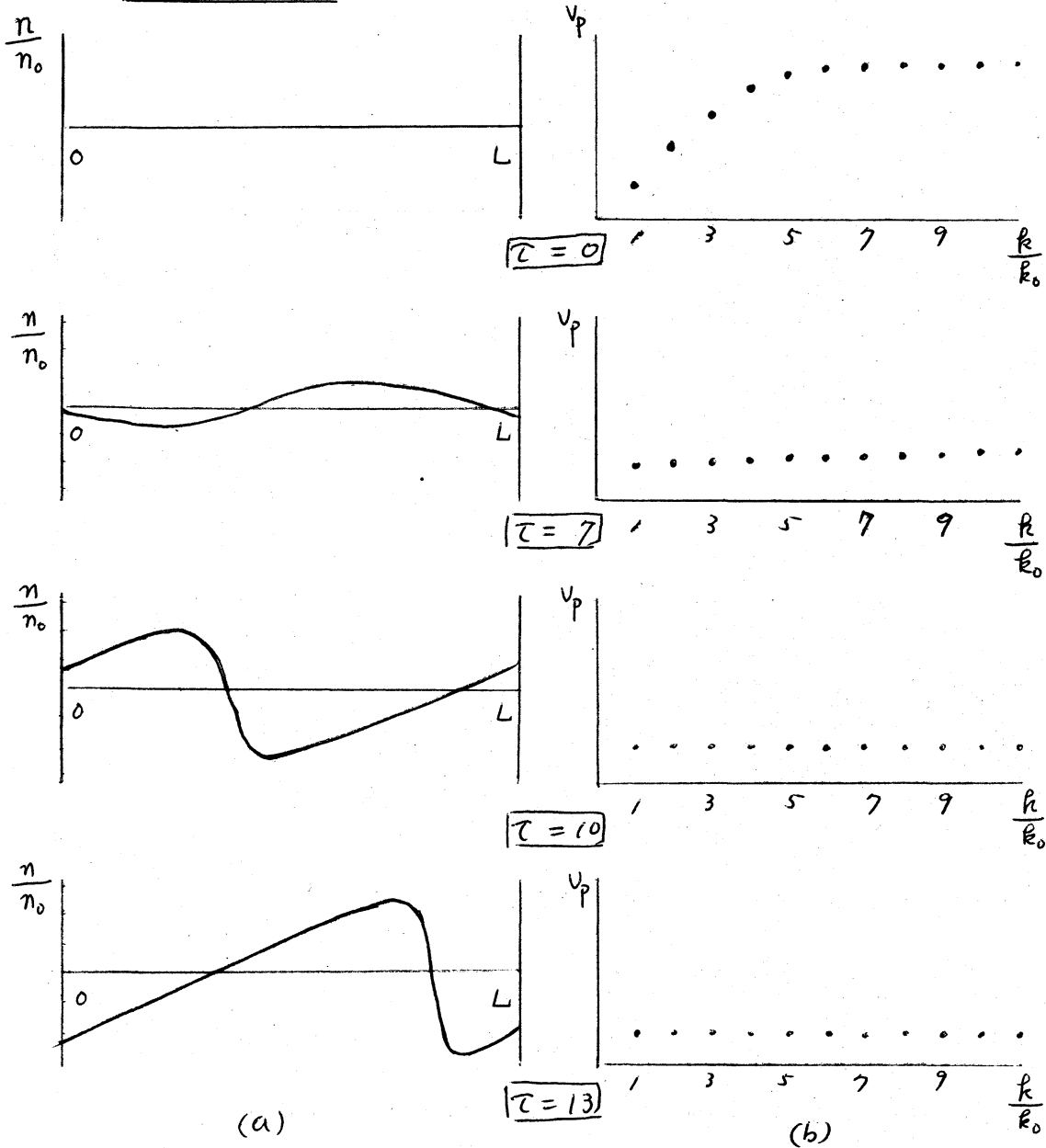
§ 3. 数値解析 — 波の振舞い —

[図 1] の配位の下で、一次元化とした (1) 式を初期値問題として解く。その際波 (y 方向に伝播) は同期境界条件 (同期 L) に従うものとする。

[図 4] の説明

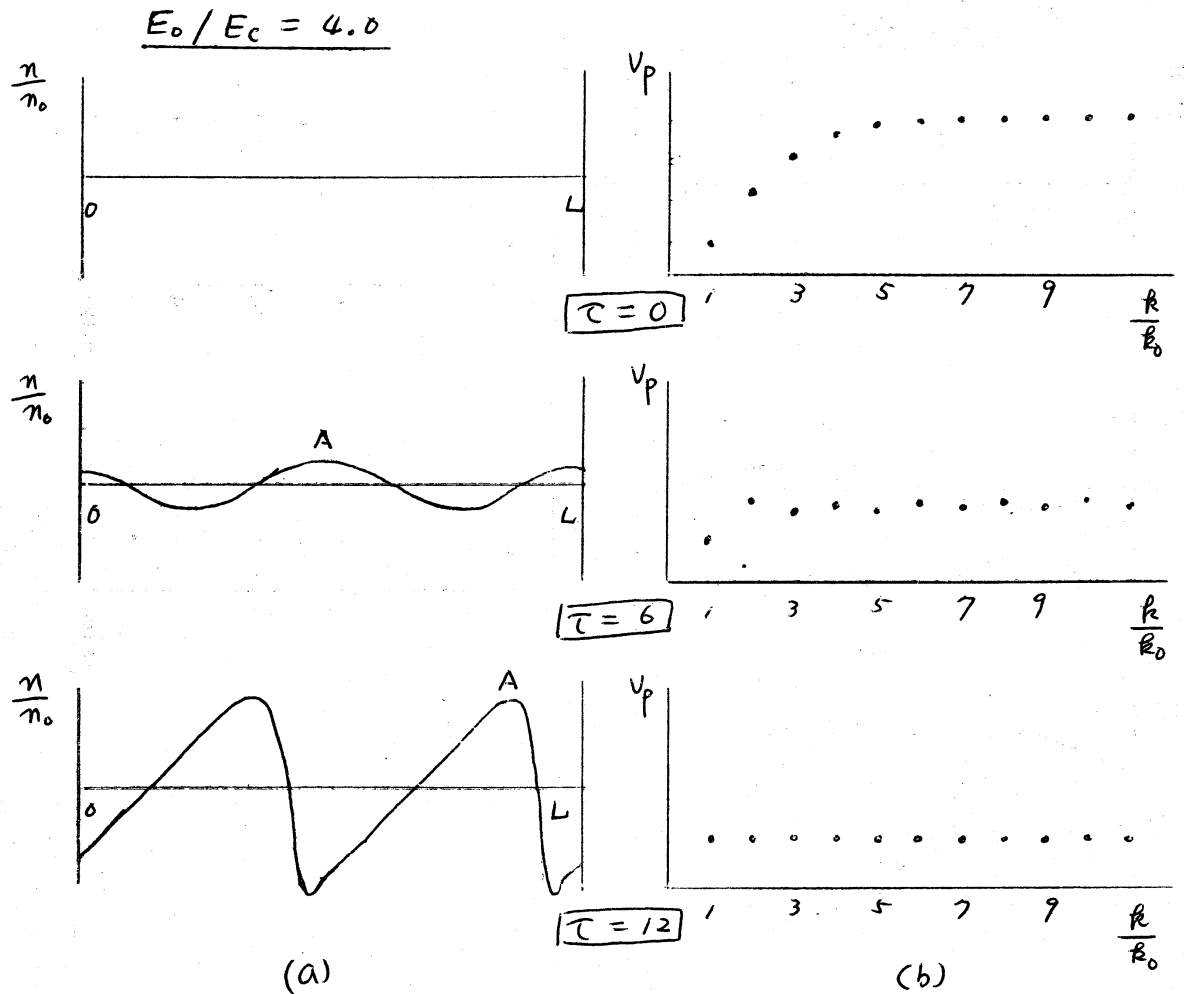
(a) 図は $E_0/E_c = 2.5$ に対する波 (密度波) の時間発展を示す図で (b) 図は対応する時刻 (τ) での各フーリエ・モード (基本波数 $k_0 = 2\pi/L$) の位相速度を示す。初期擾乱波として振幅 $|n/n_0|$ が 10^{-3} 程度の雑音を用いている。この図より $\tau > 10$ で位相速度がすべてのモードに対して一定となり定常

$$E_0/E_c = 2.5$$



[図 4]

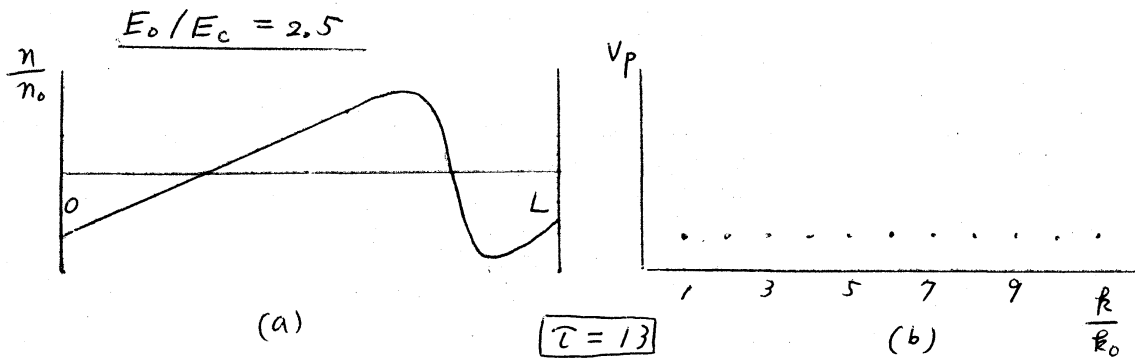
解が得られぬことを示している。更にその波形は鋸歯状波の
である。同様の例では 基本波 ($k/k_0=1$) が最大成長率をも
つていることに注意される。



[図 5]

[図 5] の説明

[図4]と同じ計算で $E_0/E_c = 4.0$ とした場合の波形の時間変化及び位相速度の時間変化を示す図である。この時の最大成長率をもつモードは $k = 2$ の高調波 ($k/k_0 = 2$) である。[図4]の場合と同様 $\tau = 12$ で各モードの位相速度が揃っており定常解が存在することを示している。このときの波形もやはり鋸歯状波である。



[図 6]

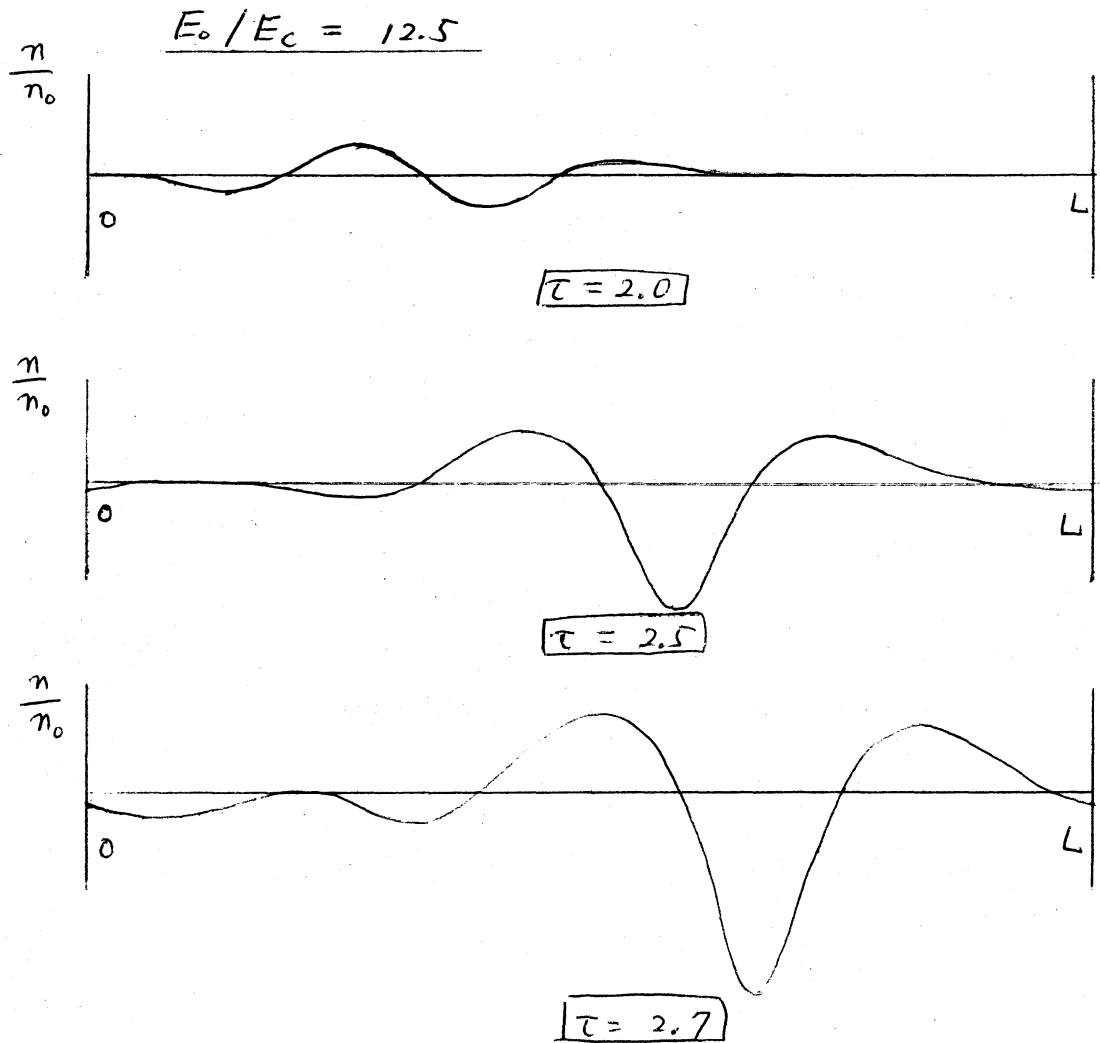
[図 6]の説明

この図は異后の初期条件から出発したとき 同一解に到達するかどうかをみるために、行后の数値計算で

[図 5] の $\tau = 12$ における状態を初期 ($\tau = 0$) とし、電場を $E_0/E_c = 4.0$ から 2.5 に変え、 $\tau = 13$ における波形 (a) 及び位相速度 (b) の関係を示したものである。この図と [図 4] の $\tau = 13$ における図と比較すると、波形及び位相速度は完全に一致しており、得られた定常解が一意的であることを暗示している。

[図 7]の説明

[図 4] ~ [図 6] では E_0 が比較的小さく、伴って散逸効果の大きい場合に対する数値解であったが、 E_0 を更に大きくし、散逸効果を小さくした場合、どのような波形に



[図 7]

なるかを知るために計算した一例が [図 7] である。図
 は $E_0/E_c = 12.5$ に対する波形の時間変化を示している。
 この図からわかる通り、 E_0 を大きくした場合、波は
 局在した波形となることに注目される。このような局在波
 束の波形は $E_0 > 5E_c$ に対して常に成り立ち、 $E_0 = 5E_c$
 を境にして波形が鋸歯状波から波束状に解る性質が変

化することとを示してゐる。この $E_0 = 5 E_c$ なる値は理論的に予想される値であるが、ここではこの点について割愛させておく。図、[図7] に得られた波形が一意性を有するかどうかの数値解析による検証は行なつてゐることを附言しておく。

以上「ソリトン研究会」という標題とはかゝりかけはなれ
 E 内容のお話しをしたが、分散性及び散逸性を有する波動（不安定）の数値解析の一例を示し、散逸性が強い場合には

Burgers 方程式的の解を得、散逸性が弱くなるにつれ、ソリトンではなれが局在したモードに近づくことをお話しした。更に電場 E_0 を大きくしてゐる場合、あるいは、ソリトンの波が得られるかもしれないが、現在、その計算を続行中であり、近いうちに結果が得られるものと思う。